Folgen

Es sei X eine beliebige Menge. Eine *Folge mit Werten in* X ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X. Es wird also jeder natürlichen Zahl n (*dem Index*) ein Element a_n aus X zugeordnet (*das n-te Folgenglied*).

Notation:

$$(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, a_3, ...)$$

Im Falle $X = \mathbb{R}$ spricht man von reellwertigen Folgen, bei $X = \mathbb{C}$ von komplexwertigen, bei $X = \mathbb{R}^m$ von vektorwertigen Folgen. Hier diskutieren wir nur *reellwertige Folgen.* Man kann Folgen addieren

$$(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} = (a_n + b_n)_{n\geq 1}$$

und mit einem skalaren Faktor multiplizieren

$$\lambda(a_n)_{n\geq 1} = (\lambda a_n)_{n\geq 1}.$$

Diese Operationen werden gliedweise ausgeführt und geben der Menge aller reellwertigen Folgen die Struktur eines Vektorraumes. Den *Graphen einer Folge* erhält man durch Auftragen der Punkte $(n, a_n), n = 1, 2, 3, ...$ in einem Koordinatensystem, siehe Abbildung 1.

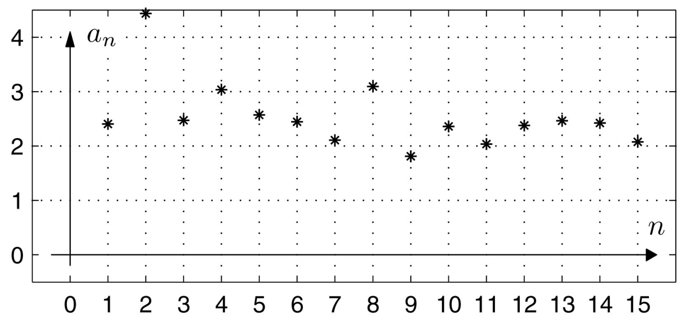

Abbildung 1: Graph einer Folge.

Beispiel 1: Visualisieren Sie mit Hilfe des Applets die Folgen:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (-1)^n/n, & b_n &= \arctan(n), \\ c_n &= \arctan(n) + 3(-1)^n/n, & d_n &= \arctan(n) + (-1)^n, \\ e_n &= \arctan(n) + 2/n^2, & f_n &= \cos(n\pi), \\ g_n &= n^2, & h_n &= (-1)^n\, n. \end{aligned}$$

Einige mögliche Verläufe von Folgen sind: wachsend/fallend, beschränkt/unbeschränkt, oszillierend, konvergent, ...

Beispiel 2: Ein auf Verhulst zurückgehendes diskretes Bevölkerungsmodell (begrenztes Wachstum) beschreibt die Bevölkerungszahl x_n zum Zeitpunkt n (Zeitschritte der Länge 1) durch die rekursive Beziehung

$$x_{n+1} = x_n + kx_n(L - x_n).$$

Dabei ist L die Grenzbevölkerung, k ein Wachstumsfaktor; zusätzlich ist die Anfangsbevölkerung $x_1 = A$ anzugeben. Experimentieren Sie mit $L = 1$, Anfangswert $A = 0.1$ und Wachstumsrate $k = 0.5, k = 1, k = 2, k = 2.5, k = 3$, um konvergentes, oszillierendes bzw. chaotisches Folgenverhalten.

Im Folgenden entwickeln wir einige Begriffsbildungen, die das Verhalten von Folgen beschreiben helfen.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt *monoton steigend*, wenn gilt:

$$n \leq m \Longrightarrow a_n \leq a_m.$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ heißt *monoton fallend*, wenn gilt

$$n \leq m \Longrightarrow a_n \geq a_m$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls gilt

$$\exists T \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq T.$$

Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*. Es ist jene reelle Zahl

$$T_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

welche die beiden Bedingungen erfüllt:

(a) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n \leq T_0$

(b) ist T eine reelle Zahl und $a_n \leq T$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muss $T \geq T_0$ sein.

Wir werden unten zeigen, dass jede nach oben beschränkte reellwertige Folge tatsächlich ein Supremum besitzt. Dieses Supremum muss nicht selbst schon als Folgenglied auftreten. Ist dies jedoch der Fall, so spricht man vom *Maximum* der Folge. Es ist

$$T_0 = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

falls die beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n \leq T_0$

(b) es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $a_m = T_0$ ist.

Analog heißt eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ *nach unten beschränkt*, falls gilt:

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad S \leq a_n.$$

Die größte untere Schranke heißt *Infimum*; im Falle der Annahme durch ein Folgenglied wird sie zum *Minimum*.

Konvergenz: Dieser zentrale Begriff der Analysis besagt anschaulich, dass sich die Folgenglieder a_n mit wachsendem Index n an einen *Grenzwert* a beliebig nähern. Zum Beispiel ist in Abbildung 2 mit $a = 0.8$:

$$|a - a_n| < 0.2 \text{ ab } n = 6, \ |a - a_n| < 0.05 \text{ ab } n = 21.$$

Zur Präzisierung des Konvergenzbegriffes führen wir zunächst den Begriff der *ε-Umgebung eines Punktes* $a \in \mathbb{R}$ ein ($\varepsilon > 0$):

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\}.$$

Wir sagen, dass eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(a)$ *sesshaft* wird, wenn alle Folgenglieder a_n ab einem gewissen Index $n(\varepsilon)$ in $U_\varepsilon(a)$ liegen.

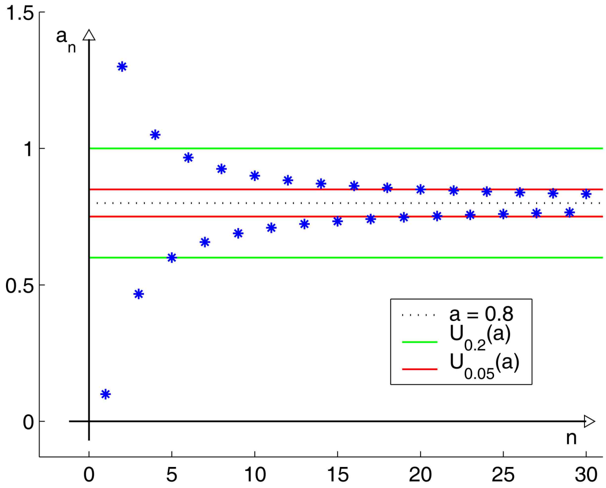

Abbildung 2: Zur Folgenkonvergenz.

Definition: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert gegen einen Grenzwert* a, falls sie in jeder ε-Umgebung von a sesshaft wird:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n(\varepsilon) : \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Notation: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Der nächste Satz ist die Grundlage der reellen Analysis. Er ist eine der Versionen der Aussage, dass die reellen Zahlen vollständig sind.

Satz (Vollständigkeit der reellen Zahlen): Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$).

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, dass sämtliche Glieder der monoton wachsenden, beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiv sind. Wir schreiben die Glieder als Dezimalzahlen

$$a_n = A^{(n)}.\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}\alpha_3^{(n)}\dots$$

mit $A^{(n)} \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j^{(n)} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Es existiert ein $T \geq 0$, sodass für alle n gilt: $a_n \leq T$. Somit ist auch $A^{(n)} \leq T$ für alle n. Die Folge $(A^{(n)})_{n\geq 1}$ ist aber eine monoton wachsende, beschränkte Folge natürlicher Zahlen und muss daher ihre kleinste obere Schranke A letztlich erreichen (und dort bleiben). Es gilt daher ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$A^{(n)} = A \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wir haben damit die Ziffern vor dem Komma für einen Grenzwert a konstruiert:

$$a = A.\ \dots$$

Sei nun $\alpha_1 \in \{0, \dots, 9\}$ die kleinste obere Schranke für $\alpha_1^{(n)}$. Wegen des monotonen Wachstums gibt es wieder ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_1^{(n)} = \alpha_1 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Also ist

$$a = A.\alpha_1 \dots$$

Sei weiter $\alpha_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ die kleinste obere Schranke für $\alpha_2^{(n)}$. Es gibt $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_2^{(n)} = \alpha_2 \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

Also ist

$$a = A.\alpha_1\alpha_2 \ldots$$

Sukzessive wird damit eine reelle Zahl

$$a = A.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots$$

definiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir suchen zunächst ein $j \in \mathbb{N}$, sodass $10^{-j} < \varepsilon$ ist. Für $n \geq n_j$ ist

$$a - a_n = 0.000\ldots0\,\alpha_{j+1}^{(n)}\ \alpha_{j+2}^{(n)}\ldots,$$

da die ersten j Stellen nach dem Komma in a mit jenen von a_n übereinstimmen, sofern $n \geq n_j$ ist. Somit gilt

$$|a - a_n| \leq 10^{-j} < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_j.$$

Mit $n(\varepsilon) = n_j$ wird damit die in Def. **??** geforderte Bedingung erfüllt. Falls die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ auch negative Glieder besitzt, kann sie durch Addition des Absolutbetrags des ersten Glieds zu einer Folge mit positiven Gliedern $(|a_1| + a_n)_{n\geq1}$ transformiert werden, auf die dann der erste Teil des Beweises angewendet werden kann. □

Bemerkung: Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig. Zum Beispiel ist die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$,

$$(1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...)$$

eine monoton wachsende, beschränkte Folge rationaler Zahlen (eine obere Schranke ist zum Beispiel $T = 2$), aber der Grenzwert $\sqrt{2}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$ (ist aber eine reelle Zahl $\in \mathbb{R}$).

Folgerung: Jede nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq1}$ reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Beweis: Sei $T_n = \max\{a_1, ..., a_n\}$ das Maximum der ersten n Folgenglieder. Diese Maxima definieren ihrerseits eine Folge $(T_n)_{n\geq1}$, die durch dieselben Schranken wie $(a_n)_{n\geq1}$ von oben beschränkt ist, aber zusätzlich monoton wachsend ist. Nach dem vorigen Satz besitzt sie einen Grenzwert T_0. Dieser Grenzwert ist das Supremum der ursprünglichen Folge. In der Tat ist $T_n \leq T_0$ für alle n, daher auch $a_n \leq T_0$ für alle n. Gäbe es eine kleinere obere Schranke $T < T_0$ der Folge $(a_n)_{n\geq1}$, so müssten mit $\varepsilon = T_0 - T$ ja ab einem $n(\varepsilon)$ alle T_n in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(T_0)$ liegen, also insbesondere größer als T sein. Somit gäbe es aber ein $a_j \in \{a_1, ..., a_{n(\varepsilon)}\}$, das größer als T ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass T eine obere Schranke war. Somit ist T_0 die kleinste obere Schranke. □

Rechenregeln für Grenzwerte: Falls die Folgen $(a_n)_{n\geq1}$ und $(b_n)_{n\geq1}$ konvergent sind, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) &= \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \quad (\text{für} \lambda \in \mathbb{R}) \\
\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) &= (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) \\
\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) &= (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n) \\
&\quad (\text{falls alle } b_n \neq 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{ ist})
\end{aligned}$$

Uneigentliche Grenzwerte: Falls die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ ins Unendliche wächst, also

$$\forall T \in \mathbb{R}\ \exists n(T) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n(T): \quad a_n \geq T$$

erfüllt ist, so hat $(a_n)_{n\geq 1}$ keinen Grenzwert im Sinne der vorigen Definition. Es ist aber praktisch, dieses Verhalten als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

zu beschreiben und ∞ als *uneigentlichen Grenzwert* der Folge zu bezeichnen. Analog schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \text{ falls } \lim_{n\to\infty} (-b_n) = \infty \text{ ist.}$$

Beispiel 3: Die geometrische Folge $(q^n)_{n\geq 1}$. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} q^n &= 0, \quad \text{falls } |q| < 1, \\ \lim_{n\to\infty} q^n &= \infty, \quad \text{falls } q > 1, \\ \lim_{n\to\infty} q^n &= 1, \quad \text{falls } q = 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Für $q \leq -1$ besitzt die Folge keinen Grenzwert (weder eigentlich noch uneigentlich).

Für genauere Ausführungen verweisen wir auf den Abschnitt 5 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.