Dynamische Systeme in der Ebene

1 Anfangswertprobleme

Differentialgleichungen sind Gleichungen zwischen einer (gesuchten) Funktion und deren Ableitung(en). Sie spielen bei der Modellierung von zeitabhängigen Prozessen eine bedeutende Rolle.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Die Gleichung

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$$

wird (gewöhnliche) *Differentialgleichung erster Ordnung* genannt. Eine *Lösung* ist eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $x = x(t)$, deren Graph in D liegt und welche die Gleichung für alle $t \in I$ erfüllt.

Meist gibt man bei der gesuchten Funktion x die *unabhängige Variable* t nicht an und formuliert obige Aufgabe kurz als: Löse die Differentialgleichung

$$x' = f(t, x).$$

Man nennt die gesuchte Funktion in dieser Gleichung auch *abhängige Variable* (sie hängt nämlich von t ab). Falls die Funktion f nicht explizit von der Variablen t abhängt, also im Fall

$$x'(t) = f(x(t)),$$

so nennt man die Differentialgleichung *autonom*.

Bei der Modellierung zeitabhängiger Prozesse deutet man das Ableiten meist mit einem Punkt an und schreibt die Differentialgleichung als

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$$

oder kurz als $\dot{x} = f(t, x)$.

Beispiel 1: Wir suchen alle Funktionen $x = x(t)$, welche die Gleichung $x'(t) = t \cdot x(t)^2$ erfüllen. In diesem Beispiel findet man die Lösungen durch *Trennen der Variablen.* Für $x \neq 0$ dividiert man dazu die Differentialgleichung durch x^2 und erhält

$$\frac{1}{x^2} \cdot x' = t.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist von der Form $g(x) \cdot x'$ und nach der Kettenregel gerade die Ableitung einer Stammfunktion von g

$$G(x) = \int g(x) \mathrm{d}x$$

nach t. Dabei ist x als Funktion von t aufzufassen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x) \cdot x'.$$

Im Beispiel haben wir $g(x) = x^{-2}$ und $G(x) = -x^{-1}$. Somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot x' = t.$$

Integration dieser Gleichung nach t ergibt

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + C,$$

wobei C eine beliebige Integrationskonstante bezeichnet. Daraus erhalten wir durch Umformung

$$x = \frac{1}{-t^2/2 - C} = \frac{2}{K - t^2}.$$

mit der Konstanten $K = -2C$.

Die Funktion $x = 0$ ist ebenso eine Lösung der Differentialgleichung. Man erhält sie formal aus der obigen Lösung, indem man $K = \infty$ setzt. Man hat in diesem Beispiel also nicht nur eine Lösung gefunden, sondern eine ganze *Schar von Lösungen*. Erst durch Angabe einer zusätzlichen Bedingung, beispielsweise $x(0) = 1$, erhält man eine eindeutige Lösung

$$x(t) = \frac{2}{2 - t^2}.$$

Definition: Die Differentialgleichung $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$ zusammen mit der zusätzlichen Bedingung $x(t_0) = x_0$ heißt *Anfangswertproblem* (Anfangswertaufgabe). Man schreibt Anfangswertprobleme meist in der Form

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Eine Lösung eines Anfangswertproblems ist eine (stetig) differenzierbare Funktion $x(t)$, welche die Differentialgleichung erfüllt und der *Anfangsbedingung* $x(t_0) = x_0$ genügt.

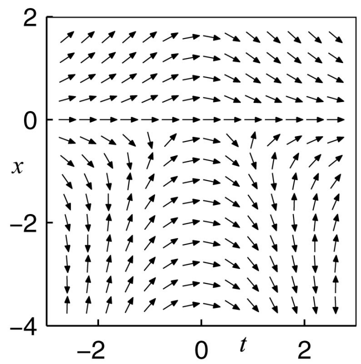
Geometrische Deutung einer Differentialgleichung: Mit einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

sucht man eine differenzierbare Funktion $x = x(t)$, deren Graph in D verläuft, und deren Tangentenanstieg $\tan\varphi = x'(t)$ in jedem Punkt $\big(t, x(t)\big)$ gerade $f\big(t, x(t)\big)$ ist. Durch Einzeichnen von kurzen Pfeilen mit Steigung $\tan\varphi = f(t, x)$ in den Punkten $(t, x) \in D$ erhält man das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung. Das Richtungsfeld liegt *tangential* zu den Lösungen und vermittelt daher einen guten optischen Eindruck von den Lösungen der Differentialgleichung. Die Abbildung zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$x' = -\frac{2tx}{t^2 + 2x}.$$

Man erkennt unter anderem deutlich die Kurve $x = -t^2/2$, entlang welcher die rechte Seite Singularitäten hat.



2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $a(t)$ und $g(t)$ auf einem Intervall gegebene Funktionen. Dann nennt man

$$x' + a(t)\,x = g(t)$$

eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Die Funktion a heißt *Koeffizient*, die rechte Seite g nennt man *Inhomogenität*. Die Differentialgleichung heißt *homogen*, falls $g = 0$ gilt, sonst *inhomogen*. Es gilt das

Superpositionsprinzip: Falls y und z Lösungen einer lineare Differentialgleichung mit möglicherweise verschiedenen Inhomogenitäten sind

$$\begin{aligned} y'(t) + a(t)\,y(t) &= g(t), \\ z'(t) + a(t)\,z(t) &= h(t), \end{aligned}$$

dann löst die Linearkombination

$$w(t) = \alpha y(t) + \beta z(t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

die lineare Differentialgleichung

$$w'(t) + a(t)\,w(t) = \alpha g(t) + \beta h(t).$$

Diese *Superpositionseigenschaft* folgt aus der Linearität der Ableitung und der Linearität der Gleichung.

Wir berechnen zunächst alle Lösungen der homogenen Gleichung.

Satz: Die allgemeine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung

$$x' + a(t)\,x = 0$$

lautet

$$x_{\mathrm{h}}(t) = K\mathrm{e}^{-A(t)}$$

mit $K \in \mathbb{R}$ und einer beliebigen Stammfunktion $A(t)$ von a.

Beweis: Für $x \neq 0$ trennen wir die Variablen

$$\frac{1}{x} \cdot x' = -a(t)$$

und erhalten wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \log|x| = \frac{1}{x}$$

durch Integration die Gleichung

$$\log|x| = -A(t) + C.$$

Daraus folgt

$$|x(t)| = \mathrm{e}^{-A(t)}\mathrm{e}^{C}.$$

Diese Formel zeigt, dass $x(t)$ das Vorzeichen nicht wechseln kann, da die rechte Seite nie Null wird. Deshalb ist $K = \mathrm{e}^{C} \cdot \operatorname{sign} x(t)$ ebenfalls eine Konstante, und die Formel

$$x(t) = \operatorname{sign} x(t) \cdot |x(t)| = K\mathrm{e}^{-A(t)}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

liefert alle Lösungen der homogenen Gleichung. □

Beispiel 2: Die lineare Differentialgleichung

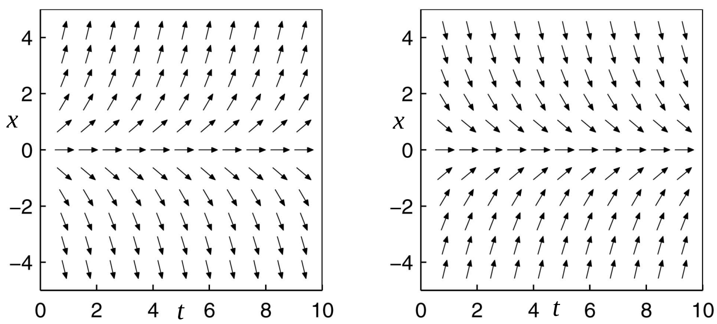
$$\dot{x} = a\,x$$

mit *konstantem* Koeffizienten a besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = K\mathrm{e}^{at}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Konstante K ist beispielsweise durch $x(0)$ bestimmt.

Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $x' = a\,x$ (in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Koeffizienten) zeigt die folgende Abbildung:



Interpretation: Sei $x(t)$ eine zeitabhängige Funktion, welche einen Wachstums- oder Zerfallsprozess beschreibt (Bevölkerungszunahme, -abnahme, Masseveränderung, oder Ähnliches). Wir betrachten das Zeitintervall $[t, t+h]$ mit $h > 0$. Für $x(t) \neq 0$ ist die relative Änderung von x in diesem Zeitintervall gegeben durch

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{x(t)} = \frac{x(t+h)}{x(t)} - 1.$$

Die relative *Änderungsrate* (Änderung pro Zeiteinheit) lautet daher

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{t+h-t} \cdot \frac{1}{x(t)} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h \cdot x(t)}.$$

Bei *idealen* Wachstumsprozessen hängt diese Rate nur von der Zeit t ab. Im Grenzwert $h \to 0$ führt das auf die *momentane relative Änderungsrate*

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h \cdot x(t)} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Somit genügen ideale Wachstumsprozesse der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t)\,x(t).$$

Beispiel 3: (Radioaktiver Zerfall) Sei $x(t)$ die Konzentration einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t. Beim radioaktiven Zerfall ist die Änderungsrate zeitunabhängig und negativ

$$a(t) \equiv a < 0.$$

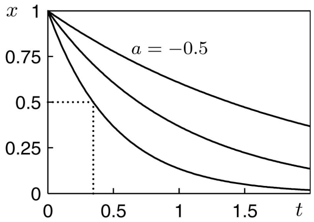
Die Lösung der Gleichung $\dot{x} = a\,x$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$ lautet

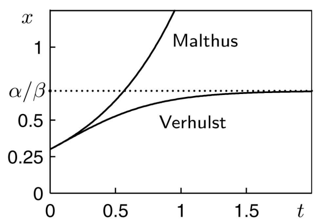
$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\,x_0.$$

Sie ist exponentiell fallend, und es gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, vgl. die Abbildung unten (links). Die *Halbwertszeit* T, in der die Hälfte der Substanz zerfallen ist, ergibt sich aus

$$\frac{x_0}{2} = \mathrm{e}^{aT} x_0 \qquad \text{zu} \qquad T = -\frac{\log 2}{a}.$$

Die Halbwertszeit für $a = -2$ ist in der Abbildung punktiert eingezeichnet.





Beispiel 4: (Bevölkerungsmodelle) Sei $x(t)$ die Größe einer Population zum Zeitpunkt t, modelliert durch $\dot{x} = a\,x$. Wird eine konstante positive Wachstumsrate $a > 0$ vorausgesetzt, so wächst die Population exponentiell an

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\, x_0, \qquad \lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty.$$

Man nennt dieses Verhalten *Gesetz von Malthus*. Das Modell von *Verhulst* berücksichtigt die Beschränktheit von Ressourcen:

$$\dot{x}(t) = \big(\alpha - \beta x(t)\big) \cdot x(t) \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Die populationsabhängige Wachstumsrate im Modell von Verhulst lautet also

$$a(t) = \alpha - \beta x(t)$$

und nimmt *linear* mit zunehmender Bevölkerung ab. Das Modell von Verhulst kann durch Trennen der Variablen gelöst werden. Man erhält

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta + C\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}}$$

und damit unabhängig vom Anfangswert

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\alpha}{\beta},$$

vgl. auch die Abbildung oben (rechts). Die *stationäre* Lösung $x(t) = \alpha/\beta$ ist ein sogenannter *asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt* des Verhulst-Modells.

3 Systeme linearer Differentialgleichungen

Wir beginnen mit der Beschreibung einiger Situationen, die auf Systeme von Differentialgleichungen führen.

Im *Bevölkerungsmodell von Malthus* wird die Änderungsrate einer Bevölkerung $x(t)$ proportional zum momentanen Bevölkerungsstand angenommen:

$$\dot{x}(t) = ax(t).$$

Betrachtet man eine zweite Population $y(t)$, so könnte sich deren Anwesenheit positiv oder negativ auf die Änderungsrate von $x(t)$ auswirken, und umgekehrt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

mit positiven oder negativen Koeffizienten b, c, die die Interaktion der Populationen beschreiben. Dies ist die allgemeine Form eines *linearen Differentialgleichungssystems* in zwei Unbekannten, kurz geschrieben als

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned}$$

Verfeinerte Modelle erhält man, wenn man etwa die Abängigkeit der Wachstumsrate vom Nahrungsvorrat berücksichtigt. Für eine Spezies ergäbe das eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = (v - n)x$$

wobei v den momentan vorhandenen Nahrungsvorrat bezeichnet und n einen Schwellenwert. Die Bevölkerungszahl nimmt also zu, wenn mehr als n Nahrung vorhanden ist, und sonst ab. Im Falle eines Räuber-Beute-Verhältnisses der Spezies x zur Spezies y, in welchem y die Nahrung für x bildet, und unter der Annahme, dass die Anzahl der Begegnungen proportional zu xy ist, erhält man das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (ay - n)x \\ \dot{y} &= dy - cxy. \end{aligned}$$

Dies ist das berühmte *Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra.* Die allgemeine Form eines *Systems nichtlinearer Differentialgleichungen* ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned}$$

Geometrisch kann dies folgendermaßen interpretiert werden. Die rechte Seite definiert ein Vektorfeld

$$(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2$; die linke Seite ist der Geschwindigkeitsvektor einer ebenen Kurve

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen sind demnach ebene Kurven, deren Geschwindigkeitsvektoren in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch das Vektorfeld gegeben sind.

Beispiel 5: (Rotation der Ebene) Die Vektoren des Vektorfelds

$$(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

stehen jeweils senkrecht auf die zugehörigen Ortsvektoren. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems

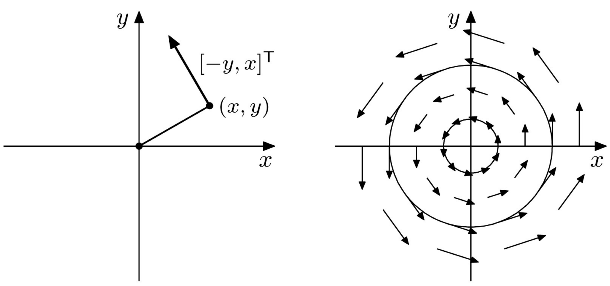
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

sind die Kreisbahnen

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \\ y(t) &= R\sin t, \end{aligned}$$

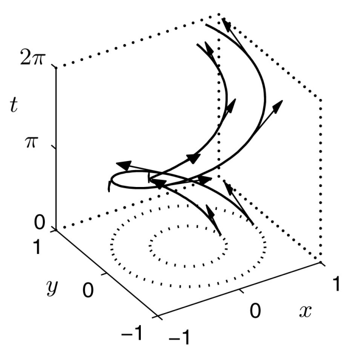
wobei der Radius R durch die Anfangswerte gegeben ist, etwa

$$\begin{aligned} x(0) &= R \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$



Bemerkung: Die geometrische, zweidimensionale Deutung (mit festem Vektorfeld) wird dadurch ermöglicht, dass die rechte Seite des Differentialgleichungssystems nicht explizit von der Zeit t abhängt. Man nennt solche Systeme *autonom*. Wollte man eine Darstellung, die die Zeitachse beinhaltet (wie in Abschnitt 1), so müsste man zu einer dreidimensionalen Graphik übergehen, mit einem dreidimensionalen Richtungsfeld und der Darstellung der Lösung als Raumkurve (Raum-Zeit-Diagramm)

$$(x,y,t) \mapsto \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ t \end{bmatrix}.$$



Bevor wir uns der vollständigen Lösung ebener linearer Differentialgleichungssysteme zuwenden, ist es günstig, ein paar Sprechweisen zur qualitativen Beschreibung von Lösungskurven einzuführen. Die Aufgabe, eine Lösung eines Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(x(t), y(t)\big) \\ \dot{y}(t) &= g\big(x(t), y(t)\big) \end{aligned}$$

zu finden, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ durch einen vorgegebenen Punkt

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

geht, bezeichnet man wieder als *Anfangswertproblem.* Wir setzen die Funktionen f und g in diesem Abschnitt zumindest als stetig voraus.

Unter einer *Lösungskurve* oder *Trajektorie* verstehen wir ein differenzierbare Kurve $t \mapsto [x(t)\ y(t)]^\mathsf{T}$, deren Komponenten das Differentialgleichungssystem erfüllen. Es folgt dann aus den beiden Gleichungen, dass die Ableitungen $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ stetige Funktionen der Zeit sind.

Definition: (Gleichgewichtspunkte) Ein Punkt (x^*, y^*) heißt *Gleichgewichtspunkt* oder *Equilibrium* des Differentialgleichungssystems, falls sowohl $f(x^*, y^*) = 0$ als auch $g(x^*, y^*) = 0$ ist.

Die Bezeichnung rührt daher, dass eine Lösung mit Anfangswert $x_0 = x^*$, $y_0 = y^*$ für alle Zeiten im Punkt (x^*, y^*) verbleibt; mit anderen Worten, ist (x^*, y^*) Gleichgewichtspunkt, so ist $x(t) = x^*$, $y(t) = y^*$ Lösung des Differentialgleichungsystems.

Lösungen von Differentialgleichungen müssen nicht für beliebig lannge Zeitintervalle existieren. Tun sie dies jedoch für Anfangswerte in der Nähe eines Gleichgewichtspunkts, so sind die folgenden Begriffe sinnvoll.

Definition: Sei (x^*, y^*) ein Gleichgewichtspunkt. Falls es eine Umgebung U von (x^*, y^*) gibt, sodass alle Trajektorien mit Anfangswerten x_0, y_0 in U für $t \to \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) konvergieren, so heißt dieser *asymptotisch stabil.* Falls es zu jeder Umgebung V von (x^*, y^*) eine Umgebung W von (x^*, y^*) gibt, sodass alle Trajektorien mit Anfangswerten x_0, y_0 in W zur Gänze in V bleiben, so heißt der Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) *stabil.* Ein Gleichgewichtspunkt, der nicht stabil ist, wird als *instabil* bezeichnet.

Kurz gesagt bedeutet Stabilität, dass Trajektorien, die nahe des Gleichgewichtspunkts starten, stets in der Nähe des Gleichgewichtspunkts bleiben; asymptotische Stabilität heißt, dass die Trajektorien vom Gleichgewichtspunkt *angezogen* werden. Im Falle eines instabilen Gleichgewichtspunkts gibt es Trajektorien, die sich vom Gleichgewichtspunkt entfernen; bei linearen Systemen sind diese Trajektorien unbeschränkt, im nichtlinearen Fall können sie auch gegen einen anderen Gleichgewichtspunkt oder eine periodische Lösung konvergieren.

Im Folgenden leiten wir die Lösung des Anfangswertproblems für zweidimensionale Systeme linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \qquad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= cx + dy, \qquad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

her. Dazu diskutieren wir zunächst die drei Grundtypen dieser Systeme und zeigen dann, wie beliebige Systeme in diese Grundtypen transformiert werden können. Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

so wird die entscheidende Frage sein, ob $\mathbf{A}$ einer Matrix $\mathbf{B}$ vom Typ I, II oder III ähnlich ist (das heißt, $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ für eine gewisse invertierbare Matrix $\mathbf{T}$).

Typ I – reelle Eigenwerte, diagonalisierbare Matrix. In diesem Fall ist die Standardform des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x, \qquad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= \beta y, \qquad y(0) = y_0. \end{aligned}$$

Von früher wissen wir, dass die Lösungen gegeben sind durch

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha t}, \quad y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\beta t}$$

und insbesondere für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existieren. Offenbar ist $(x^*, y^*) = (0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt. Falls $\alpha < 0$ und $\beta < 0$ ist, so nähern sich alle Lösungskurven für $t \to \infty$ dem Gleichgewichtspunkt $(0,0)$; dieser ist asymptotisch stabil. Falls $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ (nicht beide gleich Null), so entfernen sich die Lösungskurven aus jeder Umgehung von $(0,0)$. Dieser Punkt ist dann ein instabiles Gleichgewicht. Ebenso liegt im Falle $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (oder umgekehrt) Instabilität vor, wobei man in diesem Fall von einem *Sattelpunkt* spricht. Falls $\alpha \neq 0$ und $x_0 \neq 0$ ist, kann man nach t auflösen und die Lösungskurven als Funktionsgraphen darstellen:

$$\mathrm{e}^t = \Big(\frac{x}{x_0}\Big)^{1/\alpha}, \quad y = y_0\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^{\beta/\alpha}.$$

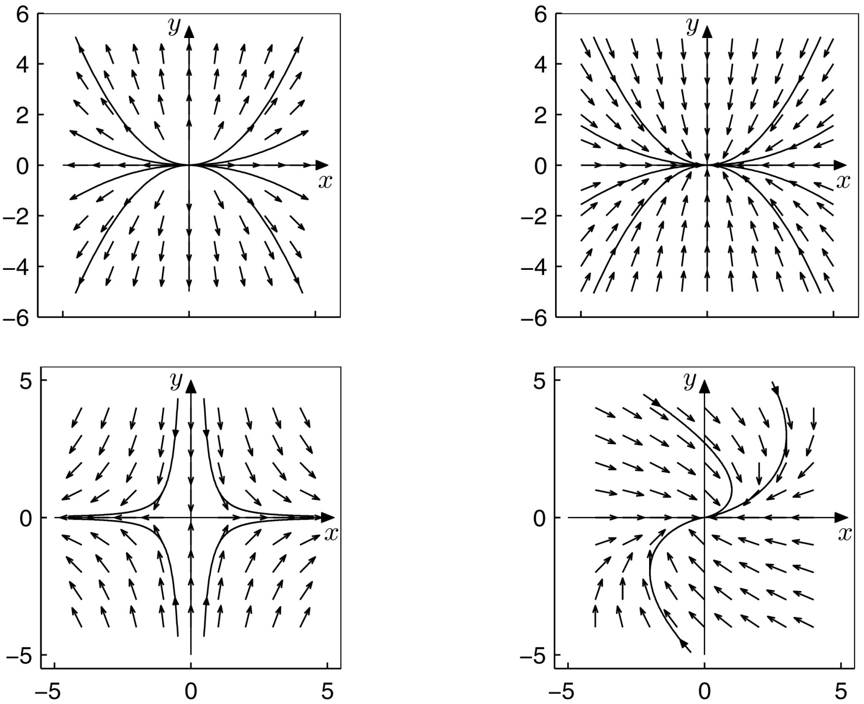
Beispiel 6: Die drei Systeme

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \dot{x} &=& x, & \quad & \dot{x} &=& -x, & \quad & \dot{x} &=& x, \\ \dot{y} &=& 2y, & & \dot{y} &=& -2y, & & \dot{y} &=& -2y \end{array}$$

besitzen die jeweiligen Lösungen (Bild 1, 2, 3 unten)

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} x(t) &=& x_0\mathrm{e}^t, & \quad & x(t) &=& x_0\mathrm{e}^{-t}, & \quad & x(t) &=& x_0\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(t) &=& y_0\mathrm{e}^{2t}, & & y(t) &=& y_0\mathrm{e}^{t}, & & y(t) &=& y_0\mathrm{e}^{-2t}. \end{array}$$

Man erkennt, dass die Koordinatenhalbachsen Lösungskurven sind.



Typ II – doppelter reeller Eigenwert, nicht diagonalisierbar. Der Fall eines doppelten reellen Eigenwerts $\alpha = \beta$ ist einerseits ein Spezialfall von Typ I, wenn die Koeffizientenmatrix diagonalisierbar ist. Es gibt jedoch den Sonderfall des doppelten Eigenwerts und eines *nilpotenten* Anteils. Dann ist die Standardform des Systems

$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{x} &=& \alpha x + y, & \quad & x(0) &=& x_0, \\ \dot{y} &=& \alpha y, & & y(0) &=& y_0. \end{array}$$

Wir berechnen zunächst die Lösungskomponente

$$y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\alpha t},$$

setzen diese in der ersten Zeile ein:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + y_0 \mathrm{e}^{\alpha t}, \quad x(0) = x_0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist (Bild 4 oben)

$$x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\Big(x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s} y_0 \mathrm{e}^{\alpha s} \mathrm{d}\, s\Big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(x_0 + t y_0\big).$$

Typ III – konjugiert komplexe Eigenwerte. In diesem Fall ist die Standardform des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta y, \qquad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y, \qquad y(0) = y_0. \end{aligned}$$

Führen wir die komplexe Variable z und die komplexen Koeffizienten γ, z_0 gemäß

$$z = x + \mathrm{i}\, y, \quad \gamma = \alpha + \mathrm{i}\, \beta, \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$$

ein, so sieht man, dass das obige System Real- und Imaginärteil der Gleichung

$$(\dot{x} + \mathrm{i}\, \dot{y}) = (\alpha + \mathrm{i}\, \beta)(x + \mathrm{i}\, y), \quad x(0) + \mathrm{i}\, y(0) = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$$

darstellt. Geschrieben in rein komplexer Form

$$\dot{z} = \gamma z, \quad z(0) = z_0,$$

lässt sich die zugehörige Lösung sofort angeben:

$$z(t) = z_0 \mathrm{e}^{\gamma t}.$$

Spaltet man linke und rechte Seite in Real- und Imaginärteil auf, so erhält man

$$\begin{aligned} x(t) + \mathrm{i}\, y(t) &= (x_0 + \mathrm{i}\, y_0)\, \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\, \beta) t} \\ &= (x_0 + \mathrm{i}\, y_0)\, \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos \beta t + \mathrm{i} \sin \beta t). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

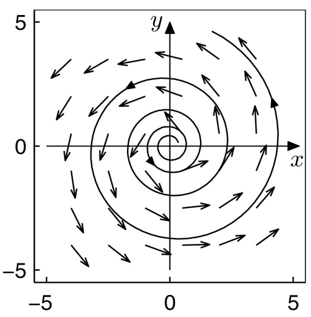
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t - y_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t, \\ y(t) &= x_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t + y_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t. \end{aligned}$$

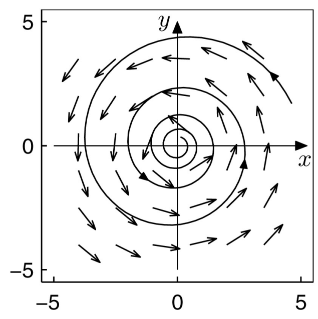
Der Punkt $(x^*, y^*) = (0, 0)$ ist wieder ein Gleichgewichtspunkt, der im Falle $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, im Falle $\alpha > 0$ instabil ist. Im Falle $\alpha = 0$ handelt es sich um ein stabiles, aber nicht asymptotisch stabiles Gleichgewicht, da die kreisförmigen Lösungskurven zwar beschränkt sind, sich aber dem Ursprung für $t \to \infty$ nicht nähern.

Beispiel 7: Die Vektorfelder und Lösungskurven für die zwei Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{1}{10} x - y, \qquad & \dot{x} &= -\tfrac{1}{10} x - y, \\ \dot{y} &= x + \tfrac{1}{10} y, \qquad & \dot{y} &= x - \tfrac{1}{10} y \end{aligned}$$

sind den Abbildungen unten zu entnehmen.





Die allgemeine Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems erhält man durch Transformation auf ein Koordinatensystem, in dem die Koeffizientenmatrix eine der drei Standardformen besitzt.

Satz: Das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

besitzt für beliebige (2×2)-Matrizen $\mathbf{A}$ eine eindeutige, für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existierende Lösung. Diese kann explizit durch Rückführung mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf einen der Typen I, II oder III berechnet werden.

Beweis: Nach eine Satz aus der Linearen Algebra gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbf{T}$ so, dass

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}$$

ist, wobei $\mathbf{B}$ einem der Standardtypen I, II, III angehört. Wir setzen

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen dieses Differentialgleichungssystem je nach Typ I, II oder III, wie oben ausgeführt. Die Lösungen der Systeme in Standardform sind eindeutig und existieren für alle Zeiten. Die Rücktransformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

ergibt die Lösung des ursprünglichen Systems. □

Somit beinhalten die Typen I, II, III bis auf einen Basiswechsel tatsächlich alle Fälle, die auftreten können.

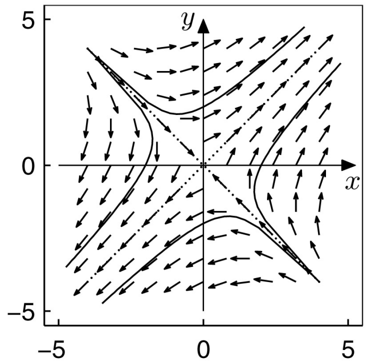
Beispiel 8: Wir untersuchen die Lösungskurven des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 2x + y. \end{aligned}$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{e}_1 = [1\ 1]^\mathsf{T}, \mathbf{e}_2 = [-1\ 1]^\mathsf{T}$. Es handelt sich um Typ I, der Ursprung ist ein Sattelpunkt.



4 Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen

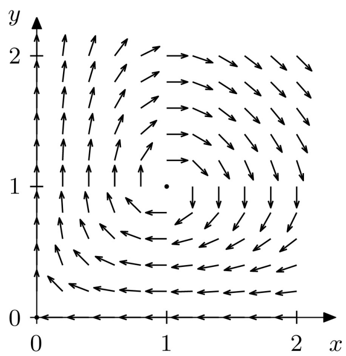
Im Gegensatz zu linearen Differentialgleichungssystemen lassen sich die Lösungen zu nichtlinearen Systemen in der Regel nicht durch explizite Formeln ausdrücken. Neben numerischen Lösungsverfahren ist die qualitative Theorie von Interesse, die das Verhalten der Lösungen beschreibt, ohne diese explizit anzugeben.

Das Lotka-Volterra-Modell. Im vorigen Abschnitt wurde das Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra vorgestellt. Zu Vorführzwecken setzen wir alle Koeffizienten zu Eins. Damit wird das System zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y-1) \\ \dot{y} &= y(1-x). \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(x^*, y^*) = (1,1)$ und $(x^{**}, y^{**}) = (0,0)$. Offenbar sind die Koordinatenhalbachsen Lösungskurven mit zugehörigen Lösungen

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-t},\ y(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad x(t) = 0,\ y(t) = y_0 \mathrm{e}^{t}.$$



Der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ ist somit ein Sattelpunkt (instabil); den Typ des Gleichgewichtspunkts $(1,1)$ werden wir später analysieren.

In der Folge betrachten wir nur den im biologischen Modell relevanten ersten Quadranten $x \geq 0$, $y \geq 0$. Entlang der Geraden $x = 1$ ist das Vektorfeld waagrecht, entlang der Geraden $y = 1$ senkrecht. Es sieht also so aus, als ob die Lösungskurven um den Gleichgewichtspunkt $(1, 1)$ zirkulieren.

Um dies überprüfen zu können, suchen wir eine Funktion $H(x, y)$, die längs der Lösungskurven konstant ist:

$$H(x(t), y(t)) = C.$$

Eine solche Funktion heißt *Erstes Integral, Invariante* oder *Erhaltungsgröße des Differentialgleichungssystems.* Demnach muss gelten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 0$$

oder nach der Kettenregel für Funktionen zweier Variabler

$$\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = 0.$$

Machen wir (versuchsweise) den Ansatz

$$H(x, y) = F(x) + G(y),$$

so muss gelten

$$F'(x)\dot{x} + G'(y)\dot{y} = 0.$$

Aus den Differentialgleichungen erhalten wir

$$F'(x)\, x(y - 1) + G'(y)\, y(1 - x) = 0.$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{x\, F'(x)}{x - 1} = \frac{y\, G'(y)}{y - 1}.$$

Da die Variablen x und y voneinander unabhängig sind, geht dies nur, wenn beide Seiten konstant sind:

$$\frac{x\, F'(x)}{x - 1} = C, \quad \frac{y\, G'(y)}{y - 1} = C.$$

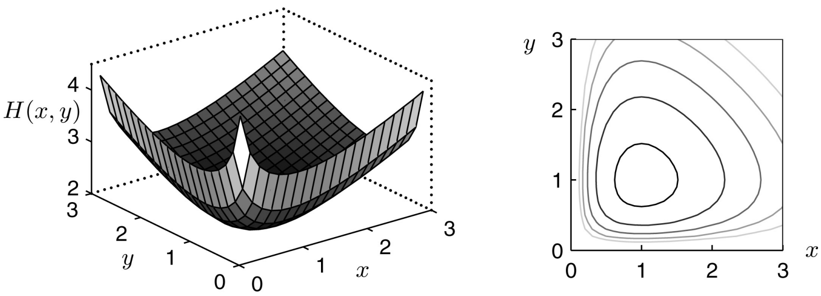
Es folgt

$$F'(x) = C\left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad G'(y) = C\left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

und damit

$$H(x, y) = C(x - \log x + y - \log y) + D.$$

Diese Funktion hat ein absolutes Minimum in $(x^*, y^*) = (1, 1)$, wie aus der Abbildung ersichtlich.

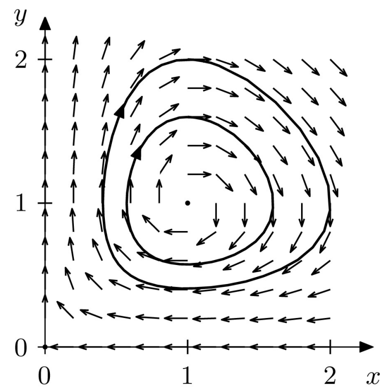


Die Lösungskurven des Lotka-Volterra-Systems liegen auf den Niveaulinien

$$x - \log x + y - \log y = \text{const.}$$

Diese Niveaulinien sind offenbar geschlossene Kurven. Man kann zeigen, dass auch die Lösungskurven geschlossen sind, die Lösungen somit periodisch sind. Periodische, geschlossene Lösungskurven nennt man *periodische Orbits*.

Die Bevölkerungszahlen von Räuber und Beute schwanken also periodisch und gegenläufig.



Weitere Ausführungen zu Differentialgleichungen und ebenen dynamischen Systemen finden Sie in den Abschnitten 19, 20 und 21 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.