15. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

15.1. Einführung

Ereignisse sind oft nicht genau vorhersagbar. Man weiß vorher nicht sicher, ob sie eintreten werden. Solche Ereignisse nennt man zufällig.

***Beispiele**:*

Münzwurf (Kopf oder Zahl)
Roulette
Brenndauer einer Glühbirne
Wettervorhersagen
Unfälle in einem bestimmten Zeitraum
Unfälle auf einem bestimmten Streckenabschnitt

Das **Maß für die Erwartung,** mit der ein beliebiges Ereignis E eintritt, nennt man **Wahrscheinlichkeit P(E)**. (P ... probability, engl.)

Die Angabe einer konkreten Zahl für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist problematisch, da es bis jetzt keine eindeutige mathematische Definition von Wahrscheinlichkeit gibt. Es gibt nur für gewisse Fälle Regeln, wie man Ereignissen sinnvolle Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann.

Das Angeben von Wahrscheinlichkeiten ist daher am ehesten mit dem physikalischen Messen einer Größe vergleichbar. Der Meßwert ist immer mit einem bestimmten Meßfehler behaftet und hängt immer von den Meßmethoden bzw. vom Informationsstand ab.

Es ist sogar umstritten, ob es überhaupt einen objektiv existierenden genauen Wert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt. Somit ist die Annahme eines Wertes für die Wahrscheinlichkeit eine nützliche Fiktion, um damit weitere Aussagen berechnen zu können.

Ausgangspunkt für die Wahrscheinlichkeitstheorie war die Theorie der Glückspiele, die von Blaise PASCAL begründet und von Jakob BERNOULLI (1654-1705) sowie von Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827) weiterentwickelt wurde und schließlich zur nachstehenden Wahrscheinlichkeitsdefinition führte.

Laplace Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E (klassische Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil): $P(E) = \dfrac{\text{Anzahl der für E günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$

Diese Definition gilt nur unter bestimmten Voraussetzungen und für nur für bestimmte Ereignistypen. Sie ist aber für ein erstes Verständnis für den Begriff der Wahrscheinlichkeit sehr zweckmäßig. Auf die genaueren Randbedingungen wird im Verlauf der weiteren Abschnitte noch im Detail eingegangen.

***Beispiel**:* *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine ungerade Zahl zu erhalten.*

Ermitteln der günstigen Fälle: $G = \{1;3;5\}; z(G) = 3$

Ermitteln der möglichen Fälle: $M = \{1;2;3;4;5;6\};\ z(M) = 6$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $P(E) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Die Wahrscheinlichkeit ist 0,5; das entspricht 50%.

Das Ergebnis im obigen Beispiel ist leicht ohne mathematische Mittel nachvollziehbar. In vielen Fällen - man denke an das Zahlenlotto 6aus 45 - ist es nicht oder nur mit großem Aufwand möglich, die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle zu ermitteln, z.B. die Anzahl der richtigen Dreier.

Daher beschäftigt sich der erste Abschnitt in diesem Kapitel mit dem Ermitteln derartiger Anzahlen, mit der sogenannten Kombinatorik. Die Kombinatorik ist „die Kunst des Zählens ohne tatsächlich zu zählen“ und ist somit ein Hilfsmittel für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vor allem bei mehrstufigen Versuchen - d.h. Versuchen, die aus mehreren Teilversuchen bestehen, die nacheinander oder gleichzeitig durchgeführt werden - treten oft verschiedene Ereignisse auf mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit. Für die Angabe der Wahrscheinlichkeit ist die Kenntnis der genauen Zahl aller möglichen Ereignisse nötig. Das Aufschreiben und Abzählen aller Ereignisse ist aber besonders bei großer Versuchszahl überaus mühsam und kann wesentlich einfacher durch kombinatorische Formeln ersetzt werden.

15.2. Kombinatorik

(a) Der Begriff „Faktorielle“

Da Berechnungen im Rahmen der Kombinatorik immer wieder zu einer bestimmten Produktbildung führen, soll die folgende vereinfachte Schreibweise am Beginn dieses Abschnitts stehen.

Das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=\prod_{i=1}^{n} i=n!$ heißt „**n Faktorielle**“ oder „**n Fakultät**“.

Beispiel: *6! = 6·5·4·3·2·1=720*

Taschenrechner mit x! - Taste können üblicherweise bis 69! rechnen; 70! ist bereits eine so große Zahl, daß sie auch unter Zuhilfenahme der Exponentialschreibweise auf Taschenrechnern nicht mehr ausgegeben werden kann.

Definition: $0!=1$ Satz: $n\cdot(n-1)!=n!$

Beweis des Satzes: l.S.: $(n-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1); n\cdot(n-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$

r.S.: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$ und daher l.S. = r.S.

Beispiel: *Zeigen Sie, daß* $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\frac{n}{n+2}$ *gilt.*

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$$

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\frac{n!\cdot[n+1-1]}{n!\cdot[n+1+1]}=\frac{n}{n+2}$$

Beispiel: *Berechnen Sie* $\frac{95!}{93!}$

$$\frac{95\cdot 94\cdot 93!}{93!}=95\cdot 94=8930$$

(b) Permutationen

Permutationen (permutare, lat. ... vertauschen) sind Vertauschungen von Elementen. Abhängig davon, ob die Elemente alle unterschiedlich sind oder nicht, spricht man von Permutationen mit oder ohne Wiederholung.

1. Fall: Permutation von n verschiedenen (d.h. unterscheidbaren) Elementen

***Beispiel**: Wieviele Möglichkeiten gibt es, 10 Personen in einer Reihe aufzustellen?*

Für den ersten Platz stehen 10 Personen zur Verfügung	*10 Möglichkeiten*
Für den zweiten Platz stehen 9 Personen zur Verfügung	*9 Möglichkeiten*
Für den dritten Platz stehen 8 Personen zur Verfügung	*8 Möglichkeiten*
...	...
Für den zehnten (letzten) Platz steht nur noch 1 Person zur Verfügung	*1 Möglichkeit*
Insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ verschiedene Möglichkeiten	*Es gibt10! Möglichkeiten*

Die Tatsache, daß es sich um Permutationen lauter verschiedener Elemente handelt, bezeichnet man als Permutation ohne Wiederholung.

Die Anzahl der **Permutationen** von n Elementen **ohne Wiederholung** ist $P_n = n!$

2. Fall: Permutation von n Elementen, von denen jeweils k_1, k_2, ... k_m nicht unterscheidbar sind

***Beispiel**: 7 Männer, 4 Frauen und 5 Kinder sollen unterschiedlich in einer Reihe aufgestellt werden, wobei nicht zwischen den einzelnen Männern, Frauen und Kindern unterschieden werden soll.*

$$n = 7 + 4 + 5 = 16$$

Bei dieser Aufgabe sind nicht alle $16! = 2{,}092279 \cdot 10^{13}$ Möglichkeiten der Anordnung wirklich verschieden, denn es gibt 7! Möglichkeiten, bei denen nur die Männer untereinander Plätze tauschen und somit nicht die Gesamtanordnung von Männern in Platzbezug auf Frauen und Kinder geändert wird. Analoges gilt für 4! Möglichkeiten der Frauenplatzwechsel und 5! Möglichkeiten des Kinderplatzwechsels.

Es gibt also „nur“

$$\frac{16!}{7!\cdot 4!\cdot 5!} = 1441440$$

mögliche Anordnungen von Männern, Frauen und Kindern, die in dieser Aufgabe wirklich als verschieden anzusehen sind.

Gilt $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, so gibt es also $\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}$ verschiedene Permutationen, wenn sich Elemente wiederholen.

Die Anzahl der **Permutationen** von n Elementen **mit Wiederholung** ist

$$^{k_1,k_2,\ldots,k_m}P_n = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!} \quad \text{mit } k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Permutationen typisch:

- Aus n Elementen werden alle n Elemente einbezogen „n aus n“
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist entscheidend „Reihenfolge: ja“
- Abhängig von der Unterscheidbarkeit der Elemente gibt es Permutationen mit und ohne Wiederholungen „Wiederholung: ja / nein“

(c) Variationen

Will man aus einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen geordnete Stichproben bestehend aus k Elementen entnehmen, so spricht man von Variationen. Abhängig davon, ob die einzelnen Elemente zwischen den Ziehungen zurückgelegt werden, spricht man von Variationen mit oder ohne Wiederholungen.

1. Fall: Variationen ohne Wiederholung

***Beispiel**:* *In einem Verein sollen aus 20 Personen die Ämter des Obmanns, des Stellvertreters, des Schriftführers und des Kassiers besetzt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es?*

Für den Obmann gibt es anfangs 20 Möglichkeiten aus den 20 Personen zu wählen. Da es keine Doppelbesetzungen geben kann, gibt es für den Stellvertreter nun nur noch 19 Möglichkeiten, dann weiterführend für den Schriftführer nur noch 18 Möglichkeiten und letztendlich für das Amt des Kassiers stehen noch 17 Personen zur Verfügung. Es gibt als 20·19·18·17 = 116280 Möglichkeiten zur Besetzung der Posten.

Verwendet man die Fakulätsschreibweise, ergibt sich: $$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \frac{20!}{16!} = \frac{20!}{(20-4)!}$$

Will man aus einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen geordnete Stichproben bestehend aus k (k<n) Elementen entnehmen und legt die Entnommenen nicht zurück, so gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene geordnete Stichproben vom Umfang k.

Die Zahl der **Variationen** von k Elementen aus n Elementen **ohne Wiederholung** ist:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Fall: Variationen ohne Wiederholung

Beispiel: *Aus einer Gruppe von 10 Personen sollen für 3 kleinere Aufgaben einzelne Personen ausgewählt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn theoretisch auch ein und dieselbe Person alle 3 Aufgaben übernehmen kann?*

Für die erste Aufgabe gibt es 10 Möglichkeiten aus den 10 Personen zu wählen. Für die zweite Aufgabe kann wieder aus allen 10 Personen gewählt werden, es gibt es wieder 10 Möglichkeiten. Da jede der ersten 10 Möglichkeiten mit den zweiten 10 Möglichkeiten kombiniert werden kann, gibt es bis hierher also 10·10 = 100 Möglichkeiten. Da es für die dritte Aufgabe wieder 10 Möglichkeiten gibt, können die 100 bisherigen Fälle mit jeder dieser 10 letzten Möglichkeiten kombiniert werden. Insgesamt gibt es also 10·10·10 = 10^3 = 1000 Möglichkeiten.

Es gibt 1000 Möglichkeiten.

Die Zahl der **Variationen** von k Elementen aus n Elementen mit Wiederholungen ist:

$$^{w}V_n^k = n^k$$

***Beispiel**:* *Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Totoschein auszufüllen?*

3 „Elemente“ = Tips: Tip 1; Tip 2; Tip X; n=3
12 „Stichproben“ = Spiele; k=12
3^{12} = 531441 Möglichkeiten

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Variationen typisch:
- Aus n Elementen werden k Elemente einbezogen „k aus n“
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist entscheidend „Reihenfolge: ja“
- Abhängig von der Möglichkeit des mehrmaligen Vorkommens der Elemente gibt es Variationen mit und ohne Wiederholungen „Wiederholung: ja / nein“

(d) Kombinationen

Bei ungeordneter Stichprobe kommt es nicht auf die Reihenfolge der ausgewählten Elemente an, d.h. die Auswahl „a-b-c“ ist identisch mit der Auswahl „b-a-c“ oder „a-c-b“ usw. Eine Stichprobe dieser Art bezeichnet man als Kombination. Abhängig davon, ob die einzelnen Elemente zwischen den Ziehungen zurückgelegt werden, spricht man von Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen.

1. Fall: Kombinationen ohne Wiederholung

Die Zahl der Variationen von k Elementen aus n Elementen ist durch V_n^k gegeben. Ist nun die Reihenfolge der Anordnung der k Elemente nicht wesentlich, so sind all jene Variationen ident, die aus denselben k Elementen bestehen. Bei k ausgewählten verschiedenen Elementen gibt es k! Möglichkeiten, diese Elemente zu vertauschen (permutieren). Daher bestimmen jeweils k! geordnete Stichproben ein und dieselbe ungeordnete Stichprobe. Dividiert man also die Zahl der Variationen durch k!, so erhält man die Zahl der entsprechenden Kombinationen und daher $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Die Zahl der **Kombinationen** von k Elementen aus n Elementen **ohne Wiederholung** ist:

$$K_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

***Beispiel**:* *6 Personen sitzen bei einer Tischrunde und trinken Sekt. Wie oft klingen die Gläser, wenn sie einander alle zuprosten?*

Es werden jeweils Stichproben vom Umfang 2 ohne Wiederholung ausgewählt, da je zwei Personen miteinander anstoßen, aber niemand mit sich selbst. Außerdem gilt „a-b“ ist „b-a“ und es handelt sich daher um eine ungeordnete Stichprobe mit n = 6, k = 2: $K_6^2 = \frac{6!}{7!4!} = 15$

Die Gläser klingen 15 mal.

Den Bruch $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ schreibt man der Kürze wegen oft auch als $\binom{n}{k}$ (gesprochen: „n über k“) und nennt diesen Ausdruck **Binomialkoeffizient**, worauf im Abschnitt „Binomischer Lehrsatz“ näher eingegangen wird.

Binomialkoeffizient: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$	Satz: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Beweis des Satzes: l.S.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$; r.S.: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; l.S. = r.S.

***Beispiel**:* *Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen „6 aus 45“-Lottoschein auszufüllen?*

Die Reihenfolge der 6 gezogenen Kugeln ist egal (ungeordnete Stichprobe). Die einzelnen Kugeln werden nicht zurückgelegt (ohne Wiederholung). Daher ist n=45, k=6: $K_{45}^6 = \binom{45}{6} = \frac{45!}{39!6!} = 8145060$

Es gibt 8145060 Möglichkeiten.

***Beispiel**:* *Wieviele richtige Dreier kann es nach einer Lottoziehung geben?*

Es stellt sich also vorerst die Frage, auf wieviele Arten man 3 Zahlen aus den 6 richtigen ziehen kann. Diese Anzahl kann man mit allen Möglichkeiten kombinieren, die es gibt, um die weiteren 3 Zahlen aus den verbleibenden 39 unrichtigen Zahlen. Die gesuchte Anzahl ist daher: $\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 20 \cdot 9139 = 182780$

Es gibt 182780 mögliche Dreier.

2. Fall: Kombinationen mit Wiederholung

Den Fall einer ungeordneten Stichprobe aus einer Gesamtheit von n Elementen mit Zurücklegen kann man auf den Fall einer ungeordneten Stichprobe aus einer größeren Gesamtheit ohne Zurücklegen zurückführen.

Zieht man nämlich aus einer Gesamtheit von n Elementen k mal mit Zurücklegen, so muß man k–1 Mal das gezogene Element wieder zurücklegen, um dieselbe Ausgangsgesamtheit wieder herzustellen. Es ist daher gedanklich sinnvoll, von Anfang an k–1 zusätzliche Elemente der Gesamtheit hinzuzufügen und k Mal aus dieser neuen Gesamtheit ohne Zurücklegen zu ziehen. Die neue Gesamtzahl beträgt dann n+k–1.

Die Zahl der **Kombinationen** von k Elementen aus n Elementen **mit Wiederholung** ist:

$$^{w}K_{n}^{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

***Beispiel**:* *Wieviele Wurfkombinationen sind beim Würfeln mit zwei gleichartigen Würfeln möglich?*

Ermittlung durch Aufzählen:

6-6
5-5 5-6
4-4 4-5 4-6
3-3 3-4 3-5 3-6
2-2 2-3 2-4 2-5 2-6
1-1 1-2 1-3 1-4 1-5 1-6

Berechnung als ungeordnete Stichprobe mit n = 6, k = 2 mit mit Wiederholung:

$$^{w}K_{6}^{2} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Kombinationen typisch:
- Aus n Elementen werden k Elemente einbezogen „k aus n“
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist nicht entscheidend „Reihenfolge: nein“
- Abhängig von der Möglichkeit des mehrmaligen Vorkommens der Elemente gibt es Kombinationen mit und ohne Wiederholungen „Wiederholung: ja / nein“

(e) Binomischer Lehrsatz

Der Binomische Lehrsatz befaßt sich mit den Potenzen von Binomen, d.h. dem Ausrechnen des Ausdrucks $(a+b)^n$ und den dabei auftretenden Koeffizienten.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Schreibt man nun nur die Koeffizienten unter Weglassen der Ausdrücke $a^i\,b^k$ untereinander, so erhält man das sogenannte **Pascalsche Dreieck** (nach Blaise Pascal 1623-1662):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Es ergeben sich dabei die einzelnen Zahlen der jeweils folgenden Zeile als Summe der zwei darüber stehenden Zahlen. Die Produkte $a^i\,b^k$ bestehen aus n Faktoren, nämlich i Faktoren vom Wert a und k Faktoren vom Wert b:

$$a^i b^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{i-mal} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k-mal}$$

Die Koeffizienten vor diesen Produkten geben die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, bei denen der Faktor a i-Mal und der Faktor b k-Mal auftritt, z.B. bedeutet $6a^2b^2$, daß es die 6 Möglichkeiten „aabb, abba, abab, baba, baab, bbaa“ gibt.

Die Anzahl dieser Möglichkeiten ist die Anzahl einer Permutation mit Wiederholung; d.h. n = 4 Elemente, wobei jeweils 2 und 2 Elemente nicht unterscheidbar sind, also $k_1 = 2$ und $k_2 = 2$. Daher gilt in diesem Fall:

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Allgemein gilt daher, daß es im Falle $a^i b^k$ mit i+k = n die Zahl $\frac{n!}{i!\cdot k!}$ an möglichen Produkten gibt. Da i = n–k gilt, läßt sich diese Anzahl (also der Koeffizient von $a^i b^k$) auch umformen zu: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Den Ausdruck $\binom{n}{k}$ (gesprochen: „n über k“) nennt man **Binomialkoeffizient**, weil er zum Berechnen der Koeffizienten beim Potenzieren eines Binoms dient. Das Pascalsche Dreieck kann daher auch mit Hilfe der Binomialkoeffizienten angeschrieben werden:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Auf diese Art läßt sich leicht eine allgemeine Formel für $(a+b)^n$ angeben:

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Es gilt immer $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Daher ist das Pascalsche Dreieck symmetrisch.

***Beispiel**:* *Eine Münze hat zwei Seiten: Kopf (K) und Zahl (Z). Wieviele Möglichkeiten gibt es, bei 20 Münzwürfen genau 3 mal die Zahlseite zu werfen?*

Es ist somit die Anzahl der Ergebnisse mit 3 mal Z und 17 mal K, also die Produkte Z^3K^{17}, gesucht. Daher ist n = 20, k = 17 und es ergibt sich: $\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{17!\,3!} = 1140$

Es gibt 1140 Möglichkeiten.

15.3. Begriff der Wahrscheinlichkeit

(a) Begriff der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde bereits die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit angeführt.

Laplace Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E (klassische Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil): $P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$

Anders formuliert bedeutet das: Es sei M eine endliche Menge (Grundmenge) und $G \subseteq M$ (G Teilmenge von M). Als Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein aus M zufällig ausgewähltes Element zu G gehört, kann man den relativen Anteil von G in M nehmen.

$$P\text{ (das zufällig ausgewählte Element gehört zu M)} = \frac{z(G)}{z(M)}$$

z(G) ... Anzahl der Elemente von G; z(M) ... Anzahl der Elemente von M

Da z(G) kleiner als z(M) folgt daraus: $0 \le P(E) \le 1$

Für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines beliebigen Ereignisses E gilt: $0 \le P(E) \le 1$

***Beispiel**:* *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem üblichen Spielwürfel einen 2er oder 6er zu würfeln?*

Ermitteln der günstigen Fälle: $G = \{2;6\};\ z(G) = 2$

Ermitteln der möglichen Fälle: $M = \{1;2;3;4;5;6\};\ z(M) = 6$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $P(E) = \frac{2}{6} = 0{,}33$

Die Wahrscheinlichkeit ist 0,33; das entspricht 33%.

Die obige Wahrscheinlichkeits-„Definition“ gilt jedoch nur unter einer ganz bestimmten **Voraussetzung**, nämlich, daß alle Einzelereignisse gleichmöglich und daher also gleichwahrscheinlich sind.

Solche gleichwahrscheinliche Ereignisse treten in sogenannten Laplace-Experimenten auf und werden üblicherweise mit Zufallsgeräten (Laplace-Geräten) erzielt, wie sie bei Glücksspielen verwendet werden; z.B. Würfel; Roulette; gleichartige Zettel in einer Losurne; gleichartige Kugeln beim Lotto „6 aus 45"; Glücksrad usw.

Bei einem **Laplaceschen Experiment** tritt jedes der n ($n \geq 2$; $n \in N$) möglichen Versuchsergebnisse E mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $P(E) = \frac{1}{n}$ auf.

Beispiele: *Würfel mit 6 möglichen Ergebnissen.*

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Lotto mit 45 Kugeln

$$P(1) = P(2) = \ldots = P(44) = P(45) = \frac{1}{45}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Totoschein richtig (Totozwölfer) auszufüllen, wenn man von Fußball keine Ahnung hat?

Es gibt $3^{12} = 531441$ (siehe vorigen Abschnitt) Möglichkeiten einen Totoschein auszufüllen, die alle gleich wahrscheinlich sind. Da nur eine Möglichkeit richtig ist, gilt:

$$P(Totozwölfer) = \frac{1}{531441} = 1{,}881676 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,00188$$

Jemand hat einen schwarzen Socken an und versucht im finsteren Zimmer aus einer Lade, in der völlig durcheinander 9 schwarze, 8 blaue und 10 braune Socken liegen, den richtigen herauszunehmen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ihm das gelingen?

Jede Wahl (Zug) eines der 27 Socken ist gleich wahrscheinlich; 9 schwarze Socken sind günstige Fälle.

$$P(schwarz) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0{,}\dot{3} \mathrel{\hat{=}} 33{,}\dot{3}\%$$

(b) Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit

In den meisten Versuchen und Wahrscheinlichkeitsproblemen liegen keine symmetrischen Zufallsgeräte vor und es ist somit meist keine Gleichwahrscheinlichkeit gegeben. In solchen Fällen machte schon Bernoulli den Vorschlag, Versuchsreihen durchzuführen und aus der relativen Häufigkeit eines Ereignisses (siehe Kapitel „Statistik) auf die Wahrscheinlichkeit von diesem Ereignis zu schließen.

Tritt ein Ereignis E unter n Versuchen einer Versuchsreihe (Zufallsversuch mehrmals unter gleichen Bedingungen durchgeführt) k-Mal ein, so gilt für die relative Häufigkeit des Ereignisses E unter diesen n Versuchen:

$$h_n(E) = \frac{k}{n}$$

An Laplace-Experimenten läßt sich zeigen, daß mit wachsendem n, d.h. bei einer sehr großen Versuchszahl, gilt:

$$h_n(E) = \frac{z(G)}{z(M)} = P(E)$$

So läßt sich z.B. durch eine große Anzahl von Versuchen überprüfen, ob ein Würfel gezinkt ist oder ein Rouletterad unrund läuft (alle gefallenen Zahlen pro Roulettetisch werden gespeichert und regelmäßig per Computer ausgewertet. Jede Zahl muß dabei mit der Wahrscheinlichkeit 1/37 auftreten). Aus dieser Erfahrung läßt sich aus der relativen Häufigkeit die Wahrscheinlichkeit näherungsweise für große n bestimmen:

$$P(E) \approx h_n\,(E)$$

Bernoulli konnte diese Regel durch das Gesetz der großen Zahlen mathematisch untermauern. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(h_n \in [P-\varepsilon; P+\varepsilon]) = 1$$

Obiger Satz bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses in einer beliebig kleinen Umgebung von P, der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, liegt, mit wachsendem n gegen 1 strebt, d.h. 100%ig wird. Die relative Häfigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchszahl um den Wert P.

***Beispiel**:* *Eine Befragung von 10 000 Autofahrern ergab, daß 5248 bisher unfallfrei unterwegs waren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig auf der Straße ausgewählter Autofahrer bisher unfallfrei?*

$$h_{10000}\,(\textit{unfallfrei}) = \frac{5248}{10000} = 0{,}5248$$

$$P(\textit{unfallfrei}) \approx 0{,}5248 \;\hat{=}\; 52{,}48\%.$$

(c) Begriff der Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

In der Praxis ergibt sich oft das Problem, daß eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden soll, ohne daß man sich auf einen relativen Anteil oder eine relative Häufigkeit berufen kann.

***Beispiel**:* *Ein Medikament wurde bisher nur in Tierversuchen getestet, nun soll eine Wahrscheinlichkeit dafür angegeben werden, daß dieses Medikament auch dem Menschen hilft.*

Man kann sich dabei nur auf bisherige Erfahrungen und Einschätzungen diverser Experten stützen und selbstverständlich auf die Testergebnisse aus den Tierversuchen. Trotzdem kann die daraus gestellte Prognose sich schließlich als völlig falsch herausstellen (sowohl im positiven wie auch im negativen Sinn). In diesem Fall wird als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E der Grad des subjektiven Vertrauens in das Eintreten von E herangezogen.

(d) Axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Wie schon aus den Definitionen der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil oder als relative Häfigkeit ersichtlich ist, ist die Wahrscheinlichkeit immer eine Zahl zwischen 0 und 1. Es zeigt sich somit, daß es trotz des Fehlens einer eindeutigen Wahrscheinlichkeitsdefiniton einige allgemeingültige Gesetze für Wahrscheinlichkeiten gibt. Der Russe Andrej Nikolajewitsch KOLMOGOROW (1903-1987) veröffentlichte 1933 eine sehr allgemeine Wahrscheinlichkeitsdefinition, die sich auf drei Axiome (Vorschriften) stützt.

Kolmogorow erklärt die Wahrscheinlichkeit als Funktion $P: E \to P(E)$, welche folgenden Axiomen genügt (Ω ist diesem Zusammenhang der sogenannte Ergebnisraum bzw. die Ergebnismenge, also die Menge aller möglichen Versuchsausgänge):

Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogorow:

1. $P(E) \geq 0$ (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$
3. Wenn $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$, dann folgt $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)+P(E_2)$

Aus diesen Axiomen lassen sich fast alle wesentlichen Regeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten leicht herleiten.

15.4. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

(a) Begriffserklärung

Die Menge Ω aller Ausfälle bzw. Ergebnisse eines Zufallsexperiments (Versuchs) heißt Ergebnismenge bzw. **Ergebnisraum** bzw. Ausfallsmenge.

***Beispiele**:*

Würfeln: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Roulette: $\Omega = \{0;1;2;\ldots;35;36\}$

Münzwurf: $\Omega = \{K;Z\}$

Köpergröße eines Neugeborenen in cm: $\Omega = [40;60]$

(d.h. unendlich viele Möglichkeiten, falls man nicht auf cm rundet)

Aus einer Lade mit 9 schwarzen, 8 blauen und 10 braunen Socken wird gezogen:

Ω *= {schwarz; blau; braun}*

Die Ergebnismenge hängt davon ab, was man als Ergebnis eines Versuchs ansieht. Im letzten Beispiel könnte die Ergebnismenge auch folgendermaßen als gewählt Ω = {schwarz; nicht schwarz} werden, wenn nämlich im speziellen ein schwarzer Socken benötigt würde.

Ein **Ereignis** wird durch eine Teilmenge E des Ergebnisraumes Ω beschrieben. Umgekehrt entspricht auch jeder Teilmenge von Ω ein Ereignis. Die Anzahl der Teilmengen von Ω ist daher die Zahl aller möglichen Ereignisse. Enthält Ω k Elemente (d.h. k verschiedene Ausfälle), dann gibt es 2^k Ereignisse.

Besitzt die Teilmenge nur ein Element, d.h. das Ereignis tritt nur bei einem Ausfall ein, dann heißt es **Elementarereignis**.

Ist die Teilmenge die leere Menge, d.h. das Ereignis tritt bei keinem Ausfall ein, dann spricht man von einem **unmöglichen Ereignis** und es gilt: $P(\{\ \}) = 0$

Ist die Teilmenge die gesamte Ergebnismenge Ω, so tritt das Ereignis bei jedem Ausfall des Versuchs ein und man spricht von einem **sicheren Ereignis**. Es gilt (siehe auch 2. Axiom von Kolmogorow): $P(\Omega) = 1$

Beschreibt das Ereignis E_1 eine Teilmenge von Ω und ist die Teilmenge E_2 eines anderen Ereignisses gleich der Komplementärmenge von E_1, dann heißt E_2 das **Gegenereignis** von E_1, bzw. E_1 das Gegenereignis von E_2. Es gilt: $E_2 = E_1'$; $E_1 \cup E_2 = \Omega$; $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$

Das Gegenereignis tritt genau dann ein, wenn das Ereignis nicht eintritt; Ereignis und Gegenereignis können niemals gleichzeitig eintreten.

Aus dem 3. Axiom von Kolmogorow läßt sich die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis herleiten. E, E' seien Ereignis und Gegenereignis mit $E \cap E' = \{\ \}$: $P(E \cup E') = P(E)+P(E')$
Aus $E \cup E' = \Omega$ und $P(\Omega) = 1$ folgt dann $1 = P(E)+P(E')$ und somit: $P(E') = 1-P(E)$

Die Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses** E' zum Ereignis E beträgt: $P(E') = 1 - P(E)$

Statt E' kann für das Gegenereignis auch $\neg E$ (gesprochen: „non E") geschrieben werden.

***Beispiel**: Geben Sie die Ergebnismenge beim Würfeln, sowie alle Elemetarereignisse an. Nennen Sie dazu ein unmögliches Ereignis bzw. ein sicheres Ereignis. Wie lautet das Gegenereignis zum Ereignis „Es kommt eine Zahl kleiner als 3" und welchen Wert haben die Wahrscheinlichkeiten von E und E´?*

Ergebnismenge Würfeln: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Elementarereignisse: $E_1 = \{1\}; E_2 = \{2\}; E_3 = \{3\}; E_4 = \{4\}; E_5 = \{5\}; E_6 = \{6\}$

unmögliches Ereignis: *„Es kommt die Zahl 7"*

sicheres Ereignis: *„Es kommt eine ganze Zahl größer als Null und kleiner als Sieben"*

Gegenereignis: *E' = „Es kommt eine Zahl ≥ 3"; E = {1;2}; E' = {3;4;5;6}*

Wahrscheinlichkeiten: $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P(E') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(b) Ereignisalgebra

Da Ereignisse durch Teilmengen der Ergebnismenge Ω beschrieben werden, kann man Rechenregeln für Mengen auch auf Ereignisse anwenden. Die nachfolgenden Sätze können daher aus der Mengenalgebra abgeleitet werden.

Das Ereignis $\mathbf{E_1 \cap E_2}$ tritt genau dann ein, wenn **E_1 und E_2** eintreten.

Ereignisse, die nicht gleichzeitig eintreten können, heißen unvereinbar; sie schließen einander aus und es gilt: $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$, wenn E_1 und E_2 unvereinbar. Gegenereignisse sind daher unvereinbar.

Unvereinbare Ereignisse: $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$

Das Ereignis $\mathbf{E_1 \cup E_2}$ tritt genau dann ein, wenn **E_1 oder E_2** eintreten (mindestens eines tritt ein).

Wenn $E_1 \subseteq E_2$ (Ereignis E_1 zieht Ereignis E_2 nach sich, d.h. wenn E_1 eintritt, tritt automatisch auch E_2 ein), dann gilt: $P(E_1) \leq P(E_2)$

Beweis: Wenn $E_1 \subseteq E_2$, dann gibt es ein E_3 mit $E_1 \cup E_3 = E_2$ und $E_1 \cap E_3 = \{\ \}$; E_3 ist also das Gegenereignis zu E_1 in Bezug auf E_2. Nach dem 3. Axiom von Kolmogorow gilt dann: $P(E_1)+P(E_3) = P(E_2)$
und nach dem 1. Axiom: $P(E_3) \geq 0$; $P(E_2) \geq P(E_1)$
und somit: $P(E_1) \leq P(E_2)$

***Beispiel**:* *Man betrachtet Ergeignisse beim Würfeln: E_1: „Es kommt 1 oder 3“; E_2: „Es kommt eine Zahl kleiner 4“; E_3: „Es kommt eine ungerade Zahl“.*

Beschreiben Sie sowohl mit Worten als auch mit Hilfe von E_1, E_2, E_3, ‘, $\cap$ und $\cup$ die folgenden Ereignisse und geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten an. Geben Sie weiters an, welches Ereignis welches andere nach sich zieht.

- Alle drei Ereignisse treten ein - Keines der Ereignisse tritt ein - E_1 und E_2 treten ein, E_3 aber nicht - Mindestens ein Ereignis tritt ein - E_1 und E_3 treten nicht ein, E_2 tritt ein

Alle drei Ereignisse E_1, E_2, E_3 sind Ereignisse des Ergebnisraumes $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

$$E_1 = \{1;3\}; E_2 = \{1;2;3\}; E_3 = \{1;3;5\}$$

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(E_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Alle drei Ereignisse treten ein:

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_1$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{3}$$

Keines der Ereignisse tritt ein:

$$(E_1 \cup E_2 \cup E_3)' = \{1;2;3;5\}' = \{4;6\}$$

„Es kommt die Zahl 4 oder 6“

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; P([E_1 \cup E_2 \cup E_3]') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

E_1 und E_2 treten ein, E_3 aber nicht:

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3' = \{\,\}; \textit{ unmögliches Ereignis}$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3') = 0$$

Mindestens ein Ereignis tritt ein:

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{1;2;3;5\}$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

E_1 und E_3 treten nicht ein, E_2 tritt ein:

$$E_1' \cap E_2' \cap E_3 = \{2\}$$

$$P(E_1' \cap E_2' \cap E_3) = \frac{1}{6}$$

Da $E_1 \subseteq E_2$ und $E_1 \subseteq E_3$, zieht E_1 sowohl E_2 als auch E_3 nach sich.

Das Errechnen von Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ereignisse ist nur dann nach allgemeinen Formeln relativ einfach, wenn der Durchschnitt der Ereignisse leer ist (siehe 3. Axiom von Kolmogorow) bzw. wenn die Ereignisse voneinander unabhängig sind. Da es nicht immer möglich ist, alle Ereignis-mengen (wie im vorigen Beispiel) anzugeben, ist man bestrebt, die Wahrscheinlichkeiten zusammenge-setzter Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse zu berechnen.

(c) Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen können durch zusätzliche Informationen geändert werden. Sie hängen vom Informationsstand ab. Somit kann sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E_1 ändern, wenn bekannt ist, daß ein Ereignis E_2 bereits eingetreten ist.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E_1 unter der Voraussetzung (Bedingung) eines anderen Ereignisses E_2 heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(E_1|E_2)$ und es gilt:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Die Berechnung von $P(E_1|E_2)$ ist aus der Laplace-Wahrscheinlichkeit erklärbar, denn durch die Voraussetzung des Eintretens von E_2, sind nur noch die Elemente von E_2 mögliche Elemente und die günstigen Fälle liegen in $E_1 \cap E_2$.

Beispiel: *250 Studentinnen und 330 Studenten besuchten eine Vorlesung. Insgesamt haben 55% aller Studierenden die zugehörige Prüfung bestanden. 185 davon waren Studenten.*

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist männlich
- Ein beliebig herausgegriffener Studierender hat nicht bestanden
- Eine beliebig herausgegriffene Studentin hat bestanden
- Ein beliebig herausgegriffener erfolgreicher Absolvent ist weiblich
- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist ein nicht erfolgreicher Student
- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist weiblich

Zur Ermittlung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten legt man folgende Elementarereignisse fest:

E_1: „männlich“; E_2: „weiblich“ mit $E_2 = E_1'$
E_3: „bestanden“; E_4: „nicht bestanden“ mit $E_4 = E_3'$

Um eine Verknüpfung mehrer Ereignisse zu veranschaulichen kann man eine „Vierfeldertafel" zu Hilfe nehmen. Hierbei gilt: 55% von 580 sind 319 erfolgreiche Studierende.

	Student	*Studentin*	*gesamt*
bestanden	*185*	*319-185=134*	*319*
nicht bestanden	*330-185=145*	*250-134=116*	*580-319=261*
gesamt	*330*	*250*	*580*

Allgemein beinhaltet eine Vierfeldertafel folgende Felder:

	E_1	$E_2 = E_1'$	gesamt
E_3	$z(E_1 \cap E_3)$	$z(E_2 \cap E_3)$	$z(E_3)$
$E_4 = E_3'$	$z(E_1 \cap E_4)$	$z(E_2 \cap E_4)$	$z(E_4)$
gesamt	$z(E_1)$	$z(E_2)$	$z(E_1 \cup E_2) = z(E_3 \cup E_4)$

oder statt der Mächtigkeiten der Mengen auch die Wahrscheinlichkeiten:

	E_1	$E_2 = E_1'$	gesamt
E_3	$P(E_1 \cap E_3)$	$P(E_2 \cap E_3)$	$P(E_3)$
$E_4 = E_3'$	$P(E_1 \cap E_4)$	$P(E_2 \cap E_4)$	$P(E_4)$
gesamt	$P(E_1)$	$P(E_2)$	1

Daraus erhält man die Zeilen- bzw. Spaltensummenregel (mit $E_2 = E_1'$ und $E_4 = E_3'$):

$$P(E_1 \cap E_3) + P(E_1' \cap E_3) = P(E_3) \text{ und } P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_3') = P(E_1)$$

Somit ergibt sich für das Beispiel:

Studierender ist männlich: $P(\text{männlich}) = P(E_1) = \dfrac{330}{580} = 0{,}057$

Studierender hat nicht bestanden: $P(\text{nicht bestanden}) = P(E_4) = \dfrac{261}{580} = 0{,}45$

Studentin hat bestanden: *P(bestanden unter der Bedingung „Studentin")* =

$$P(E_3|E_2) = \frac{134}{250} = 0{,}536$$

Erfolgreicher Absolvent ist weiblich: *P(weiblich unter der Bedingung „bestanden") =*

$$P(E_2|E_3) = \frac{134}{319} = 0{,}42$$

Studierender ist ein nicht erfolgreicher Student: *P(nicht bestanden und Student) =*

$$P(E_4 \cap E_1) = \frac{145}{580} = 0{,}25$$

Studierender ist weiblich:

$$P(\text{weiblich}) = P(E_2) = \frac{250}{580} = 0{,}431$$

Aus den Beispielen erkennt man, daß $P(E_3|E_2) \neq P(E_2|E_3)$. Es gilt:

Satz von BAYES

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)}{P(E_1)}$$

Beweis:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \text{ und } P(E_1 \cap E_2) = P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)}{P(E_1)}$$

Abhängig von den Wahrscheinlichkeiten spricht man davon, daß ein Ereignis ein anderes begünstigt oder benachteiligt.

E_2 **begünstigt** E_1: $P(E_1|E_2) > P(E_1)$

E_2 **benachteiligt** E_1: $P(E_1|E_2) < P(E_1)$

Wenn $P(E_1|E_2) = P(E_1)$ und $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ gilt, dann sind die Ereignisse E_1 und E_2 voneinander unabhängig.

Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(E_1|E_2) + P(E_1'|E_2) = 1$

Beweis:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \text{ und } P(E_1'|E_2) = \frac{P(E_1' \cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$P(E_1|E_2) + P(E_1'|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2) + P(E_1' \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_2)}{P(E_2)} = 1$$

(d) Multiplikationssatz

Aus der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt die Produktregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1) \cdot P(E_1) = P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl E_1 als auch E_2 eintritt, ist also das Produkt aus der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit für die Bedingung.

Multiplikationssatz: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Ereignisse **E_1 und E_2** ist gegeben durch: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1) \cdot P(E_1) = P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)$

Sind E_1 und E_2 voneinander unabhängige Ereignisse, d.h. $P(E_1|E_2) = P(E_1)$ bzw. $P(E_2|E_1) = P(E_2)$, dann hat die Multiplikationsregel die Form: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

***Beispiel**:* *Aus einer Urne mit 3 blauen und 5 roten Kugeln wird zweimal gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, im zweiten Zug eine blaue Kugel zu ziehen mit Zurücklegen der ersten gezogenen Kugel und ohne Zurücklegen dieser ersten Kugel.*

Die Ereignismenge E ist: *E ={blau-blau; rot-blau}*

Ziehung mit Zurücklegung:

Für die 1. Ziehung gilt: $P(blau) = \frac{3}{8}; P(rot) = \frac{5}{8}$

Für die 2. Ziehung gilt, da wieder alle Kugeln zur Verfügung stehen:

$$P(blau|\,blau) = \frac{3}{8}; P(blau|\,rot) = \frac{3}{8}$$

Hierbei ist P(blau|blau) bzw. P(blau|rot) die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer blauen bzw. roten Kugel bei der 2. Ziehung, unter der Bedingung, daß im ersten Versuch auch eine blaue gezogen wurde.

Wahrscheinlichkeit für des Ereignis E:

$$P(E) = P(blau - blau \text{ oder } rot - blau) =$$
$$P(blau - blau) + P(rot - blau) =$$
$$P(blau) \cdot P(blau|\,blau) + P(rot) \cdot P(blau|\,rot)$$

$$P(E) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{24}{64} = 0{,}375$$

Ziehung ohne Zurücklegung:

Für die 1. Ziehung gilt: $P(blau) = \frac{3}{8}; P(rot) = \frac{5}{8}$

Für die 2. Ziehung gilt abhängig von der 1. Ziehung: $P(blau| blau) = \frac{2}{7}; P(blau| rot) = \frac{3}{7}$

Wahrscheinlichkeit für des Ereignis E: $P(E) = P(blau - blau \text{ oder } rot - blau) =$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{21}{56} = 0{,}375$$

Im Fall Ziehen mit Zurücklegen ist die 2. Ziehung von der 1. Ziehung unabhängig. Im Fall Ziehen ohne Zurücklegen die 2. Ziehung von der 1. Ziehung abhängig.

In mehrstufigen Versuchen mit mehr als zwei Stufen muß zur Produktregel für zwei Ereignisse eine Verallgemeinerung gefunden werden.

Verallgemeinerte Multiplikationsregel: Sind $E_1, E_2, \ldots E_n$ Ereignisse eines Versuches ($n \geq 2$), so gilt:

1. Stufe	$P(E_1)$
Eintreffen des Ereignisses	E_1
2. Stufe	$P(E_2 \vert E_1)$
Eintreffen des Ereignisses	E_1 und E_2
3. Stufe	$P(E_3 \vert E_1 \cap E_2)$
Eintreffen des Ereignisses	E_1, E_2 und E_3
...	...
n. Stufe	$P(E_n \vert E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})$
Eintreffen des Ereignisses	E_1, E_2, ... und E_n

Daher ergibt sich: $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_n | E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})$

Verallgemeinerter Multiplikationssatz für n Ereignisse:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_n | E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

(e) Additionssatz

Aus dem 3. Axiom von Kolmogorow ist bereits bekannt: Sind E_1 und E_2 einander ausschließende (d.h. unvereinbare) Ereignisse des selben Versuchs, dann gilt: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ mit $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$

Aus diesem Gesetz ergibt sich leicht die Erweiterung des Additionssatzes für n unvereinbare Ereignisse. Schließen je zwei der Ereignisse E_1, E_2, ..., E_n einander aus, so gilt:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)$$

Das Ereignis $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse E_1, E_2, ... E_n eintritt.

In vielen Fällen sind die einzelnen Ereignisse jedoch nicht ausschließend und erfordern daher eine Verallgemeinerung der Additionsregel. Für die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E_1 oder das Ereignis E_2 eintritt gilt: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Additionsatz: Die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eines - **E_1 oder E_2** - von zwei Ereignissen E_1, E_2 eintritt, ist gegeben durch: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts ($E_1 \cap E_2$) muß ein Mal abgezogen werden, da dieser Durchschnitt sowohl in E_1 als auch in E_2 enthalten ist.

Diese allgemeine Formel enthält auch den Spezialfall für $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

***Beispiel**:* *Roulette (37 Felder)*

E_1: „Impair“ (ungerade) = {1;3;5;7; ...;33;35}

E_2: „Noir“ (schwarz) = {2;4;6;8;10;11;13;15;17;20;22;24;26;28;29;31;33;35}

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ungerade oder schwarz kommt oder sogar beides.

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cup E_2)$.

$P(E_1 \cup E_2)$ = {1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;13;15;17;19;20;21;22;23;24;25;26;27;28;29;31;33;35}

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{28}{37} = 0{,}757$$

Berechnung mittels Additionssatz:

$$P(E_1) = \frac{18}{37}; P(E_2) = \frac{18}{37}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind nicht 0,5, weil die Zahl Null auch mitspielt, aber keine Farbe hat und beim Roulette weder zu den geraden noch zu den ungeraden gezählt wird.

$$E_1 \cap E_2 = \{11;13;15;17;29;31;33;35\}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{37}$$

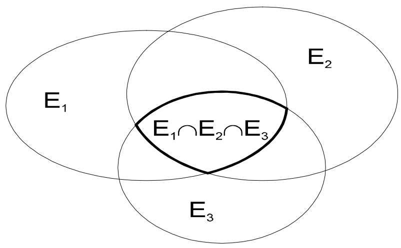
$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{8}{37} = \frac{28}{37}$$

Die Additonsregel läßt sich aus denselben Überlegungen, die für zwei Ereignisse gelten, auch auf drei und mehrere Ereignisse erweitern. Sie wird aber im Falle einander nicht ausschließender Ereignisse immer komplizierter.

Für die Wahrscheinlichkeit z.B. von „E_1 oder E_2 oder E_3“ gilt folgende **„Ein- und Ausschaltformel“**:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1 \cap E_2)-P(E_1 \cap E_3)-P(E_2 \cap E_3)+P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Wie nachfolgendes Diagramm zeigt ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ sowohl in $E_1 \cap E_2$ als auch in $E_1 \cap E_3$ als auch in $E_2 \cap E_3$ enthalten. Dieser Durchschnitt wird mit E_1, E_2 und E_3 drei Mal addiert, mit $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$ und $E_2 \cap E_3$ drei Mal subtrahiert und muß daher ein Mal wieder hinzugefügt werden.



15.5. Baumdiagramme mehrstufiger Versuche

Besteht ein Versuch aus mehreren Teilversuchen, so liegt ein mehrstufiger Versuch vor, und es ist oft von Vorteil, die Abläufe der Teilversuche an Hand eines **Baumdiagramms** graphisch darzustellen.

Die Kanten eines Baumdiagramms weisen von einem Startpunkt zu den möglichen Ergebnissen (Ausfällen) des Versuchs. Jedem **Pfad** in einem Baumdiagramm entspricht ein Ausfall des Versuchs. Es gibt so viele Ausfälle des Versuchs wie Pfade im Graphen. Zu den einzelnen Teilversuchen werden jeweils die Wahrscheinlichkeit angeschrieben.

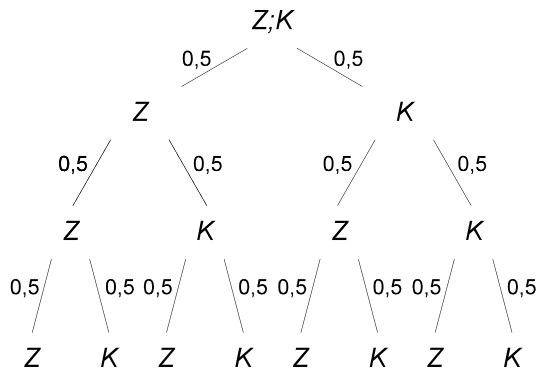
***Beispiel**:* *Eine Münze (Z;K) wird drei Mal geworfen. Stellen Sie alle möglichen Ausfälle des Versuchs dar. Wieviele sind es? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jeder dieser Ausfälle ein?*

Ausgangssituation:

1. Wurf:

2. Wurf:

3. Wurf:



Jeder Teilversuch hat 2 Ausfälle - es gibt 3 Teilversuche: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Da jeder Ausfall gleichwahrscheinlich ist, ist die Wahrscheinlichkeit: $P(E) = \frac{1}{8}$

Es gilt folgender Satz:

> Besteht ein Versuch aus k Teilversuchen, die tatsächlich oder in Gedanken nacheinander ausgeführt werden und seien $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ die Anzahl der Ausfälle der Teilversuche, so hat der Gesamtversuch $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ Ausfälle.

***Beispiel**:* *Eine Autotype ist in zwei Motorstärken ($M_1;M_2$) mit oder ohne Klimaanlage ($K_1;K_2$), mit drei verschiedenen Sitzbezügen ($S_1;S_2;S_3$) und in 4 Farben ($F_1;F_2;F_3;F_4$) erhältlich. Wieviele Ausführungen sind möglich? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zufälliger Auswahl eine bestimmte Ausführung zu erhalten?*

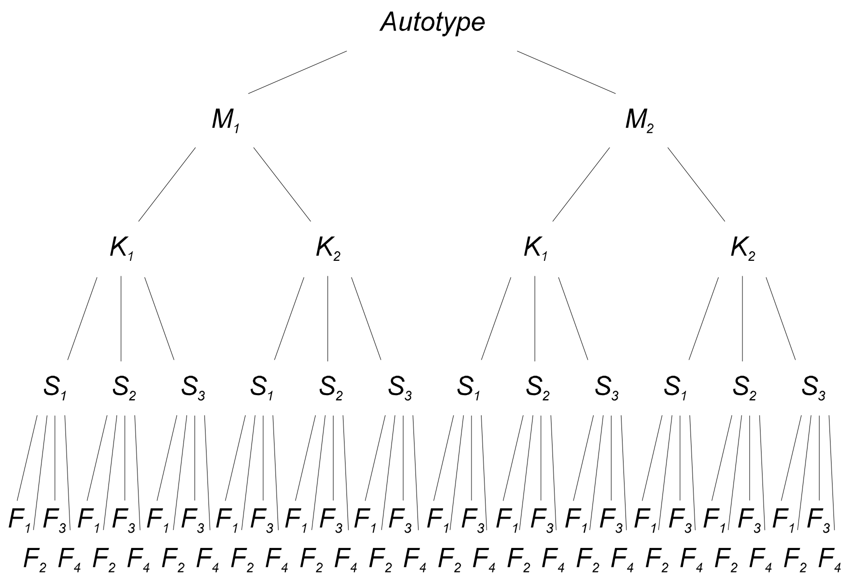
Ausgangssituation:

1. Auswahl $P(M) = \frac{1}{2}$:

2. Auswahl $P(K) = \frac{1}{2}$

3. Auswahl $P(S) = \frac{1}{3}$:

4. Auswahl $P(F) = \frac{1}{4}$:



Anzahl der verschiedenen Ausführungen: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48$

Jede Ausführung ist gleichwahrscheinlich. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausführung: $\frac{1}{48}$

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausführung - z.B. mit der ersten Motorstärke M_1 mit Klimaan-lage K_1, Sitzbezug S_2 und Farbe F_3 - läßt sich auch aus den Pfadwahrscheinlichkeiten berechnen:

$$P(M_1 \cap K_1 \cap S_2 \cap F_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

Nicht immer sind alle Ausfälle gleichwahrscheinlich und es ist daher nicht möglich aus der Gesamtzahl der Ausfälle auf die Einzelwahrscheinlichkeit zu schließen. Da das Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der Teilversuche enthält, kann man auch nach den Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls errechnen.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe (eines Ausfalls) ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

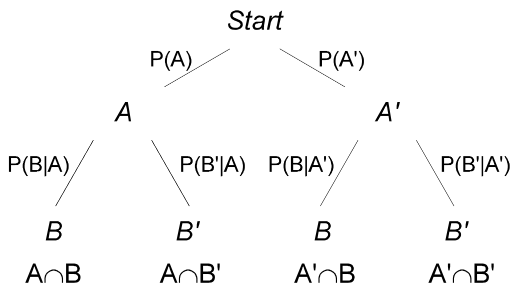
Genaugenommen stehen im Baumdiagramm nur beim ersten Teilversuch Wahrscheinlichkeiten, bei den folgenden Teilversuchen sind es bedingte Wahrscheinlichkeiten. Nur im Falle, daß die beiden Teilversuche voneinander unabhängig sind (siehe obige Beispiele) sind die Wahrscheinlichkeiten im weiteren Verlauf des Baumes gleich den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse der weiteren Teilversuche.

Hat ein Teilereignis E_1 die Ausfälle (A,A') und ein Teilereignis E_2 die Ausfälle (B,B') so sieht das Baumdiagramm folgendermaßen aus:

Ausgangssituation:

1. Stufe E_1:

2. Stufe E_2:



Die Wahrscheinlichkeit für die vier Ausfälle ist also nach der 1. Pfadregel:

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B|A) \qquad P(A \cap B') = P(A)\cdot P(B'|A)$$

$$P(A' \cap B) = P(A')\cdot P(B|A') \qquad P(A' \cap B') = P(A')\cdot P(B'|A')$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Elementarereignis B des zweiten Teilversuchs ist entlang eines Pfades nicht erkennbar. Es führen nämlich zwei Pfade zum Ereignis B.

Die Ausfälle entlang verschiedener Pfade sind unvereinbare Ereignisse, daher kann die vereinfachte Additionsregel zur Anwendung gebracht werden.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Rechnerisch bedeutet dies für P(B): $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(A')\cdot P(B|A')$

***Beispiel**: Es wurde ein Test zur Erkennung einer bestimmten Krankheit entwickelt. In 98% aller Krankheitsfälle ist das Testergebnis positiv. Allerdings zeigt der Test mit 0,8% Wahrscheinlichkeit auch ein positives Resultat, obwohl die untersuchte Person gesund ist. Aus statistischen Erhebungen schätzt man, daß 3% der Bevölkerung an der Krankheit leiden. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:*

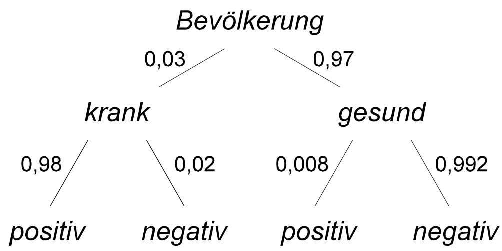
- Eine zufällig herausgegriffene Person hat positiven Test und ist krank.
- Ein zufällig herausgegriffener Kranker hat negativen Test.
- Eine zufällig herausgegriffene Person hat negativen Test.
- Eine zufällig herausgegriffene Person mit negativem Test ist krank.

Man kennt aus der Angabe: P(positiv|krank) = 0,98 und daher P(negativ|krank) = 1–0,98 = 0,02
P(positiv|gesund) = 0,008 und daher P(negativ|gesund) = 1–0,002 = 0,992
P(krank) = 0,03 und daher P(gesund) = 1–0,03 = 0,97

Baumdiagramm:

1. Stufe tatsächlicher Gesundheitszustand:

2. Stufe Testergebnis:



- P(positiv ∩ krank) = 0,03·0,98 = 0,0294
Mit 2,94%iger Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank und hat ein positives Testergebnis.
- P(negativ|krank) = 0,02
Mit 2%iger Wahrscheinlichkeit ist der Test eines Kranken negativ.
- P(negativ) = P(krank ∩ negativ) + P(gesund ∩ negativ) =
0,03·0,02 + 0,97·0,992 = 0,0006 + 0,96224 = 0,96284
Mit 96,28%iger Wahrscheinlichkeit ist das Testergebnis negativ.

$$d)\ P(krank|negativ) = \frac{P(krank \cap negativ)}{P(negativ)} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}02}{0{,}96284} = 0{,}00062$$

Mit nur 0,06 %iger Wahrscheinlichkeit wird mit dem Test diese Krankheit nicht erkannt (d.h. das Testergebnis ist negativ - trotzdem ist die Person krank).

Mehrstufige Versuche, in denen die weiteren **Teilversuche** von den vorangegangenen **abhängig** sind, sind vergleichbar mit dem **Ziehen** aus einer Urne **ohne Zurücklegen**. Mehrstufige Versuche, in denen die weiteren **Teilversuche** voneinander **unabhängig** sind, können mit dem **Ziehen** aus einer Urne **mit Zurücklegen** (immer die gleiche Ausgangssituation) verglichen werden.

Wenn die Anzahl der Teilversuche sehr groß ist und auch die Zahl der Ausfälle der Teilversuche hoch ist, wird das Baumdiagramm recht unübersichtlich. Will man eine ganz bestimmte geordnete Stichprobe, so genügt es, nur diesen einen Pfad aufzuschreiben. Will man jedoch eine ungeordnete Stichprobe, so ergeben mehrere gleichwahrscheinliche Pfade das gewünschte Ergebnis. In solchen Fällen kann man sich oft mit kombinatorischen Methoden weiterhelfen und die Anzahl der Pfade mit demselben Ergebnis errechnen.

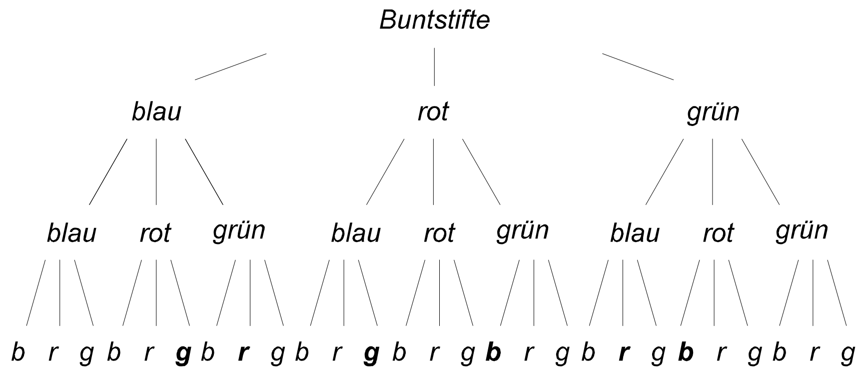
***Beispiel**:* *Aus einer Lade mit 10 blauen, 5 roten und 6 grünen Buntstiften wird 3 Mal blind gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen roten, einen blauen und einen grünen Stift zu ziehen mit Zurücklegen bzw. ohne Zurücklegen?*

Baumdiagramm:

1. Ziehung:

2. Ziehung:

3. Ziehung:



Es gibt 6 günstige Pfade. Diese Anzahl ergibt sich außer durch Abzählen im Baumdiagramm auch aus den Permutationen der 3 verschiedenen Elemente b,r,g: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Versuch mit Zurücklegen: es gilt immer $P(blau) = \frac{10}{21}; P(rot) = \frac{5}{21}; P(grün) = \frac{6}{21}$

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad: $P(blau \cap rot \cap grün) = \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{21} \cdot \frac{6}{21} = 0{,}0324$

Wahrscheinlichkeit für alle 6 Pfade: $P(\text{blau, rot, grün in bel. Reihenfolge}) = 6 \cdot 0{,}0324 = 0{,}1944$

Versuch ohne Zurücklegen:

Das Baumdiagramm für den Fall „ohne Zurücklegen“ sieht gleich aus, nur die Wahrscheinlichkeiten für die zweite und dritte Ziehung ändern sich, da diese Teilversuche jeweils von der vorangegangenen Ziehung abhängen. Die Zahl der in der Lade befindlichen Buntstifte ändert sich nämlich mit jedem Zug und damit die Anzahl der möglichen Fälle.

Es gilt für einen Pfad:

$$P(blau \cap rot \cap grün) = \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21} \qquad P(blau \cap grün \cap rot) = \frac{10}{21} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$$

$$P(rot \cap blau \cap grün) = \frac{5}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21} \qquad P(rot \cap grün \cap blau) = \frac{5}{21} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$$

$$P(grün \cap rot \cap blau) = \frac{6}{21} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21} \qquad P(grün \cap blau \cap rot) = \frac{6}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$$

Wahrscheinlichkeit für alle 6 Pfade:

$$P(blau,\ rot,\ grün\ in\ bel.\ Reihenfolge) = 6 \cdot \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21} = 0{,}2256$$

Diese Aufgaben läßt sich auch auf rein kombinatorischem Weg lösen.

Versuch ohne Zurücklegen: Vorerst geht es darum, aus 21 Stiften 3 auszuwählen, wobei nicht zurückgelegt wird und die Reihenfolge egal ist. Die Anzahl der Möglichkeiten ist daher: $^{w}K_{21}^{3} = \binom{21}{3} = 1330$

Günstige Fälle sind jedoch nur jene, bei denen je ein blauer, ein roter und ein grüner Stift in beliebiger Reihenfolge gezogen wird. Diese Anzahl ist: $\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} = 300$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt daher: $P(blau \cap rot \cap grün) = \frac{300}{1330} = 0{,}2256$

15.6. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

(a) Zufallsvariable

In den vorangegangenen Abschnitten wurde jeweils die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ausfalls eines Zufallsversuchs berechnet. Ein Zufallsversuch hat immer mehrere bzw. sogar unendlich viele Ausfälle. Ordnet man jedem möglichen Ausfall eindeutig eine reelle Zahl zu, so nennt man diese Zuordnung eine **Zufallsvariable**.

Eine (reelle) **Zufallsvariable** ist eine Funktion, die jedem Ausfall eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet.

Eine Zufallsvariable X (Zufallsvariablen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet) ist also eine Größe, die - vom Zufall abhängig - reelle Zahlen x_i als Werte annimmt.

***Beispiele**:* *für Zufallsvariable*

X = „Augenzahl eines Würfels“ *x_i-Werte für X: $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots x_6 = 6$*

X = „Zahl der 6er bei 5maligem Würfeln“ *x_i-Werte für X: $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots x_6 = 5$*

X = „Anzahl der entdeckten Schmuggler an der Grenze bei einer Stichprobe vom Umfang 4“ *x_i-Werte für X: $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots x_5 = 4$*

X = „Füllmenge einer 3kg Waschmittelpackung“ *x_i-Werte für X: $x_i \in [2,95;3,05]$*

X = „Anzahl der verdorbenen Paradeiser bei zufälliger Entnahme von 4 Stück aus einem Sack mit 10 Paradeisern, von denen 2 verdorben sind“
x_i-Werte für X: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$

Jeden Wert x_i nimmt die Zufallsvariable X mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ an. Die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte x_i nennt man Wahrscheinlichkeits-Verteilung der Zufallsvariablen X.

Im folgenden werden für die obenen angegebenen Beispiele die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen x_i-Werte berechnet und die Unterschiede zwischen den einzelnen Zufallsvariablen und ihren Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgezeigt.

***Beispiel**:* *X = „Augenzahl eines Würfels“*

x_i-Werte für X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ... $x_6 = 6$

$$P(X=1)=\frac{1}{6};P(X=2)=\frac{1}{6};\ldots;P(X=6)=\frac{1}{6}$$

Bei dieser Verteilung handelt es sich um eine sogenannte **Gleichverteilung**, da jedem Ausfall die gleiche reelle Zahl zugeordnet wird.

***Beispiel**:* *X = „Zahl der 6er bei 5maligem Würfeln“*

x_i-Werte für X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ... $x_6 = 5$

$$P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^5=0{,}4019$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}4019$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=0{,}1608$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=0{,}0322$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=0{,}0032$$

$$P(X=5)=\left(\frac{1}{6}\right)^5=0{,}0001$$

Bei dieser Verteilung handelt es sich um eine sogenannte **Binomialverteilung**, da sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten entsprechend der Entwicklung eines Binoms $(a+b)^n$ errechnen lassen. Im speziellen ist dabei a die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses, b die Gegenwahrscheinlichkeit und n die Anzahl der Versuchswiederholungen.

***Beispiel**: X = „Anzahl der entdeckten Schmuggler an der Grenze bei einer Stichprobe vom Umfang 4“; x_i-Werte für X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ... $x_5 = 4$*

Um die Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können muß man von einer bekannten Wahrscheinlichkeit ausgehen, die z.B. aus den Erfahrungen der Zöllner gewonnen werden kann; z.B. jeder 100. Grenzüberschreiter ist ein Schmuggler:

$$P(Schmuggler) = \frac{1}{100}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{99}{100}\right)^4 = 0{,}9696$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{100}\right) \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^3 = 0{,}0388$$

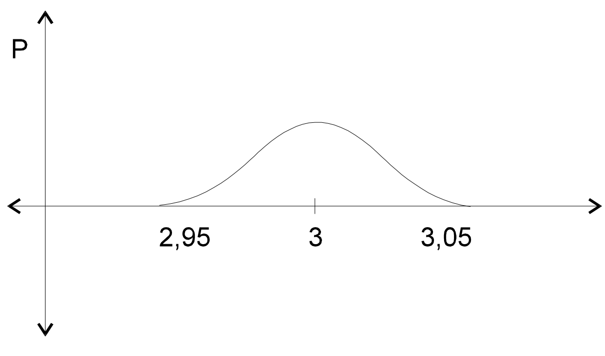
$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^2 = 0{,}0006$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{99}{100}\right) = 0{,}000004$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{100}\right)^4 = 0{,}00000001$$

Dieses Binomialverteilungsbeispiel verdeutlicht, daß diese Verteilung mit dem Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen vergleichbar ist, da die Wahrscheinlichkeit stets unverändert 0,01 ist.

***Beispiel**: X = „Füllmenge einer 3kg Waschmittelpackung“ x_i-Werte für X: $x_i \in [2{,}95;3{,}05]$*



Für dieses Beispiel sind ohne weitere Information keine Wahrscheinlichkeiten für die (unendlich vielen) x_i-Werte nennbar. Üblicherweise sollte jedoch die Wahrscheinlichkeit bei der Sollmenge 3kg am größten sein und bei größeren Abweichungen davon möglichst gegen Null streben. Der Graph dieser Verteilung verläuft nach der Gaußschen Glockenkurve; es handelt sich bei der Verteilung um eine sogenannte **Normalverteilung**.

***Beispiel**: X = „Anzahl der verdorbenen Paradeiser bei zufälliger Entnahme von 4 Stück aus einem Sack mit 10 Paradeisern, von denen 2 verdorben sind“*

x_i-Werte für X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Man weiß, daß 2 von den vorhandenen 10 Paradeisern verdorben sind. Bei der Entnahme jedes einzelnen Paradeisers ändert sich diese Voraussetzung.

Anzahl der möglichen Entnahmen: $K_{10}^{4} = \binom{10}{4} = 210$

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{8}{4}}{210} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{3}}{210} = \frac{112}{210} = 0{,}5333$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{2}}{210} = \frac{28}{210} = 0{,}1333$$

Bei dieser Verteilung handelt es sich um eine sogenannte **hypergeometrische Verteilung**. Diese Verteilung ist mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen vergleichbar.

Wenn X höchstens abzählbar viele (können auch unendlich viele sein) „diskret“ liegende Zahlen x_i annehmen kann, dann spricht man von einer diskreten Zufallsvariablen mit **diskreter Verteilung.**

Kann X alle Zahlen eines bestimmten Intervalls annehmen, so handelt es sich um eine kontinuierliche (stetige) Zufallsvariable mit einer **kontinuierlichen** (stetigen) **Verteilung**.

Die Einteilung der Zufallsvariablen in zwei Klassen, in die der diskreten und die der stetigen, entspricht der Einteilung der Zufallsexperimente in solche, bei denen man zählt (z.B. Augenzahl beim Würfeln; Anzahl von „Kopf“ bei mehrmaligem Münzwurf; Zahl der Grippefälle im Winter) und solche, bei denen gemessen wird (z.B. Länge von Nägeln; Masse von Waschmittelpaketen; Temperatur von ...). Eine entsprechende Darstellung findet man durch die sogenannte Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Die Funktion f: $R \to [0;1]$, $y = P(X = x_i)$, $i \in N \setminus \{0\}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

(b) Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die statistische Wahrscheinlichkeit errechnet sich gestützt auf das Gesetz der großen Zahlen aus den relativen Häufigkeiten bei großer Versuchsanzahl. Allgemein gilt für eine Zufallsvariable X mit den möglichen Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots$:

Mit zunehmender Anzahl n der Versuchsdurchführungen nähert sich jede relative Häufigkeit $h(x_i)$ der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ und somit die Häufigkeitsverteilung von X der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Daraus ergibt sich, daß es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch äquivalente Größen zum statistischen Mittelwert, zur empirischen Varianz und zur empirischen Standardabweichung gibt.

Je länger eine Liste von Variablenwerten wird (durch oftmalige Versuchsdurchführung treten die Werte der Zufallsvariablen mit größerer Häufigkeit auf), desto mehr nähert sich der Mittelwert der Liste dem sogenannten **Erwartungswert** der Zufallsvariablen $\mu = E(X)$.

Analog zum Mittelwert $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h(x_i)$ (siehe Statistik) berechnet sich der Erwartungswert der Zufallsvariablen X als Summe der Produkte aus den verschiedenen Variablenwerte x_i und ihren entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$.

Erwartungswert der Zufallsvariablen X: $\mu = E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Der Erwartungswert muß dabei nicht der wahrscheinlichste Wert sein, schließlich muß auch $\bar{x}$ nicht der häufigste Wert sein (der häufigste Wert ist der Modalwert bzw. Modus).

Der Zufallsvariablenwert mit der größten Wahrscheinlichkeit, also die Maximumstelle von Verteilungen, heißt dichtester Wert oder **Modalwert** M.

Für den **Median** (Zentralwert) Z gilt: $P(X \leq Z) = \frac{1}{2}$

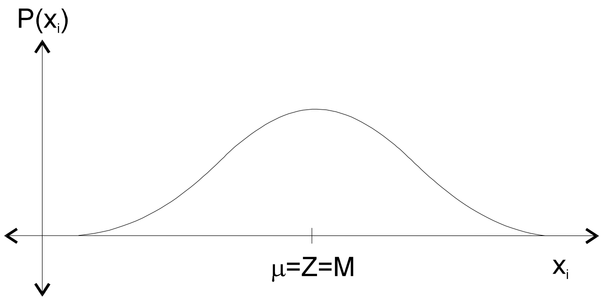
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Variablenwerte $x_i \leq Z$ muß 0,5 ergeben.

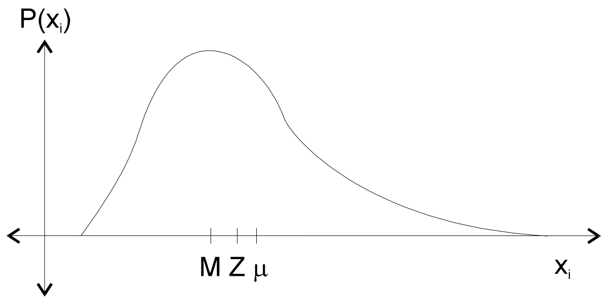
Bei symmetrischen, stetigen Verteilungen, die nur ein Maximum besitzen (eingipfelige Verteilungen) fallen Modus, Zentralwert und Erwartungswert zusammen.

Schiefe Verteilungen sind nicht symmetrisch. Bei solchen Verteilungen fallen Erwartungswert, Modus und Zentralwert in der Regel nicht zusammen. Eine schiefe Verteilung ergibt sich z.B. wenn in einem Produktionsprozeß gewisse Produkte, die bestimmten Mindestanforderungen nicht genügen, von vornherein ausgeschieden werden.

Symmetrische Verteilung:
z.B. Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve)

Schiefe Verteilung:
z.B. siehe nachfolgendes Beispiel





***Beispiel**: Ein veränderter Würfel hat 3 Seiten mit „6“ beschriftet und je eine Seite mit „1“, „2“ bzw. „4“. Berechnen Sie für die Zufallsvariable „Augenzahl“ den Erwartungswert, den Modus und den Median.*

x_i-Werte für X: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 6$

$$P(X=1)=\frac{1}{6};P(X=2)=\frac{1}{6};P(X=4)=\frac{1}{6};P(X=6)=\frac{1}{2}$$

Erwartungswert: $$\mu = E(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{2} = 4{,}1666$$

Modus: $$M = 6$$

Median für 1-2-4-6-6-6: $$Z=\frac{4+6}{2}=5\,;\ P(X\le 5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

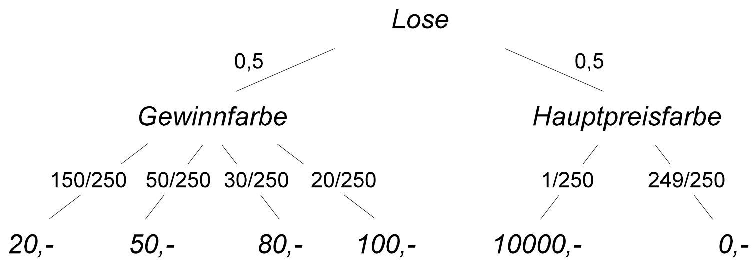
Ebenfalls analog zur Statistik lassen sich die Begriffe Varianz und Standardabweichung definieren.

Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit dem Erwartungswert E(X).
Dann gilt für die **Varianz** $V(X) = \sigma^2$ der Zufallsvariablen X: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
Die Zahl σ heißt **Standardabweichung** von X: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Rechnerisch bedeutet dies: $\sigma^2 = V(X) = (x_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (x_2-\mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n-\mu)^2 \cdot p_n = (x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n) - \mu^2$

***Beispiel**: Bei einer Tombola werden 500 Lose verkauft. 250 Lose sind blau, die anderen rot. Zuerst wird eine Farbe gezogen, aus welcher dann der Hauptpreis von S 10000,- gezogen wird. Bei der anderen Farbe gewinnt jedes Los, und zwar bei 150 Losen einen Preis im Wert von 20,-, bei 50 Losen einen Preis im Wert von 50,-, bei 30 Losen einen Preis im Wert von 80,- und bei 20 Losen einen Preis im Wert von 100,-. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen X=„Preis“.*

Baumdiagramm:



x_i-Werte von X: $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $x_3 = 80$, $x_4 = 100$, $x_5 = 10\,000$, $x_6 = 0$

$$P(X=20)=\frac{1}{2}\cdot\frac{150}{250}=\frac{3}{10};P(X=50)=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{250}=\frac{1}{10};P(X=80)=\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{250}=\frac{3}{50}$$

$$P(X=100)=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{250}=\frac{1}{25};P(X=10000)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{250}=\frac{1}{500};P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{249}{250}=\frac{249}{500}$$

$$\mu = 20\cdot\frac{3}{10}+50\cdot\frac{1}{10}+80\cdot\frac{3}{50}+100\cdot\frac{1}{25}+10000\cdot\frac{1}{250}+0\cdot\frac{249}{500}=39{,}8$$

$$\sigma=\sqrt{\left(20^2\cdot\frac{3}{10}+50^2\cdot\frac{1}{10}+80^2\cdot\frac{3}{50}+100^2\cdot\frac{1}{25}+10000^2\cdot\frac{1}{500}+0^2\cdot\frac{249}{500}\right)-39{,}8^2}=446{,}7$$

Der zu erwartenden Gewinn ist ca. S 40,-. Die Standardabweichung ist so groß, daß es praktisch nicht sinnvoll ist, den Erwartungswert als Prognose für den Preis zu nehmen.

(c) Binomialverteilung

Ein Versuch, der genau zwei Ausfälle E und E' hat, heißt Bernoulli - Versuch.

Ein Experiment, bestehend aus einer Folge von n Teilversuchen, bei dem jeder Teilversuch genau zwei mögliche Versuchsausgänge besitzt und jeder Versuch unter genau den gleichen Voraussetzungen abläuft, heißt n-stufiges **Bernoulli-Experiment** oder Bernoulli-Kette.

Die Wahrscheinlichkeit der beiden Ausfälle jedes Teilversuchs sind $P(E) = p$ und $P(E') = 1 - p$.

Die Zufallsvariable X sei die „Anzahl der eintretenden Ereignisse E" in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment. Um die Verteilung der Zufallsvariablen X zu ermitteln, muß man die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$, daß das Ereignis E genau k-mal eintritt ($k \leq n$), bestimmen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei k Teilversuchen jedesmal das Ereignis E eintritt, ist p^k; die Wahrscheinlichkeit, daß bei $n-k$ Teilversuchen E nicht eintritt (sondern E') beträgt $(1-p)^{n-k}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei den ersten k Teilversuchen E eintritt und bei den restlichen $n-k$ Teilversuchen E' ergibt sich somit durch $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ nach der 1. Pfadregel. Bei insgesamt n Teilversuchen muß das Ereignis E aber nicht gerade bei den ersten k Teilversuchen eintreten, sondern bei irgendwelchen k Teilversuchen. Es existieren daher $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, daß E genau k Mal und E' genau $n-k$ Mal eintritt. Somit gilt $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-q)^{n-k}$. Es liegt eine sogenannte **Binomialverteilung** vor.

Eine Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, wenn gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-q)^{n-k}$$

Häufig wird diese Wahrscheinlichkeit mit $b_{n;p}(k)$ bezeichnet und für spezielle n und p zur Vereinfachung der rechnerischen Ermittlung in Tabellen zusammengefaßt. Diese Tabellen sind jedoch nur für wenige Spezialfälle (meist n = 10, n = 20 und einige p-Werte zwischen 0,01 und 0,09) gegeben. Etwas häufiger zu gebrauchen sind Tabellen für die Binomialkoeffizienten oder Taschenrechner mit statistischen Funktionstasten.

***Beispiel**: Wieviele Kinder müßte eine Mutter mindestens zur Welt bringen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Knaben zu bekommen, wenn aus statistischen Erhebungen die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt p=0,52 gilt.*

E = „Knabe"; P(E) = p = 0,52 E' =„Mädchen" P(E´) = 1-p = 0,48

Mindestens 1 Knabe bedeutet: 1 Knabe oder 2 Knaben … oder n Knaben. Das Ereignis „mindestens 1 Knabe" ist daher ein sehr umfangreiches zusammengesetztes Ereignis, noch dazu, wo die Gesamtzahl n der „Versuche" unbekannt ist: $P(X \geq 1) = P(X = 1)+P(X = 2)+\ldots+P(X = n)$

$$P(X \geq 1) = \binom{n}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^0$$

Das Gegenereignis zu „mindestens 1 Knabe" ist wesentlich einfacher, nämlich „kein Knabe" (=„n Mädchen").

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}52^0 \cdot 0{,}48^n = 0{,}48^n$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit für „mindestens 1 Knabe" $\geq$ 95% betragen soll, dann ergibt sich für das Gegenereignis „kein Knabe" eine Wahrscheinlichkeit $<$ 1–0,95.

$$\begin{aligned} 0{,}48^n &< 0{,}05 \\ n \cdot \lg(0{,}48) &< \lg(0{,}05) \\ n &> 4{,}08\ldots \end{aligned}$$

Die Mutter muß also mehr als 4 Kinder (d.h. mindestens 5 Kinder) zur Welt bringen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Knaben zu bekommen.

***Beispiel**: „GALTON - Brett"*

Ein Galton-Brett ist eine Versuchsanordnung, die eine Binomialverteilung im Fall p = 0,5 experimentell verifizieren kann. Dabei rollt oder fällt eine Kugel gegen ein symmetrisches Hindernis, welches sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts ablenkt. Die abgelenkte Kugel trifft dann auf die Mitte eines weiteren symmetrischen Hindernisses usw., bis sie schließlich nach einem Zickzack - Weg durch n+1 Hindernisse in eines der unten befindlichen n+1 Fächer gelangt. Wenn sehr viele Kugeln die Anordnung durchlaufen, verhalten sich die Füllhöhen der einzelnen Fächer ungefähr wie die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

E = „links“ P(E) = p = 0,5 *E’ = „rechts“P(E´) = 1–p = 0,5*

X = „Anzahl von links“: $$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

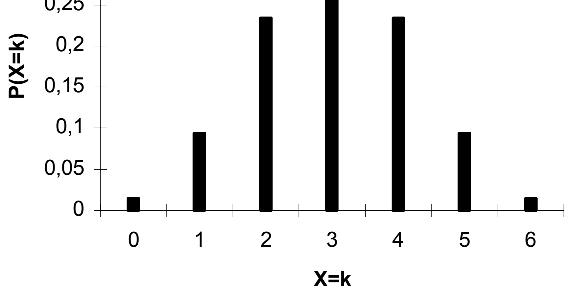
Im äußerst linken Fach ist k = 0; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Kugel in diesem Fach landet ist somit: $$P(X=0)=\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Im äußerst rechten Fach ist k = n; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Kugel in diesem Fach landet ist somit: $$P(X=n)=\binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Im zweiten Fach von links landet die Kugel immer dann, wenn sie n–1 Mal nach links und nur 1 Mal nach rechts abgelenkt wurde: $$P(X=1)=\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Im zweiten Fach von rechts landet die Kugel immer dann, wenn sie n–1 Mal nach rechts und nur 1 Mal nach links abgelenkt wurde: $$P(X=n-1)=\binom{n}{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Daraus erkennt man, daß für p = 0,5 ein Histogramm der Binomialverteilung symmetrisch zur Normalen durch die Mitte bei $k=\frac{n}{2}$ ist.



Für z.B. n = 6 ergibt sich:

$$P(X=0)=0{,}015;P(X=1)=0{,}094;$$
$$P(X=2)=0{,}234;P(X=3)=0{,}3125$$
$$P(X=4)=0{,}234;P(X=5)=0{,}094;$$
$$P(X=6)=0{,}015$$

Wenn ein Ereignis E bei einem Teilversuch einer Bernoulli-Kette mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, so ist zu erwarten, daß es bei n Teilversuchen im Mittel n·p Mal eintritt.

Es gilt für den **Erwartungswert** einer $b_{n;p}$-verteilten Zufallsvariablen X: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Beweis: $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 0 + 1 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} + \ldots + n \cdot p^n =$$

$$n \cdot p \cdot ((1-p)^{n-1} + (n-1) \cdot p \cdot (1-p)^{n-2} + \ldots + p^{n-1}) = n \cdot p \cdot ((1-p)+p)^{n-1} = n \cdot p$$

Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsvariablen lassen sich ebenfalls vereinfachen.

Varianz einer $b_{n,p}$-verteilten Zufallsvariablen X: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$

Zum Berechnen von Binomialverteilungen ist es häufig von Vorteil, den Zusammenhang zur Verteilung des Gegenereignisses zu kennen. Es gilt: $b_{n;p}(k) = b_{n,1-p}(n-k)$; $(0 \le k \le n)$

Beweis: $b_{n,1-p}(n-k) = \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k$, und da $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, ist $b_{n,1-p}(n-k) = \binom{n}{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k = b_{n,p}(k)$

Für sehr große n, d.h. sehr viele Teilversuche, wird das Errechnen von Binomialverteilungen äußerst mühsam. Es gibt aber zwei Verteilungen, die Poisson-Verteilung und die Normalverteilung, die bei $n \to \infty$ Grenzformen der Binomialverteilung sind.

Die **Poisson-Verteilung** eignet sich dann, wenn die Wahrscheinlichkeit sehr klein oder aber auch sehr groß (durch Vertauschen von E mit E') ist: $0<p<0{,}1$ oder $0{,}9<p<1$ und $\mu = n \cdot p$ ($n \to \infty$, $p \to 0$) konstant ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Poisson-Verteilung (Verteilung seltener Ereignisse) hat die Gleichung

$$\pi(x) = \lim_{n \to \infty} b_{n,p}(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

Die **Normalverteilung** ist dann eine hinreichend genaue Approximation der Binomialverteilung, wenn die Laplace-Bedingung $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ erfüllt ist. Eine Normalverteilung ist durch die Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - n \cdot p}{\sigma}\right)^2}$ gekennzeichnet (Gaußsche Glockenkurve).

(d) Hypergeometrische Verteilung

Bei Bernoulli-Experimenten und der Binomialverteilung war Bedingung, daß jeder Versuch unter denselben Voraussetzungen abläuft, d.h. die Verteilung war vergleichbar mit dem „Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen".

Bei vielen Versuchen ist diese Bedingung unrealistisch und daher vielmehr das Modell des „Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen" anwendbar.

In einer Urne mit N Kugeln seien M Kugeln durch eine Eigenschaft E (z.B. bestimmte Farbe) ausgezeichnet. Aus der Urne werden n Kugeln zufällig und „ohne Zurücklegen" herausgegriffen. Die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen n Kugeln die Anzahl X mit der Eigenschaft E gleich k ist, berechnet sich mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Eine Zufallsvariable heißt **hypergeometrisch** verteilt mit den Parametern N, M und n, wenn gilt:

$$P(X = k) = h_n(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Die Formel läßt sich aus der Laplace-Wahrscheinlichkeit herleiten. Es sollen k Kugeln mit der Eigenschaft E, also aus den vorhandenen M Kugeln, gezogen werden und daher gleichzeitig n–k Kugeln aus den N-M anderen Kugeln. Die Zahl der günstigen Ziehungsmöglichkeiten ist also: $\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$

Die Gesamtzahl aller möglichen Fälle ergibt sich durch n-maliges Ziehen aus N Kugeln mit: $\binom{N}{n}$

Für den Erwartungswert und die Varianz der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern N, M und n gelten folgende Formeln:

Erwartungswert bei einer hypergeometrischen Verteilung $E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$

Varianz bzw. **Standardabweichung**: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}; \sigma = \sqrt{V(X)}$

Der Faktor $\frac{N-n}{N-1}$ heißt Endlichkeitskorrektur. Für $N \to \infty$ strebt dieser Faktor gegen 1 und die Varianz wird identisch mit jener einer Binomialverteilung mit $p = \frac{M}{N}$.

Die Binomialverteilung kann daher auch als Grenzverteilung der hypergeometrischen Verteilung aufgefaßt werden. Wenn aus einer genügend großen Grundgesamtheit (Umfang N) eine relativ kleine Stichprobe (Umfang n) ausgewählt wird, kann die hypergeometrische Verteilung durch die rechnerisch einfachere Binomialverteilung approximiert werden: Richtwert: $n \leq 0{,}1 \cdot N$

***Beispiel**: Berechnen Sie für das Zahlenlotto „6 aus 45“ die Gewinnwahrscheinlichkeit für:*

6 Richtige

5 Richtige + Zusatzzahl

5 Richtige + eine falsche Zahl

4 Richtige + zwei falsche Zahlen

3 Richtige + drei falsche Zahlen

kein Gewinn

- 6 Richtige: $N = 45; M = 6; n = 6; k = 6$

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8\,145\,060} = 0{,}00000012$$

- 5 Richtige + Zusatzzahl: Aus M = 6 werden k = 5 genommen, die eine Zusatzzahl wird auch gewählt und aus den noch vorhandenen 38 Nieten wird keine gewählt.

$$P(X = 5 + ZZ) = \frac{\left[\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \binom{38}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{6}{8\,145\,060} = 0{,}00000074$$

- 5 Richtige: Aus M = 6 werden k = 5 genommen, die eine Zusatzzahl wird nicht gewählt und aus den noch vorhandenen 38 Nieten wird eine gewählt.

$$P(X=5)=\frac{\left[\binom{6}{5}\cdot\binom{1}{0}\right]\cdot\binom{38}{1}}{\binom{45}{6}}=\frac{228}{8\,145\,060}=0{,}00002799$$

- 4 Richtige: $N=45; M=6; n=6; k=4$

$$P(X=4)=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}}=\frac{15\cdot 741}{8\,145\,060}=0{,}001364$$

- 3 Richtige: $N=45; M=6; n=6; k=3$

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}}=\frac{20\cdot 9139}{8\,145\,060}=0{,}02244$$

- kein Gewinn: Aus M = 6 werden entweder k = 0, k = 1 oder k = 2 genommen, der Rest wird aus den Nieten gewählt.

$$P(X<3)=\frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}}+\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{45}{6}}+\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{45}{6}}=$$

$$\frac{1\cdot 3262623+6\cdot 575757+15\cdot 82251}{8145060}=0{,}97616$$

Das heißt, daß man mit 97,6% Wahrscheinlichkeit nichts gewinnt!

Der Erwartungswert beim Lotto „6 aus 45“ für die Zufallsvariable „Anzahl der Richtigen“ bestätigt dieses Ergebnis: $E(X)=\mu=6\cdot\frac{6}{45}=0{,}8$

Beispiel: *Aus einer Lieferung von 100 Transistoren, von der bekannt ist, daß 3% der Transistoren defekt sind, werden zur Probe 10 Stück entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe kein defekter Transistor bzw. genau drei defekte Transistoren gefunden werden. Berechnen Sie die Aufgabe auch durch Approximation mittels Binomialverteilung.*

3% von 100 Stück sind 3 defekte Transistoren in der gesamten Lieferung: $N = 100; M = 3; n = 10$

- kein defekter Transistor: $k = 0$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{97}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{97! \cdot 10! \cdot 90!}{10! \cdot 87! \cdot 100!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0{,}7265$$

Mit 72,65%iger Wahrscheinlichkeit ist kein defekter Transistor in der Stichprobe.

- genau 3 defekte Transistoren: $k = 3$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{97}{7}}{\binom{100}{10}} = \frac{97! \cdot 10! \cdot 90!}{7! \cdot 90! \cdot 100!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0{,}00074$$

Mit 0,07%iger Wahrscheinlichkeit sind alle 3 defekten Transistoren in der entnommenen Stichprobe.

Berechnung mit Binomialverteilung: $n = 10; p = 0{,}03$

- kein defekter Transistor: $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}03^0 \cdot 0{,}97^{10} = 0{,}7374$

- genau 3 defekte Transistoren: $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^7 = 120 \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^7 = 0{,}0026$

Die Bedingung $n \leq 0{,}1 \cdot N$ ist in diesem Beispiel gerade erfüllt, aber man kann vor allem im zweiten Teil der Aufgabe einen größeren Unterschied zwischen der Berechnung mittels hypergeometrischer Verteilung und Binomialverteilung erkennen.

Anhang: Übungsbeispiele zum 15. Kapitel

15/1 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $\frac{6!\,9!}{7!\,8!} =$

b) $\frac{11 \cdot 6!}{8! - 6!} =$

c) $\frac{7! - 6!}{7! + 6!} =$

d) $\frac{9!}{10!\,4!} =$

15/2 Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} =$

b) $\frac{(2n-1)!}{(2n)!(n-1)!} =$

c) $\frac{(2n)!}{n!} =$

d) $\frac{n!}{(n-k)!} =$

15/3 Berechnen Sie, auf wie viele Arten die Teilnehmer Ihres Kurses versetzt werden können.

15/4 Berechnen Sie, auf wie viele Arten 4 Personen in einem Auto mit 4 Sitzen Platz nehmen können, wenn

a) jede im Besitz eines Führerscheins ist,

b) drei Personen im Besitz eines Führerscheins sind,

c) zwei Personen im Besitz eines Führerscheins sind,

d) nur eine Person im Besitz eines Führerscheins ist.

15/5 Berechnen Sie die Summe aller dreiziffrigen Zahlen, die sich aus den Ziffern 2, 3 und 7 bilden lassen, wenn bekannt ist, daß in jeder dieser Zahlen alle drei Ziffern auftreten.

15/6 Berechnen Sie die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von 9 Glasperlen auf einer Schnur, wenn
a) alle Perlen verschieden gefärbt sind,
b) 4 Perlen dieselbe Farbe, die übrigen 5 verschieden gefärbt sind,
c) 4 Perlen grün, 3 rot und 2 blau gefärbt sind.

15/7 Berechnen Sie die Anzahl aller fünfziffrigen Zahlen, die aus den Ziffern 4 und 7 bestehen.

15/8 Berechnen Sie die Anzahl aller Morsezeichen mit 5 Elementarzeichen, die aus 3 Punkten und 2 Strichen bestehen.

15/9 Berechnen Sie die Anzahl aller vierstelligen Zahlen, die sich mit den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn in jeder dieser vierstelligen Zahlen keine Ziffer mehrfach auftritt.

15/10 Berechnen Sie die Anzahl aller vierstelligen Zahlen, die
a) gerade sind,
b) durch 5 teilbar sind,
c) zwischen 5700 und 5800 liegen,
d) die Ziffern 1 und 3 enthalten,
wenn die Zahlen aus lauter verschiedenen Ziffern bestehen.

15/11 In einer Jugendherberge sind 6 Zimmer mit je einem Bett frei. Berechnen Sie, auf wieviele Arten 4 Wanderer auf diese Zimmer aufgeteilt werden können.

15/12 Wieviele dreiziffrige Zahlen aus verschieden Ziffern gibt es, wenn die Ziffer 0 nicht an erster Stelle vorkommen soll?

15/13 Wieviele Zahlen gibt es beim „Joker“?

15/14 Berechnen Sie die Anzahl der Morsezeichen aus 5 Elementarzeichen, die aus Punkten und Strichen bestehen.

15/15 Berechen Sie die Anzahl der vierstelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn jede Ziffer auch mehrmals vorkommen darf.

15/16 Bei einem Kombinationsschloß sind die einzelnen Einstellungen durch dreiziffrige Zahlen mit den Ziffern 1 bis 9 möglich. Berechnen Sie die Anzahl der Einstellungen.

15/17 Wie groß ist die Ziffernsumme aller zweiziffrigen Zahlen, die nur ungerade Ziffern enthalten?

15/18 Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $\binom{n}{n-2}$

b) $\binom{n+5}{n+3}$

c) $\frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$

d) $\binom{n}{k} : \binom{n-1}{k-1}$

15/19 Einem Kanditanten werden bei einer Prüfung 10 Fragen vorgelegt, von denen er drei wählen soll. Berechnen Sie die Zahl der Wahlmöglichkeiten.

15/20 In einem Geschäftshaus sind 24 Telefonapparate. Berechnen Sie, wie viele Verbindungen im Geschäftshaus hergestellt werden können.

15/21 Am ersten Kurstag begrüßen alle Teilnehmer eines Kurses einander durch Händeschütteln. Wie oft wurden bei 12 Teilnehmern die Hände geschüttelt?

15/22 Berechnen Sie die Zahl der Diagonalen eines regelmäßigen n-Ecks.

15/23 In einem Kurs sind 7 männliche und 11 weibliche Teilnehmer. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, eine Abordnung zu wählen,

a) die aus drei Teilnehmern besteht

b) die mindestens eine weibliche Teilnehmerin enthält,

c) die genau eine Teilnehmerin enthält.

15/24 Wie viele Wurfkombinationen sind beim Würfeln mit drei Würfeln möglich?

15/25 Berechnen Sie die Anzahl der Kreise, die sich durch 25 Punkte einer Ebene legen lassen, wenn folgende Lage der Punkte zueinander eintritt:

a) Genau 3 Punkte liegen auf einer Geraden,

b) Genau 4 Punkte liegen auf einem Kreis,

c) Genau 10 Punkte liegen auf einem Kreis.

15/26 Wie lautet das vierte Glied von $(3a-2b)^5$?

15/27 Wie lautet das fünfte Glied von $\left(x+\frac{1}{x}\right)^9$?

15/28 Wie heißen die Koeffizienten von x^6y^4 und x^3y^7 des Binoms $(x+y)^{10}$?

15/29 Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots-(-1)^n\cdot\binom{n}{n}=0$

15/30 Mit einem Würfel wird einmal gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) die Augenzahl ungerade,
b) die Augenzahl gerade,
c) die Augenzahl durch 3 teilbar,
d) die Augenzahl mindestens 2 ist.

15/31 In einer Urne sind 10 Kugeln, von denen 4 rot und 6 weiß sind. Mit einem Griff werden 3 Kugeln gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß alle Kugeln rot bzw. weiß sind.

15/32 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel
a) keine 6 zu werfen,
b) dreimal hintereinander eine 6 zu werfen,
c) dreimal hintereinander keine 6 zu werfen,
d) bei dreimaligem Würfeln mindestens eine 6 zu werfen.

15/33 Bei einer Feier werden zwei Personen für ein Spiel gewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß
a) die beiden Sonntagskinder sind,
b) wenigstens einer an einem Sonntag geboren ist,
c) keiner an einem Sonntag geboren ist,
d) der eine am Montag, der andere am Dienstag geboren ist.

15/34 Aus einer Urne, in der sich Lose mit den Nummern 1 bis 60 befinden, wird willkürlich ein Los gezogen. Die Nummer des Loses sei durch 8 teilbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer auch durch 6 teilbar ist?

15/35 Aus einer Urne, in der sich Lose mit den Nummern 1 bis 60 befinden, wird eine gerade Losnummer gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer auch durch 12 teilbar ist.?

15/36 Die 628 Beschäftigten eines Unternehmens verteilen sich folgendermaßen auf die Gruppen Frauen-Männer und Raucher-Nichtraucher: 329 Männer, davon 189 Raucher, 299 Frauen, davon 101 Raucher. Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

a) Ein Beschäftigter ist Raucher,

b) Ein männlicher Beschäftigter ist Raucher,

c) Ein Raucher ist weiblich,

d) Ein Beschäftigter ist weiblich,

e) Ein weiblicher Beschäftigter ist Nichtruacher.

15/37 Eine Untersuchung von 10000 Studenten auf Geschlecht (weiblich-männlich) und Augenfarbe (blau-nicht blau) führte zu folgendem Ergebnis: 4295 Frauen, davon 1076 mit blauen Augen sowie 1420 Männer mit blauen Augen. Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

a) Ein Student hat blaue Augen,

b) Ein Student ist männlich,

c) Ein Student mit blauen Augen ist männlich,

d) Ein weiblicher Stundent hat keine blauen Augen,

e) Ein blauäugiger Student ist weiblich.

15/38 Eine Versuchsperson soll aus drei Urnen je eine Kugel ziehen. Die erste Urne enthält 12 weiße und 20 schwarze Kugeln, die zweite 5 weiße und 15 schwarze, die dritte 6 weiße und 2 schwarze. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von

a) drei weißen Kugeln,

b) mindestens einer weißen Kugel,

c) genau zwei weißen Kuglen.

15/39 Aus einem Beutel mit 4 weißen und 6 schwarzen Kugeln werden mit einem Griff 2 Kuglen herausgenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine weiße und eine schwarze Kugel?

15/40 Jemand spielt in drei Lotterien mit einem Los. Die erste Lotterie hat bei 3000 Losen 1500 Gewinne, die zweite bei 2000 Losen 900 Gewinne und die dritte bei 4000 Losen 1700 Gewinne. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Spieler

a) in alle drei Lotterien gewinnt,

b) in mindestens einer Lotterie gewinnt,

c) in genau einer Lotterie gewinnt.

15/41 An Galilei wurde die Frage gerichtet, warum beim Werfen mit drei Würfeln die Augensummen 9 und 12 seltener vorkommen als die Augensummen 10 und 11. Ist diese Anfrage begründet?

15/42 Bei einer Epidemie erkranken 12% der Bevölkerung einer Stadt. Bei 4% der Erkrankten verläuft die Erkrankung tödlich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Bürger der Stadt von der Epidemie befallen wird und stirbt.

15/43 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in Familien mit drei Kindern eine Familie

a) ohne Mädchen ist,

b) mit einem Mädchen ist,

c) mit 2 Mädchen ist,

d) mit drei Mädchen ist,

wenn die Geburt eines Knaben und eines Mädchens gleichwahrscheinlich ist.

15/44 Bei der Produktion eines Artikels wurde durch eine Stichprobe festgestellt, daß 10% der Produktion als Ausschuß bezeichnet werden muß und von den verbleibenden 90% nur 30% als erste Qualität bezeichnet werden kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein beliebig herausgegriffenes Stück von erster Qualität ist.

15/45 Zeigen Sie, daß es leichter ist, bei viermaligen Würfeln mit einem Würfel eine 6 zu werfen, als bei 24maligem Würfeln mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen.

15/46 Legen Sie für die Beispiele 15/30 bis 15/45 die jeweilige Zufallsvariable fest und bestimmen Sie die möglichen x_i-Werte für diese Zufallsvariable.

15/46 Versuchen Sie für die Beispiele 15/30 bis 15/45 die jeweilige Art der Wahrscheinlichkeitsfunktion zu bestimmen.

15/47 Berechnen Sie den Erwartungswert für die mittlere Augensumme beim oftmaligen Werfen zweier Würfeln.

15/48 Ein Würfel hat 4 blaue und 2 gelbe Seitenflächen. Er wird so oft geworfen bis die obere Fläche gelbe Farbe hat, höchstens jedoch viermal. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Würfe, die erforderlich sind, daß zum ersten Mal die obere Fläche gelbe Farbe zeigt.

15/49 In einer Urne befinden sich 7 Kärtchen mit den Nummern 1 bis 7. Der Urne werden 4 Kärtchen mit einem Griff entnommen. Befinden sich unter den gezogenen Kärtchen zwei mit geraden Nummern, so erhält der Spieler ÖS 10,-, andernfalls muß er ÖS 5,- bezahlen. Ist zu diesem Glücksspiel zu raten?

15/50 Ein Würfel wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal eine Sechs auftritt, höchstens jedoch sechsmal. Berechnen Sie den Erwartungwert für die Anzahl der Würfe, die benötigt werden, um erstmals eine Sechs zu werfen.

15/51 Ermitteln Sie für das Beispiel 15/47 den Modus und den Median sowie Varianz und Standardabweichung.

15/52 Ermitteln Sie für das Beispiel 15/48 den Modus und den Median sowie Varianz und Standardabweichung.

15/53 Ermitteln Sie für das Beispiel 15/49 den Modus und den Median sowie Varianz und Standardabweichung.

15/54 Ermitteln Sie für das Beispiel 15/50 den Modus und den Median sowie Varianz und Standardabweichung.

15/55 Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E, daß

a) genau einmal die Augenzahl 6 geworfen wird,

b) genau zweimal die Augenzahl 6 geworfen wird,

c) keinmal die Augenzahl 6 geworfen wird.

15/56 Einer Warenlieferung von 600 Stück wird eine Stichprobe von 50 Stück entnommen. Aus Erfahrung weiß man, daß im Mittel 5% der Warenstücke Ausschuß sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß in der Stichprobe

a) kein Ausschuß ist,

b) genau 3 Stück Ausschuß sind,

c) mindestens 3 Stück Ausschuß sind,

d) höchstens 3 Stück Ausschuß sind.

15/57 Ein Kurs hat 15 Teilnehmer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Teilnehmer am 1. März Geburtstag haben.

15/58 Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird viermal eine Karte mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß

a) genau 3 Herz gezogen werden,

b) genau 4 Pik gezogen werden,

c) mindestens 1 Karo gezogen wird.

15/59 Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens beträgt 0,48. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei den Familien mit 3 Kindern unter den 3 Kindern

a) mindestens ein Knabe ist,

b) mindestens ein Mädchen ist.

15/60 In einer Kiste mit 50 Stück Eiern sind zwei Stück faul. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei der Entnahme von 10 Eiern

a) lauter gute Eier erhält,

b) höchstens ein schlechtes Ei erhält.

15/61 Einem Kartenspiel werden nacheinander fünf Karten ohne Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den gezogenen Karten

a) zwei Damen befinden,

b) drei Damen befinden,

c) drei Damen und zwei Könige befinden.

15/62 Eine Stadtbibliothek hat 5000 eingeschriebene Leser, von denen 40% Frauen sind. Jeder Leser hat eine Karteikarte. Man entnimmt 8 Karteikarten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den zufällig gewählten Karteikarten 3 Frauen und 5 Männernamen tragen.

15/63 Einem Verein von 20 Mitgliedern gehören 3 mit Namen Maier an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer durch das Los gewählten 4köpfigen Abordnung

a) ein Maier,

b) zwei Maier,

c) alle drei Maier,

d) kein Maier,

e) mindestens ein Maier

f) höchstens zwei Maier angehören?

15/64 Einer Sendung von 400 Antriebswellen werden 40 entnommen und ihr Durchmesser gemessen. Aus Erfahrung weiß man, daß 2% der Wellen defekt sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß unter den entnommenen Wellen keine Welle bzw. höchstens 3 Wellen defekt sind.