13. AUSBAU DER DIFFERENTIALRECHNUNG

13.1. Stetigkeit reeller Funktionen

(a) Grenzwerte von Funktionen

Im Kapitel Grenzwerte wurde bereits der Begriff des Grenzwertes einer Funktion geklärt.

Es sei f eine reelle Funktion. Wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$ mit Grenzwert z die Folge $\langle f(x_n) \rangle$ konvergent ist und für jede Folge denselben Grenzwert q besitzt, so nennt man diese Zahl q den **Grenzwert der Funktion f an der Stelle z**: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to z} f(x) = q$

Mit Hilfe dieser Definition lassen sich Grenzwerte für Funktionen, falls diese existieren, finden. Um nicht bei jeder Grenzwertberechnung von Funktionen auf Folgen zurückgreifen zu müssen, kann man für Funktionen ebenfalls Grenzwertsätze angeben.

Grenzwertsätze für Funktionen:

$$\lim_{x\to z}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to z} f(x) + \lim_{x\to z} g(x) \qquad \lim_{x\to z}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to z} f(x) - \lim_{x\to z} g(x)$$

$$\lim_{x\to z}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to z} f(x) \cdot \lim_{x\to z} g(x) \qquad \lim_{x\to z}[f(x):g(x)] = \lim_{x\to z} f(x) : \lim_{x\to z} g(x)$$

Wie das Kapitel Grenzwerte weiters gezeigt hat, ist die Formulierung „... für jede Folge $\langle x_n \rangle$ denselben Grenzwert ...“ wesentlich, da zuweilen die Grenzwerte für verschieden Folgen $\langle x_n \rangle$ verschieden sind. Im speziellen konnte zwischen rechts- und linksseitigen Grenzwerten unterschieden werden.

Strebt x gegen einen festen Wert z, so kann die Bewegung auf der Zahlengeraden **von rechts oder von links** nach z erfolgen. Man unterscheidet diese Annäherungen durch **$x \to z+$ bzw. $x \to z-$**. Ergeben sich bei der Grenzwertbildung von f(x) unterschiedliche Grenzwerte, so bezeichnet man diese als **rechtseitige und linksseitige Grenzwerte**.

Im folgenden Abschnitt wird die Unterscheidung zwischen rechts- und linksseitigen Grenzwerten bei der Untersuchung von Funktionen im Rahmen der erweiterten Kurvendiskussion von Bedeutung sein.

(b) Differenzierbarkeit von Funktionen

Die Definition des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle ermöglicht nun eine genauere Definition bezüglich der Differenzierbarkeit von Funktionen.

Eine reelle Funktion f heißt an einer Stelle x ($x \in D$) differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ existiert. Ist das der Fall, so heißt $f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ die Änderungsrate bzw. der Differentialquotient bzw. die Ableitung von f an der Stelle x.

Ist eine Funktion f an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge differenzierbar, so sagt man, die Funktion ist differenzierbar.

Betrachtet man die Herleitungen der Differentationsregeln aus dem Kapitel Einführung in die Differentialrechnung, so können diese Herleitungen mit obiger Definition exaktifiziert bzw. im nachhinein vollständig erklärt werden.

(c) Stetigkeit von Funktionen

Die Begriffe „Stetigkeit“ und „stetig“ werden im täglichen Sprachgebrauch öfters verwendet. Man nennt einen Vorgang stetig, wenn er ohne Unterbrechungen abläuft und seine einzelnen Zustände ohne Sprünge ineinander übergehen.

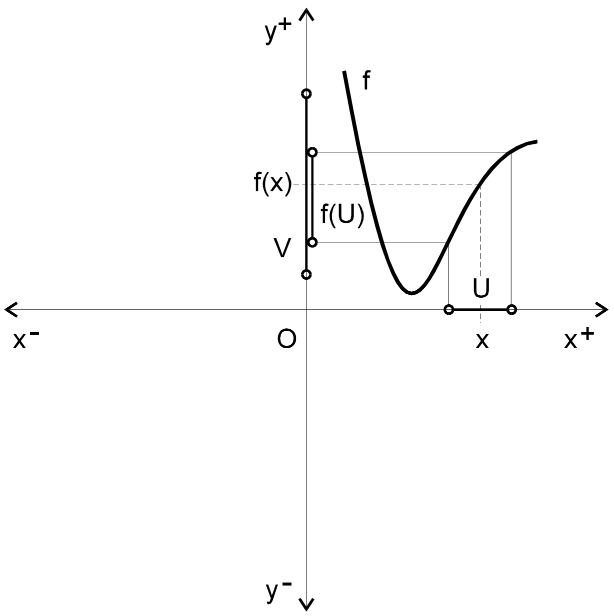
Legt man diese Aussage auf mathematische Funktionen um, so würde man eine Funktion dann als stetig bezeichnen, wenn sie einerseits keine Sprungstellen aufweist und andererseits eine kleine Änderung des Arguments x nur zu einer kleinen Änderung des Funktionswertes f(x) führt. Nachstehend folgt nun die genaue Definition der Stetigkeit von Funktionen.

Die reelle Funktion f heißt **stetig** an der Stelle x, wenn $\lim\limits_{z \to x} f(z)$ existiert und gleich dem Funktionswert f(x) ist. Ist f an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig, so sagt man, die Funktion ist stetig.

Aufgrund der obigen Definition unterscheidet man zwischen lokaler Stetigkeit - gemeint ist die Stetigkeit an einer Stelle x - und globaler Stetigkeit - gemeint ist die Stetigkeit einer Funktion in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Aus der vorigen Definition kann man die Eigenschaft der Ununterbrochenheit, also das Fehlen von Sprungstellen, einer stetigen Funktion herauslesen. Verwendet man anstatt des Grenzwertbegriffes den ursprünglichen Umgebungsbegriff zur Formulierung der Stetigkeit, so kann man die wesentliche Eigenschaft, daß eine geringe Änderung der x-Werte auch eine geringe Änderung der Funktionswerte f(x) nach sich ziehen soll, ablesen.

Eine reelle Funktion f heißt stetig an der Stelle x der Definitionsmenge D, wenn es zu jeder ε-Umgebung $V(f(x);\varepsilon)$ von f(x) eine δ-Umgebung $U(x;\delta)$ von x so gibt, daß das Bild f(U) dieser Umgebung U Teilmenge von V ist: $f(U) \subseteq V$



Um festzustellen, ob eine Funktion f an einer Stelle x stetig ist, hat man nach dieser Definition wie folgt vorzugehen:

- Man wählt eine beliebige Umgebung $V(f(x);\varepsilon)$ von f(x).
- Man ermittelt zu V eine Umgebung $U(x;\delta)$ von x so, daß alle Punkte aus U, sofern sie zur Definitionsmenge D gehören, ihre Bilder in V haben $f(U) \subseteq V$.

Damit läßt sich die Eigenschaft der Stetigkeit folgendermaßen schlagwortartig formulieren:

f stetig an der Stelle x bedeutet: $f(x + \text{wenig}) \cong f(x) + \text{wenig}$

Diese Formulierung wiederum beinhaltet auch die Unstetigkeit einer Funktion an einer Sprungstelle.

***Beispiel**:* *Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x) = 3x + 5$.*

Die Definitionsmenge für diese Funktion ist R. Wählt man ein a∈R, so gilt f(a)=3a+5. Nun wählt man eine beliebige Umgebung V(f(a);ε) von f(a):

$$V =]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[= \{y | f(a) - \varepsilon < y < f(a) + \varepsilon\}$$
$$V =]3a + 5 - \varepsilon; 3a + 5 + \varepsilon[= \{y | 3a + 5 - \varepsilon < y < 3a + 5 + \varepsilon\}$$

Nun muß zu V eine Umgebung U von a ermittelt werden, deren Bild in V enthalten ist. Als Umgebung U von a eignet sich:

$$U = \left]a - \frac{\varepsilon}{3}; a + \frac{\varepsilon}{3}\right[= \left\{x | a - \frac{\varepsilon}{3} < x < a + \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

Setzt man nämlich mit den Randpunkten von U in die Funktionsgleichung ein, so erhält man:

$$f(a - \frac{\varepsilon}{3}) = 3 \cdot \left(a - \frac{\varepsilon}{3}\right) + 5 = 3a + 5 - \varepsilon$$
$$f(a + \frac{\varepsilon}{3}) = 3 \cdot \left(a + \frac{\varepsilon}{3}\right) + 5 = 3a + 5 + \varepsilon$$

Dies sind aber genau die Randpunkte der Umgebung V. Nun bleibt noch zu zeigen, daß f(U)⊆V gilt.

$$a - \frac{\varepsilon}{3} < x < a + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$3a - \varepsilon < 3x < 3a + \varepsilon$$
$$3a + 5 - \varepsilon < 3x + 5 < 3a + 5 + \varepsilon$$
$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

In diesem Fall gilt sogar: $f(U) = V$

Die Funktion $f(x) = 3x + 5$ ist eine stetige Funktion.

Zum besseren Verständnis ist es zweckmäßig, eine genaue Definition der Unstetigkeit einer Funktion anzugeben.

Eine Funktion heißt **unstetig** an der Stelle x der Definitionsmenge D, wenn es eine Umgebung $V(f(x);\varepsilon)$ von f(x) so gibt, daß für alle Umgebungen $U(x;\delta)$ von x das Bild f(U) keine Teilmenge von V ist.

Eine Funktion ist daher an einer Stelle ihrer Defintionsmenge stetig oder unstetig. Liegt die betrachtete Stelle nicht in der Definitionsmenge, z.B. wenn der Nenner an dieser Stelle Null ist, so kann weder von Stetigkeit noch von Unstetigkeit gesprochen werden. Die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert.

Aus den Definitionen bezüglich der Differenzierbarkeit und der Stetigkeit von Funktionen läßt sich nun weiters ein Zusammenhang ablesen. Ist eine Funktion f an einer Stelle x differenzierbar, so bedeutet dies, daß der Grenzwert des Differenzenquotienten, also der Differentialquotient, existiert und daß daher die Tangente im Punkt P(x|f(x)) existiert. In einer „Spitze" oder einem „Knick" existiert die Tangente nicht, da der rechts- und linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten unterschiedlich sind.

Ebensowenig ist aber eine Funktion anschaulich an einer unstetigen Stelle x nicht differenzierbar, da auch dort rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten unterschiedlich sind. Ist also eine Funktion f an einer Stelle x differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Ist eine Funktion f an einer Stelle x differenzierbar, dann ist f an der Stelle x stetig.

Beweis: Für alle z aus der Definitionsmenge von f mit $z \neq x$ gilt: $$f(z) = f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \cdot (z - x)$$

Aufgrund der Grenzwertsätze folgt daraus: $$\lim_{z \to x} f(z) = \lim_{z \to x} \left[f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \cdot (z - x) \right] = f(x) + f'(x) \cdot 0 = f(x)$$

Somit ist f stetig an der Stelle x.

Zu beachten ist, daß die Umkehrung des obigen Satzes nicht gilt. Eine Funktion kann an einer Stelle x stetig sein, muß aber dort nicht differenzierbar sein (man denke an f(x) = |x| an der Stelle x = 0).

Für den mathematisch Ungeübten sind die Begriffe dieses Abschnitts und die Notwendigkeit der Definitionen anfänglich oft schwer verständlich. Die exakte Formulierung und Anwendung obiger Sätze sind aber zur Absicherung der bisherigen Erkenntnisse und zur Erlangung und Überprüfung weiterer Resultate unbedingt notwendig.

(d) Sätze über stetige Funktionen

Das Feststellen der Stetigkeit einer Funktion nach der Definition ist zuweilen mühsam und schwierig. Im folgenden sollen daher Aussagen, teilweise ohne Beweis, über die Verknüpfung von stetigen Funktionen getroffen werden, die die prinzipielle Vorgangsweise vereinfachen sollen.

Sind die Funktionen f und g stetig an der Stelle a, so sind auch die Funktionen f+g, f–g, f · g, f : g ($g \neq 0$) stetig an der Stelle a.

Beweis für f+g: Da f stetig an der Stelle a ist, gibt es zu jeder Umgebung V_1 von f(a) mit $V_1 = \left]f(a) - \frac{\varepsilon}{2}; f(a) + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ eine Umgebung U_1 von a, sodaß $f(U_1) \subseteq V_1$.

Ebenso gibt es zu jeder Umgebung V_2 von g(a) mit $V_2 = \left]g(a) - \frac{\varepsilon}{2}; g(a) + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ eine Umgebung U_2 mit $g(U_2) \subseteq V_2$.

Ist $U_1 \cap U_2 = U$, so gilt für alle $x \in U$:

$$(f+g)(x) < \left(f(a) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(g(a) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = (f+g)(a) + \varepsilon \text{ und } (f+g)(x) > \left(f(a) - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(g(a) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = (f+g)(a) - \varepsilon$$

und somit $(f+g)(a) - \varepsilon < (f+g)(x) < (f+g)(a) + \varepsilon$.

Aufgrund der Definition ist daher f+g an der Stelle a stetig.

Für die anderen Verknüpfungen erfolgt der Beweis analog, der folgende Satz ist für den Beweis des Produkts und des Quotienten hilfreich.

Ist die Funktion f stetig an der Stelle a und die Funktion g stetig an der Stelle b mit b = f(a), so ist auch die Kettenfunktion g(f(a)) = $f \circ g$ stetig an der Stelle a.

Beweis: Es sei h = $f \circ g$ und W eine beliebige Umgebung von h(a) = g(b). Wegen der Stetigkeit von g an der Stelle b gibt es zu jeder solchen Umgebung W eine Umgebung V von b mit $g(V) \subseteq W$.
Da f stetig an der Stelle a ist, gibt es zur Umgebung V von b = f(a) eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$.
Aus $f(U) \subseteq V$ folgt $g(f(U)) \subseteq g(V)$ und weiter $g(f(U)) \subseteq W$.
Aus $g(f(U)) = (f \circ g)(U) = h(U)$ folgt also $h(U) \subseteq W$.
Das heißt aber, daß die Verkettung von f und g stetig ist an der Stelle a.

Mit Hilfe der vorigen Sätze lassen sich die folgenden Sätze über die Stetigkeit einiger spezieller Funktionen herleiten und beweisen.

Die konstante Funktion $f(x) = d$ und die lineare Funktion $f(x) = kx+d$ sind stetige Funktionen.

Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist eine stetige Funktion.

Aufgrund dieses Satzes läßt sich die Stetigkeit aller Polynomfunktionen zeigen.

Jede Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ist stetig.

Daher ist aber auch der Quotient zweier Polynomfunktionen in der Definitionsmenge stetig.

Jede rationale Funktion $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, worin P_n und Q_m Polynomfunktionen sind und $Q_m(x) \neq 0$, ist stetig in ihrer Defintionsmenge.

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in N$ ist stetig in R_0^+.

Die Winkelfunktionen sin(x), cos(x) und tan(x) sind in ihren jeweiligen Definitionsmengen stetig.

Abschließend sollen noch ein Satz angeführt werden, der ausdrückt, was man anschaulich mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet, dessen exakter Beweis aber einer tieferen Beschäftigung mit der Materie bedarf.

Zwischenwertsatz: Ist f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a;b] stetige Funktion und gilt $f(a) \neq f(b)$, so nimmt die Funktion in diesem Intervall jeden Wert zwischen f(a) und f(b) mindestens einmal an.

Dieser Satz drückt letztendlich die Ununterbrochenheit einer stetigen Funktion in einem abgeschlossenen Intervall aus. Haben im speziellen f(a) und f(b) unterschiedliches Vorzeichen, so folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß die Funktion in dem Intervall mindestens eine Nullstelle hat (**Nullstellensatz**).

(e) Stetige Fortsetzung von Funktionen

Die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ ist bei x = –1 nicht definiert, da der Nenner gleich Null ist. Die Definitionsmenge lautet also D = R \ {–1}. Die obige Funktion kann man zu $f(x)=x-2$ umformen. Dennoch hat die Funktion die Definitionsmenge D = R \ {–1}. Der Graph von f enthält also nicht den Punkt P(–1|c), $c\in R$.

Jede Funktion $\bar{f}$ mit $$\bar{f}=\begin{cases} x-2 & \text{für } x\neq -1 \\ c & \text{für } x=1 \end{cases}$$

stimmt mit f in der ursprünglichen Definitionsmenge D = R \ {–1} überein und ist zusätzlich an der Stelle –1 definiert. Wählt man insbesondere c = –3, so wird die „Lücke“, die der Graph von f an der Stelle –1 aufweist, geschlossen. Man bezeichnet die Funktion $\bar{f}$ als eine Fortsetzung der Funktion f in die Stelle –1.

Ist f eine Funktion mit der Definitionsmenge D und a eine Stelle, die nicht zu D gehört, so heißt eine Funktion $\bar{f}$ eine **Fortsetzung** in die Stelle a, wenn $\bar{f}$ auf $D\cup\{a\}$ definiert ist und in D mit f übereinstimmt.

Nun kann wie im obigen Beispiel der Fall eintreten, daß die Fortsetzung in die Stelle a an dieser Stelle a stetig ist. Dann bezeichnet man die Fortsetzung als stetige Fortsetzung in die Stelle a.

Da sich nur für c = –3 eine stetige Fortsetzung der obigen Funktion finden läßt, liegt die Vermutung nahe, daß die stetige Funktion, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist.

Ist f eine reelle Funktion mit der Definitionsmenge $D=R\setminus\{a\}$ und a ein Häufungspunkt von D, so gibt es höchstens eine an der Stelle a stetige Fortsetzung von f.

Beweis: Gäbe es zwei verschiedene, an der Stelle a stetige Fortsetzungen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$, dann würde gelten:

$$\bar{f}_1(x)=\bar{f}_2(x)=f(x) \text{ und } \bar{f}_1(a)\neq\bar{f}_2(a), \text{ etwa } \bar{f}_1(a)>\bar{f}_2(a)$$

Die Funktion $g=\bar{f}_1-\bar{f}_2$ ist als Differenz zweier an der Stelle a stetiger Funktionen ebenfalls stetig.

Da g(a) an der Stelle a stetig ist und g(a)>0, gibt es eine Umgebung von a, sodaß für alle x aus dieser Umgebung $g(x)=\bar{f}_1(x)-\bar{f}_2(x)>0$.

Da a Häufungspunkt ist, gibt es in der Umgebung mindestens einen von a verschiedenen Punkt p.

Für diesen gilt nun $\bar{f}_1(p)-\bar{f}_2(p)>0$ und $f(p)=\bar{f}_1(p)=\bar{f}_2(p)$.

Dies ist aber nun ein Widerspruch und daher gibt es nur eine stetige Fortsetzung.

(f) Die Regel von de l´Hospital

Die Regel für den Grenzwert des Quotienten zweier Funktionen $\lim\limits_{x\to z}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to z} f(x) : \lim\limits_{x\to z} g(x)$ kann nur dann angewendet werden, wenn $\lim\limits_{x\to z} g(x) \neq 0$ gilt. Der Grenzwert des Quotienten kann jedoch auch existieren, wenn $\lim\limits_{x\to z} g(x) = 0$ gilt. Dies kann zum Beispiel der Fall sein, wenn auch $\lim\limits_{x\to z} f(x) = 0$ ist und der Quotient also die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

In solchen Fällen kann die sogenannte Regel von de l´Hospital angewendet werden.

> Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung der Stelle a differenzierbar mit $g´(x)\neq 0$ in dieser Umgebung. Ferner sei $\lim\limits_{x\to z} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to z} g(x) = 0$. Existiert dann der Grenzwert $\lim\limits_{x\to z}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann gilt: $\lim\limits_{x\to z}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to z}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **(Regel von de l´Hospital)**

Beispiel: *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$.

Durch Anwendung der obigen Regel ergibt sich $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$

Der gesuchte Grenzwert hat den Wert 1.

Hat der neue Grenzwert mit den Ableitungen wieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so muß man den Rechenvorgang wiederholen.

Die Regel von de l´Hospital gilt auch für die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ und auch für die Grenzwertbildungen $x\to +\infty$ bzw. $x\to -\infty$.

Weitere unbestimmte Formen sind $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, die sich jedoch alle auf die Fälle $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ durch entsprechende Umformung zurückführen lassen.

13.2. Kurvendiskussion rationaler Funktionen

(a) Definition

Sind P_n und Q_m Polynomfunktionen mit einer Variablen, so heißt die Funktion $f(x) = \frac{P_n}{Q_m}$ mit der Definitionsmenge $D = R \setminus \{x | Q_m(x) = 0\}$ **rationale Funktion**.

In dieser Schreibweise ist n und m der Grad des jeweiligen Polynoms. Ist m gleich Null, so ist die Funktion eine ganzrationale Funktion bzw. eine gewohnte Polynomfunktion. Die Menge der ganzrationalen Funktionen ist also eine Teilmenge der Menge der rationalen Funktionen. Gilt $m \neq 0$, so bezeichnet man die rationale Funktion auch als gebrochenrationale Funktion. Ist dabei der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ($n<m$), so spricht man von einer echt gebrochenen rationalen Funktion, andernfalls ($n \geq m$) liegt eine unecht gebrochene rationale Funktion vor.

Jede rationale Funktion ist in ihrer Definitionsmenge stetig und beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen sind wieder rationale Funktionen.

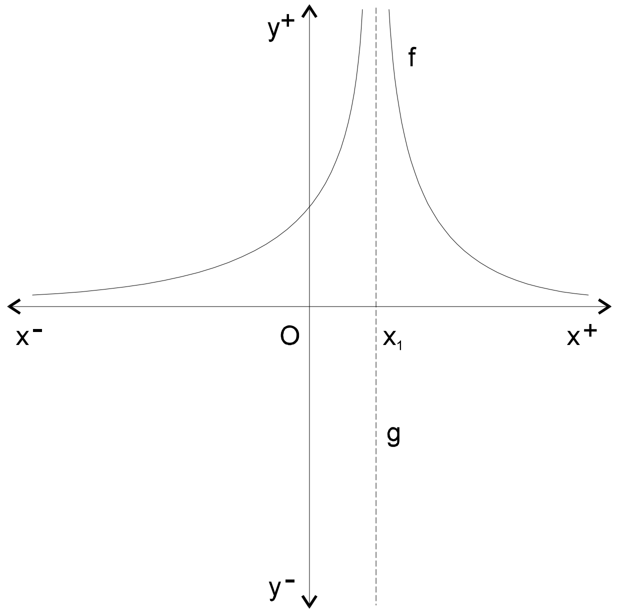
(b) Verhalten in der Nähe der Defintionslücken

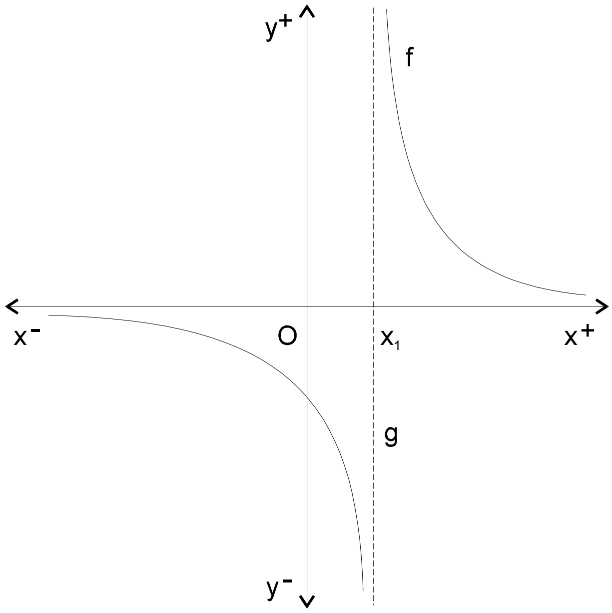
An den Nullstellen von $Q_m(x)$ ist die gebrochenrationale Funktion nicht definiert. Von Stetigkeit oder Unstetigkeit kann an diesen Stellen nicht gesprochen werden. Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms Q_m, so kann zwischen zwei Fällen unterschieden werden.

1. Fall: $P_n(x_1) \neq 0$, z.B. $P_n(x_1) = c$

Da für den Grenzwert $\lim_{x \to x_1} \left| \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \right| = \infty$ gilt, hat die Funktion $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ an der Stelle x_1 eine Unendlichkeitsstelle, die auch Polstelle (kurz: Pol) genannt wird. Der Graph der Funktion schmiegt sich daher für $x \to x_1$ von beiden Seiten immer mehr an die Gerade g: $x = x_1$ an. Diese Gerade ist einer zur y-Achse parallele Asymptote des Graphen der Funktion. Je nachdem, ob die Funktionswerte von f(x) links und rechts der Asymptote gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben, spricht man von einer Polstelle ohne oder mit Vorzeichenwechsel.

Die beiden nachfolgenden Graphen zeigen einen Pol ohne und mit Vorzeichenwechsel.





Da x_1 eine Nullstelle von $Q_m(x)$ ist, kann man den Linearfaktor $(x–x_1)$ abspalten: $Q_m(x) = (x–x_1)\cdot Q_{m-1}(x)$

Ist x_1 eine q-fache Nullstelle von $Q_m(x)$, so gilt: $Q_m(x) = (x–x_1)^q\cdot v(x)$

Hierbei ist $v(x)$ das verbleibende Polynom nach Abspaltung des Linearfaktors $(x–x_1)^q$ mit $v(x_1) \neq 0$. Man nennt dann x_1 einen Pol q-ter Ordnung oder einen q-fachen Pol.

2. Fall: $P_n(x_1) = 0$

Ist x_1 eine q-fache Nullstelle von $Q_m(x)$ und eine p-fache Nullstelle von $P_n(x)$, so hat der Funktionsterm der rationalen Funktion die Gestalt:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{(x-x_1)^p \cdot u(x)}{(x-x_1)^q \cdot v(x)} = (x-x_1)^{p-q} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$$

Hierbei sind $u(x)$ und $v(x)$ die verbleibenden Polynome nach Abspaltung der jeweiligen Linearfaktoren mit $u(x_1) \neq 0$ und $v(x_1) \neq 0$. Es gibt nun drei Möglichkeiten bezüglich p und q:

Gilt p = q, so folgt $$\lim_{x\to x_1} f(x) = \lim_{x\to x_1} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x_1)}{v(x_1)} = y_1 .$$

In diesem Fall ist $\frac{u}{v}$ eine stetige Fortsetzung von f in die Stelle x_1.

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2}\text{, } D = R \setminus \{-2\}$$

$$f(x)=\frac{(x+2)(x^2+1)}{x+2}=x^2+1$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=5$$

Die Funktion ist in den Punkt P(–2|5) stetig fortsetzbar.

Gilt p>q, so folgt
$$\lim_{x\to x_1} f(x)=0\cdot\frac{u(x_1)}{v(x_1)}=0\,.$$

Auch in diesem Fall ist $\frac{u}{v}$ eine stetige Fortsetzung von f in die Stelle x_1.

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x}\text{, } D = R \setminus \{0\}$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot(x-2)}{x}=x\cdot(x-2)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

Die Funktion ist in den Punkt P(0|0) stetig fortsetzbar.

Gilt p<q, so folgt
$$\lim_{x\to x_1} f(x)=\lim_{x\to x_1}\frac{1}{(x-x_1)^{q-p}}\cdot\lim_{x\to x_1}\frac{u(x)}{v(x)}=(\pm)\infty$$

In diesem Fall hat die Funktion bei x_1 einen Pol, abhängig von den Vorzeichen der Funktionswerte links und rechts vom Pol ergibt sich ein Pol ohne oder mit Vorzeichenwechsel (daher (±) ∞).

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}\text{, } D = R \setminus \{3\}$$

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-3)}=\frac{x+2}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)\equiv\frac{+5}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x)\equiv\frac{+5}{-0}=-\infty$$

Die Funktion hat an der Stelle 3 einen Pol mit Vorzeichenwechsel.

(c) Verhalten für |x| → ∞

Allgemein kann man den Funktionsterm der rationalen Funktion anschreiben als:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

Für $x \neq 0$ kann der Funktionsterm von f wie folgt umgeformt werden:

$$f(x)=\frac{x^n\cdot\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\cdot\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^n}\right)}=x^{n-m}\cdot\frac{r(x)}{s(x)}$$

Es sind nun drei Fälle bezüglich n und m zu unterscheiden.

1. Fall: $n = m,\ \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=1\cdot\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{a_n}{b_m}$

Der Graph der Funktion hat die zur x-Achse parallele Gerade $g\colon\ y=\frac{a_n}{b_m}$ als Asymptote.

***Beispiel**:* $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9},\ D = R \setminus \{3\}$

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-3)}=\frac{x+2}{x-3}=\frac{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\frac{1}{1}=1$$

Der Graph hat die Asymptote g: y = 1.

2. Fall: $n < m,\ \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^{m-n}}\cdot\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{r(x)}{s(x)}=0\cdot\frac{a_n}{b_m}=0$

Der Graph der Funktion hat also die x-Achse als Asymptote.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2},\ D = R \setminus \{1\}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

Der Graph hat die Asymptote g: y = 0 (x-Achse).

3. Fall:

$$n > m,\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{|x|\to\infty} \frac{r(x)}{s(x)} = (\pm)\ \infty$$

Die Funktionswerte der Funktion nähern sich mit wachsendem x-Werten immer mehr $+\infty$ oder $-\infty$. Da n>m läßt sich durch Herausheben mittels Polynomdivision der Funktionsterm wie folgt umformen:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{H_{n-m}(x) \cdot Q_m(x) + R(x)}{Q_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

Hierbei ist $H_{n-m}(x)$ das Polynom, das sich nach Herausheben von $Q_m(x)$ aus $P_n(x)$ ergibt, und R(x) der Rest nach der Polynomdivision.

Bildet man nun den Grenzwert von $f(x) - H_{n-m}(x)$ für $|x| \to \infty$, so ergibt sich:

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(f(x) - H_{n-m}(x)\right) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{R(x)}{Q_m(x)} = 0$$

Das Polynom $H_{n-m}(x)$ ist also Asymptote der Funktion für $|x| \to \infty$, da die Differenz $f(x) - H_{n-m}(x)$ den Grenzwert Null hat.

Abhängig von n und m ist das Polynom H(x) eine schräge Gerade (n = m+1) oder eine krummlinige Asymptote ($n \geq m+2$).

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2},\ D = R \setminus \{-2\}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(f(x) - (x^2 - 2x + 4)\right) = \lim_{|x|\to\infty} -\frac{8}{x+2} = 0$$

Der Graph der Funktion hat die krummlinige Asymptote a: $x^2 - 2x + 4$.

13.3. Kurvendiskussion transzendenter Funktionen

Die Kurvendiskussion transzendenter Funktionen wie die der Winkelfunktionen oder der Exponential- und Logarithmusfunktion soll hier gesondert behandelt werden, da sie einerseits aufgrund ihrer Periodizität (Winkelfunktionen) und des Auftretens von Asymptoten (Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion) teilweise schwierig durchzuführen sind. Bei periodischen Funktionen können nämlich unbegrenzt viele Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte auftreten.

In der Technik treten oft Kombinationen von Exponentialfunktionen und Winkelfunktionen auf, z.B. zur Beschreibung gedämpfter Schwingungen. Daher ist der folgende Abschnitt in die Kurvendiskussion von Winkelfunktionen, von Exponentialfunktionen und von Kombinationen dieser beiden Funktionstypen gegliedert. Da eine umfassende Abhandlung dieser Kurvendiskussionen im Rahmen dieses Skriptums nicht möglich ist, wird die Vorgangsweise jeweils anhand eines möglichst repräsentativen Beispiels gezeigt.

(a) Kurvendiskussion der Winkelfunktionen

Da alle Winkelfunktionen periodisch sind, ist es zur Diskussion dieser Funktionen nur nötig, sich einmal allgemein die jeweilige Periode zu verdeutlichen. Eine periodische Funktion mit der Periode p ist allgemein eine Funktion, für die f(x+p) = f(x) gilt. Da die Winkelfunktionen eigentlich über das Bogenmaß definiert sind, muß die Variable x im Bogenmaß verstanden werden.

sin(x):	Periode:	2π rad	= 360°
cos(x):	Periode:	2π rad	= 360°
tan(x):	Periode:	π rad	= 180°

sin(x):	Nullstellen:	sin(x) = 0	$k\cdot\pi = k\cdot 180°$
	Extremstellen:	sin´(x) = cos(x) = 0	$(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = (2k+1)\cdot 90°$
	Wendestellen:	sin´´(x) = –sin(x) = 0	$k\cdot\pi = k\cdot 180°$

Die Sinusfunktion ist in ihrer gesamten Definitionsmenge D = R stetig. Wie oben ersichtlich, sind die Nullstellen gleichzeitig auch Wendepunkte der Funktion. Die Funktion ist in allen Intervallen $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ streng monoton zunehmend und in allen Intervallen $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ streng monoton abnehmend.

cos(x):	Nullstellen:	cos(x) = 0	$(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = (2k+1)\cdot 90°$
	Extremstellen:	cos´(x) = –sin(x) = 0	$k\cdot\pi = k\cdot 180°$
	Wendestellen:	cos´´(x) = –cos(x) = 0	$(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = (2k+1)\cdot 90°$

Die Kosinusfunktion ist in ihrer gesamten Definitionsmenge D = R stetig. Wie oben ersichtlich sind die Nullstellen gleichzeitig auch Wendepunkte der Funktion. Die Funktion ist in allen Intervallen $\left[(2k+1)\pi;(2k+2)\pi\right]$ streng monoton zunehmend und in allen Intervallen $\left[2k\pi;(2k+1)\pi\right]$ streng monoton abnehmend.

tan(x):	Nullstellen:	tan(x) = 0	$k\cdot\pi = k\cdot 180°$
	Extremstellen:	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$	keine Extremstellen
	Wendestellen:	$\tan''(x) = -\frac{2}{\cos^3(x)} = 0$	keine Wendestellen

Die Tangensfunktion ist für die Winkel $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ nicht definiert, sie ist aber in ihrer Definitionsmenge $D = R \setminus \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$ stetig. Die Funktion ist in allen Intervallen $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ streng monoton zunehmend. Die Funktion hat an den Stellen $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ Pole mit Vorzeichenwechsel.

Ist die zu diskutierende Funktion eine zusammengesetzte Funktion, so müssen zuweilen die Summensätze angewendet werden, um zu einem Ergebnis zu gelangen. Darüberhinaus ist aufgrund der Periodizität der Winkelfunktionen der Bereich, der für die Kurvendiskussion interessant ist, zumeist auf das Intervall [0;2π] eingeschränkt.

Das nachfolgende Beispiel beschränkt sich auf die Ermittlung der Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte. Das Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten ist bei Bedarf mittels dieser Stellen leicht zu bestimmen.

***Beispiel**:* *Führen Sie bei der Funktion $f(x) = sin(x) - \frac{1}{2} sin(2x)$ eine Kruvendiskussion im Intervall [0;2π] durch.*

Da keine Quotientenfunktion vorliegt, ist diese Funktion in [0;2π] stetig und beliebig oft differenzierbar. Es gibt keine Pole und keine Lücken und daher auch keine Asymptoten. Die Funktion hat folgende Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sin(x) - \frac{1}{2} sin(2x) \\
f'(x) &= cos(x) - cos(2x) \\
f''(x) &= -sin(x) + 2\,sin(2x) \\
f'''(x) &= -cos(x) + 4\,cos(2x)
\end{aligned}
$$

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
0 &= sin(x) - \frac{1}{2} sin(2x) \\
0 &= sin(x) - sin(x) \cdot cos(x) \\
0 &= sin(x) \cdot (1 - cos(x)) \\
(sin(x) = 0) &\vee (1 - cos(x) = 0) \\
(x = 0;\pi;2\pi) &\vee (x = 0;2\pi) \\
N_1(0|0);\, &N_2(\pi|0);\, N_3(2\pi|0)
\end{aligned}
$$

Zur Ermittlung der Nullstellen wurde der Zusammenhang sin(2x) = 2sin(x)·cos(x) aus dem Kapitel Trigonometrie verwendet.

Extremstellen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
0 &= cos(x) - cos(2x) \\
0 &= cos(x) - cos^2(x) + sin^2(x) \\
0 &= cos(x) - cos^2(x) + 1 - cos^2(x) \\
0 &= 2\,cos^2(x) - cos(x) - 1 \\
cos(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}
\end{aligned}
$$

$$(cos(x) = 1) \ \vee \ (cos(x) = -\frac{1}{2})$$
$$(x = 0;2\pi) \ \vee \ (x = \frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3})$$
$$f''(0) = 0; f''(2\pi) = 0; f''(\frac{2\pi}{3}) < 0; f''(\frac{4\pi}{3}) > 0$$
$$H\left(\frac{2\pi}{3}|\frac{3\sqrt{3}}{4}\right); T\left(\frac{4\pi}{3}|-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Zur Ermittlung der Extremstellen wurden die Zusammenhänge cos(2x) = cos^2(x)–sin^2(x) und weiters sin^2(x) = 1–cos^2(x) verwendet. Die quadratische Gleichung wurde anschließend nach cos(x) gelöst. Erst nach Einsetzen in der 2. Ableitung lassen sich Hoch- und Tiefpunkte bestimmen.

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$
$$0 = -sin(x) + 2\,sin(2x)$$
$$0 = -sin(x) + 4\,sin(x) \cdot cos(x)$$
$$0 = sin(x) \cdot (-1 + 4\,cos(x))$$
$$(sin(x) = 0) \ \vee \ (-1 + 4\,cos(x) = 0)$$
$$(x = 0;\pi;2\pi) \ \vee \ (x = 1{,}32;4{,}97)$$
$$f'''(0) \neq 0; f'''(\pi) \neq 0; f'''(2\pi) \neq 0; f'''(1{,}32) \neq 0; f'''(4{,}97) \neq 0;$$
$$W_1(0|0); W_2(1{,}32|0{,}73); W_3(\pi|0); W_4(4{,}97|-0{,}73); W_5(2\pi|0)$$

Zur Ermittlung der Wendestellen wurde der Zusammenhang sin(2x) = 2sin(x)·cos(x) verwendet. Zu beachten ist, daß die Lösung der Gleichung –1+4cos(x)=0 ebenfalls in Radianten anzugeben ist, also genau genommen 1,32rad und 4,97rad. Erst nach Einsetzen in der 3. Ableitung können die Wendestellen bestimmt werden.

Da die Sinusfunktion die Periode 2π besitzt, wiederholen sich Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen mit dieser Periode. Es genügt also die Kurvendiskussion im angegebenen Intervall durchzuführen.

(b) Kurvendiskussion der Exponential- und Logarithmusfunktion

Aus den Exponentialfunktionen der allgemeinen Form $f(x) = a^x$ soll hier die **natürliche Exponential-funktion** $f(x) = e^x$ herausgegriffen werden. Darüberhinaus läßt sich jede Exponentialfunktion letztendlich auf eine natürliche Exponentialfunktion überführen, denn es gilt $f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

Die Definitionsmenge für die natürliche Exponentialfunktion sind die reellen Zahlen, die Wertemenge ist R^+. Die Funktion ist streng monoton zunehmend; sie besitzt keine Nullstellen, keine Lücken und keine Pole.

Der Graph der Funktion verläuft komplett oberhalb der x-Achse und enthält immer den Punkt P(0|1). Da $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ gilt, ist die x-Achse auch Asymptote. Weiters gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, die Funktionswerte werden bei zunehmenden x-Werten unbegrenzt groß.

Die natürliche Exponentialfunktion ist eine stetige Funktion, beliebig oft differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = e^x$. Die natürliche Exponentialfunktion ist also mit allen ihren Ableitungsfunktionen identisch.

Die vielfachen Anwendungsmöglichkeiten der Exponentialfunktion wurden bereits im entsprechenden Abschnitt geklärt. Darüberhinaus beschreiben Exponentialfunktionen in der Physik oft in Kombination mit Winkelfunktionen sogenannte gedämpfte Schwingungen.

***Beispiel**: Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 3xe^{-x+1}$ eine Kurvendiskussion durch.*

Die umfassendste Definitionsmenge dieser Funktion ist R. Die Funktion ist als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion. Die Funktion hat folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3xe^{-x+1} \\ f'(x) &= 3e^{-x+1}(1-x) \\ f''(x) &= 3e^{-x+1}(x-2) \\ f'''(x) &= 3e^{-x+1}(3-x) \end{aligned}$$

Die Ableitungen wurden mit der Produkt- und der Kettenregel ermittelt. Sucht man die Nullstellen einer dieser Funktionen, so ist zu beachten, daß die Exponentialfunktion selbst keine Nullstelle besitzt und daher nur dann Nullstellen auftreten, wenn einer der Faktoren den Wert Null annimmt.

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$3xe^{-x+1} = 0$$
$$3x = 0$$
$$x = 0$$
$$N(0|0)$$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$
$$3e^{-x+1}(1-x) = 0$$
$$1-x = 0$$
$$x = 1$$
$$f''(1) = -3$$
$$H(1|3)$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$
$$3e^{-x+1}(x-2) = 0$$
$$x-2 = 0$$
$$x = 2$$
$$f'''(2) \neq 0$$
$$W(2|\frac{6}{e})$$

Verhalten für $|x| \to \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 3xe^{-x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^{x-1}} = 0$$

Die x-Achse ist also Asymptote des Funktionsgraphen.

Die weiteren Punkte der Diskussion der Funktion wie z.B. Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten sind nun leicht durchzuführen.

Die obige Funktion ist allgemein von der Form $f(x) = (a+bx)\cdot e^{-\delta x}$ mit $a,b,\delta \in R$ ($\delta>0$). Diese Funktion beschreibt den Grenzfall einer gedämpften aperiodischen Bewegung; das ist ein Schwingungsvorgang, der nach einer Auslenkung abklingt.

Auch bei den Logarithmusfunktionen der allgemeinen Form $f(x) = \log_a(x)$ soll nur die **natürliche Logarithmusfunktion** $f(x) = \ln(x)$, also jene mit der Basis e, herausgegriffen werden. Darüberhinaus läßt sich jede Logarithmusfunktion letztendlich auf eine natürliche Logarithmusfunktion überführen, denn es gilt $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Die Definitionsmenge für die Logarithmusfunktion ist R^+, die Wertemenge ist R. Die Funktion ist streng monoton zunehmend, sie besitzt eine Nullstelle bei N(1|0).

Der Graph der Funktion verläuft komplett rechts von der y-Achse. Da $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ gilt, ist die y-Achse auch Asymptote. Weiters gilt $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, die Funktionswerte werden bei zunehmenden x-Werten unbegrenzt groß.

Die natürliche Logarithmusfunktion ist eine stetige Funktion, sie ist differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$. Sie ist darüberhinaus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

***Beispiel**:* *Führen Sie bei der Funktion $f(x) = x \cdot (\ln(x) - 1)$ eine Kurvendiskussion durch.*

Die umfassendste Definitionsmenge dieser Funktion ist R^+. Die Funktion ist stetig und hat folgende Ableitungen:

$$f(x) = x \cdot (\ln(x) - 1)$$
$$f'(x) = \ln(x)$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$x \cdot (\ln(x) - 1) = 0$$
$$(x = 0) \vee (\ln(x) - 1 = 0)$$
$$(x = 0) \vee (x = e)$$
$$N(e|0)$$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$
$$ln(x) = 0$$
$$x = 1$$
$$f''(1) = 1$$
$$T(1|-1)$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{1}{x} = 0$$

keine Wendestellen

Grenzwertverhalten

$$\lim_{x \to 0} x \cdot (ln(x) - 1) = \lim_{x \to 0} \frac{ln(x) - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot (ln(x) - 1) = +\infty$$

Die Funktion ist also in den Punkt P(0|0) stetig fortsetzbar.

Die weiteren Punkte der Diskussion der Funktion wie z.B. Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten sind nun leicht durchzuführen.

(c) Kurvendiskussion von kombinierten transzendenten Funktionen

Abschließend zu diesem Abschnitt soll noch eine Kurvendiskussion einer aus Winkel- und Exponentialfunktion kombinierten Funktion gezeigt werden.

Funktionen dieser Art beschreiben in der Physik sogenannten gedämpfte Schwingungen und haben die allgemeine Form $f(x) = a_0 \cdot e^{-\delta x} \cdot \sin(\omega x + \varphi)$. Sie gehen aus der Funktion für eine ungedämpfte Schwingung $f(x) = a \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ hervor, wenn die Amplitude a sich mit der Zeit nach dem Gesetz $a = a_0 \cdot e^{-\delta x}$ ändert. Die Konstante δ (δ>0) heißt in diesem Zusammenhang Dämpfungsfaktor.

Das folgende Beispiel beschränkt sich wieder auf die Ermittlung von Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen.

***Beispiel**:* *Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 2e^{-0,3x} \cdot sin(2x)$ eine Kurvendiskussion durch.*

Da die Variable x bei einer gedämpften Schwingung für die Zeit steht, macht die Diskussion nur über der Definitionsmenge R_0^+ Sinn. Die Funktion ist als Produkt stetiger Funktionen wieder stetig. Sie hat folgende Ableitungen:

$$f(x) = 2e^{-0,3x} \cdot sin(2x)$$
$$f'(x) = 2e^{-0,3x} \cdot (2\,cos(2x) - 0,3\,sin(2x))$$
$$f''(x) = -2e^{-0,3x} \cdot (3,91\,sin(2x) + 1,2\,cos(2x))$$
$$f'''(x) = 2e^{-0,3x} \cdot (3,573\,sin(2x) - 7,46\,cos(2x))$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$2e^{-0,3x} \cdot sin(2x) = 0$$
$$sin(2x) = 0$$
$$2x = k\pi \quad (k \in N)$$
$$x = \frac{k\pi}{2}$$
$$N_1(0|0); N_2(1,571|0); N_3(3,142|0); N_4(4,712|0); \ldots$$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$
$$2e^{-0,3x} \cdot (2\,cos(2x) - 0,3\,sin(2x)) = 0$$
$$2\,cos(2x) - 0,3\,sin(2x) = 0$$
$$tan(2x) = \frac{2}{0,3}$$
$$2x = 1,422 + k\pi \quad (k \in N)$$
$$x = 0,711 + \frac{k\pi}{2}$$
$$x_1 = 0,711; x_2 = 2,282; x_3 = 3,853; x_4 = 5,423; \ldots$$
$$f''(x_1) < 0; f''(x_2) > 0; f''(x_3) < 0; f''(x_4) > 0; \ldots$$
$$H_1(0,711|1,598); H_2(3,853|0,623); \ldots$$
$$T_1(2,282|-0,998); T_2(5,423|-0,389); \ldots$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$
$$-2e^{-0,3x} \cdot (3{,}91\sin(2x) + 1{,}2\cos(2x)) = 0$$
$$3{,}91\sin(2x) + 1{,}2\cos(2x) = 0$$
$$\tan(2x) = -\frac{1{,}2}{3{,}91}$$
$$2x = -0{,}298 + k\pi \quad (k \in N)$$
$$x = -0{,}149 + \frac{k\pi}{2}$$
$$x_1 = 1{,}422;\, x_2 = 2{,}993;\, x_3 = 4{,}563;\, x_4 = 6{,}134;\ldots$$
$$f'''(x_1) \neq 0;\, f'''(x_2) \neq 0;\, f'''(x_3) \neq 0;\, f'''(x_4) \neq 0;\ldots$$
$$W_1(1{,}422|0{,}383);\, W_2(2{,}993|-0{,}239);\, W_3(4{,}563|0{,}149);\, W_4(6{,}134|-0{,}093);\ldots$$

Leitlinien:

Da |sin(2x)| ≤ 1, gilt |f(x)| ≤ $2e^{-0,3x}$. Die Graphen der Funktionen l_1 und l_2

$$l_1:\ f(x) = 2e^{-0,3x}$$
$$l_2:\ f(x) = -2e^{-0,3x}$$

heißen Leitlinien, da sie den Graph der Funktion berühren und nach oben und unten beschränken und leiten. Da in den Berührpunkten zwischen Funktion und Leitlinien die Funktionswerte derselben ident sind, berechnen sich diese Berührpunkte mit sin(2x) = 1.

Berührpunkte:

$$\sin(2x) = 1$$
$$2x = 1{,}571 + k\pi \quad (k \in N)$$
$$x = 0{,}785 + \frac{k\pi}{2}$$
$$B_1(0{,}785|1{,}580);\, B_3(3{,}927|0{,}616);\ldots$$
$$B_2(2{,}356|-0{,}986);\, B_4(5{,}498|-0{,}384);\ldots$$

Zu beachten ist, daß die jeweiligen Berechnungen im Bogenmaß ermittelt wurden und daß die Definitionsmenge auf nichtnegative Werte eingeschränkt wurde.

13.4. Funktionen mehrerer Veränderlicher

Im Zuge der Extremwertaufgaben kann die Hauptbedingung in der Regel nur in mehreren Variablen angegeben werden. Die Hauptbedingung ist also abhängig von mehreren Veränderlichen, wobei bei den Extremwertaufgaben ein Zusammenhang zwischen diesen besteht und sich die Hauptbedingung zumeist auf eine Variable reduzieren läßt. Ist dies nicht der Fall, so verbleibt eine Funktion f(a,b,c,...) in mehreren Variablen.

***Beispiel**:* *Das Volumen eines Zylinders ist gegeben durch* $V(r,h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Ist eine Beziehung zwischen mehreren Größen gegeben, so lassen sich im allgemeinen auch verschiedene Ableitungen bilden. Im obigen Beispiel könnte man das Volumen V nach r oder nach h ableiten. Die andere Variable würde man hierbei als Konstante ansehen und die Funktion einmal als V(r) und einmal als V(h) ansehen. Man reduziert also auf eine Funktion in einer Variablen.

Die Leibnizsche Schreibweise $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (gesprochen: dy nach dx) stellt eine einfache Möglichkeit dar, die Variable für die Ableitung anzugeben. Im obigen Beispiel können die Ableitungen $\frac{dV(r)}{dr}$ und $\frac{dV(h)}{dh}$ gebildet werden.

***Beispiel**:* $$\frac{dV(r)}{dr} = 2r\pi h; \quad \frac{dV(h)}{dh} = r^2\pi$$

Sind jedoch mehrere Größen tatsächlich veränderlich und können nicht als konstant angenommen werden, so handelt es sich um eine Funktion in mehreren Veränderlichen. Um auch dann die Funktion ableiten zu können, unterteilt man in partielle Ableitungen, wobei man wie oben beschrieben vorgeht, doch zur Kennzeichnung eine andere Symbolik, nämlich in diesem Fall $\frac{\partial V(r,h)}{\partial r}$ und $\frac{\partial V(r,h)}{\partial h}$, verwendet.

***Beispiel**:* $$\frac{\partial V(r,h)}{\partial r} = 2r\pi h; \quad \frac{\partial V(r,h)}{\partial h} = r^2\pi$$

Unter Verwendung partieller Ableitungen ist es nun möglich, auch Extremwertaufgaben mit mehreren Veränderlichen zu lösen.

Das folgende Beispiel zeigt die Berechnung der Koeffizienten der Regressionsgeraden, die bereits im Kapitel Statistik behandelt wurde. Hierbei ging es darum, für eine Punktemenge die Summe der Quadrate der Abstände zu einer Geraden zu minimieren. Dies führte letztendlich zu einer Funktion in zwei Variablen.

***Beispiel**:* *Ermittlung des Minimums von* $F(k,d)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(kx_i+d-y_i)^2$

Zur Ermittlung des Minimums, also des Extremwertes, dieser Funktion werden die partiellen Ableitung gleich Null gesetzt.

$$\frac{\partial F}{\partial k}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(kx_i+d-y_i)\cdot x_i=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial d}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(kx_i+d-y_i)=0$$

$$k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+d\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0 \qquad k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+n\cdot d-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

$$k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+d\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \qquad k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+n\cdot d=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Aus der rechten Gleichung läßt sich nun d ausrechnen und damit in der linken Gleichung einsetzen.

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

$$k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$k\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$k=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

Damit sind die Koeffizienten der sogenannten ersten Regressionsgeraden bestimmt.

Anhang: Übungsbeispiele zum 13. Kapitel

13/1 Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$

d) $f(x) = |x|$

13/2 Bestimmen Sie das Stetigkeitsverhalten und die umfassendsten Definitionsmengen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x + \sin(x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c) $f(x)) = \sqrt{1 - \cos(x)}$

d) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

13/3 Bestimmen Sie die stetigen Fortsetzungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

13/4 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von de l´Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^4}{e^x}$

13/5 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von de l´Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \ln(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

13/6 Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden gebrochenrationalen Funktionen in der Umgebung der Definitionslücken:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$

b) $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

13/7 Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden gebrochenrationalen Funktionen in der Umgebung der Definitionslücken:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 6x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{4x - 12x^3}{6x^5 - 2x^3}$

13/8 Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen für $|x| \to \infty$:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$

13/9 Führen Sie bei folgenden gebrochenrationalen Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3(8 - x)}{2(x - 6)^3}$

13/10 Führen Sie bei folgenden gebrochenrationalen Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \frac{1-x^4}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 13x + 10}{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

13/11 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos^2(4x)$

e) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

13/12 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \tan(2x)$

b) $f(x) = \cot(x) - \tan(x)$

c) $f(x) = 3\cos(x) - 4\cos^3(x)$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x)$

13/13 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

c) $f(x) = x \cdot e^{x}$

d) $f(x) = \frac{e^{x}}{x}$

e) $f(x) = \frac{x}{e^{x}}$

13/14 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^{2} \cdot e^{-3x}$

b) $f(x) = \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

c) $f(x) = \frac{2xe^{-x^{2}}}{x - 1}$

d) $f(x) = (e^{x} - 1)^{2}$

13/15 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

c) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)}$

d) $f(x) = \ln(x^{2} + 1)$

e) $f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{\ln(x)}$

13/16 Führen Sie bei folgenden transzendenten Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = e^{-0,5x} \cdot \cos(2x)$

c) $f(x) = 2{,}5e^{-0,5x} \cdot \sin(3x)$

d) $f(x) = 5e^{-0,1x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

13/17 Das Zerfallsgesetz für radioaktive Substanzen lautet: $m_t = m_0 e^{-\lambda t}$. Darin bedeuten m_t, m_0 die Menge der Substanz zur Zeit t bzw. zur Zeit t=0 und λ die Zerfallskonstante. Berechnen Sie die Zerfallsgeschwindigkeit. Berechnen Sie die Zerfallsgeschwindigkeit in dem Zeitpunkt, in welchem die Hälfte von m_0 zerfallen ist.

13/18 Bilden Sie bei folgenden Funktionen in mehreren Variablen alle partiellen Ableitungen:

a) $f(a,b,x,y) = ax^2 + 4abxy^2 - 5b^3y^3$

b) $E(m,v,h) = \frac{mv^2}{2} + mhg$

c) $O(r,h) = r^2\pi + r\pi h$

d) $s(x,y,z) = -xyz - x^2 + y^2 - z^2 - (xyz)^3$

13/19 Leiten Sie die Formel für die 2. Regressionsgerade mittels partieller Ableitungen her.