# 12. EINFÜHRUNG IN DIE DIFFERENTIALRECHNUNG

## 12.1. Problemstellung

### (a) Die mittlere Änderungsrate

| Uhrzeit t | Temperatur T(t) |
|---|---|
| 8 | 9 |
| 9 | 10 |
| 10 | 10 |
| 11 | 12 |
| 12 | 13 |
| 13 | 14 |
| 14 | 17 |
| 15 | 16 |
| 16 | 14 |
| 17 | 14 |
| 18 | 13 |
| 19 | 10 |
| 20 | 8 |

In nebenstehender Tabelle sind die zu verschiedenen Tageszeiten gemessenen Temperaturen an einem bestimmten Ort angegeben. Betrachtet man in verschiedenen Zeitintervallen z.B. [8;12], [12;14] und [10;16] die Temperaturänderungen, so erhält man folgende Werte:

[8;12]: 13 – 9 = 4

[12;14]: 17 – 13 = 4

[10;16]: 14 – 10 = 4

Diese Werte haben in dieser Form keine große Aussagekraft, da die unterschiedliche Länge der Zeitintervalle nicht berücksichtigt wurde. Soll die Temperaturänderung als Vergleichsmaß dienen, so muß sie auf ein in allen Fällen gleiches Zeitintervall, z.B. auf eine Stunde, umgerechnet werden. So ergibt sich:

| | | |
|---|---|---|
| [8;12]: | 12 – 8 = 4 | 4 : 4 = 1 |
| [12;14]: | 14 – 12 = 2 | 4 : 2 = 2 |
| [10;16]: | 16 – 10 = 6 | 4 : 6 = 0,67 |

Nun ist es möglich, die Änderung der Temperatur pro Stunde in den gegebenen Zeitintervallen anzugeben. Verallgemeinert man die obige Berechnung und betrachtet darüberhinaus die Zuordnung der Temperatur zu einer bestimmten Zeit als reelle Funktion f(x), so läßt sich definieren:

Mittlere **Änderungsrate** oder **Differenzenquotient** im Intervall [a;b]: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Das Beispiel zeigt bereits, daß der Differenzenquotient über ein großes Intervall nur wenig über den Verlauf der Funktion in diesem Intervall aussagt. Je kleiner man das Intervall wählt, umso mehr drückt der Differenzenquotient die aktuelle Tendenz über den weiteren Verlauf der Funktion aus. Im vorigen Beispiel konnte man jedoch die Intervallgröße nicht kleiner als eine Stunde wählen, da nicht ausreichend Daten zur Verfügung standen. Das nächste Beispiel soll uns dies jedoch ermöglichen.

Betrachtet man den Weg, den ein frei fallender Körper zurücklegt, dann kann dieser Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) angegeben werden: $s(t) = 5t^2$.
Die Geschwinigkeit des Körpers ergibt sich als Verhältnis von zurückgelegtem Weg zur vergangenen Zeit in einem bestimmten Zeitintervall. Will man die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt z.B. t = 3 ermitteln, so kann man nur das Intervall um diesen Zeitpunkt sehr klein wählen, um eine Näherung für diese Geschwindigkeit, der sogenannten Momentangeschwindigkeit, zu ermitteln.

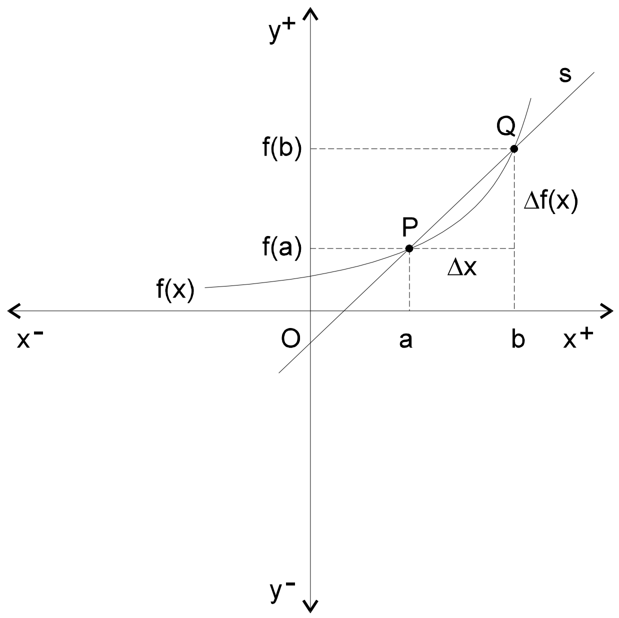
| Zeitintervall [3;z] | Mittlere Geschwindigkeit |
|---|---|
| [3;4] | 35 |
| [3;3,5] | 32,5 |
| [3;3,1] | 30,5 |
| [3;3,01] | 30,05 |
| [3;3,001] | 30,005 |

Der Differenzenquotient läßt sich diesmal auch allgemein anschreiben:

Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(3;z) = \frac{s(z) - s(3)}{z - 3} = \frac{5z^2 - 45}{z - 3}$

Je kleiner das Intervall [3;z] wird, umso mehr nähert sich der Wert für die mittlere Geschwindigkeit in diesem Intervall dem Wert 30m/s. Es ist uns jedoch nicht möglich, für z = 3 selbst die Momentangeschwindigkeit zu berechnen, da dies zu einer Division durch Null führt.

## (b) Das Tangentenproblem




Stellt man eine Funktion f(x) wie die vorige graphisch dar und wählt zwei Punkte P(a|f(a)) und Q(b|f(b)), so läßt sich der Differenzenquotient wiederum interpretieren. Das Verhältnis von $\Delta f(x)$ zu $\Delta x$ entspricht genau dem Anstieg der Geraden durch P und Q, also der Sekante s in Bezug auf den Funktionsgraphen.

Läßt man den einen Randpunkt a des Intervalls [a;b] fix und verkleinert das Intervall durch Veränderung des Randpunktes b (siehe voriges Beispiel), so nähern sich die Werte für den Anstieg wiederum einem Wert.

Die Sekanten selbst nähern sich immer mehr der Geraden, die nur den Punkt P mit der Funktion (in der Umgebung von P) gemeinsam hat, der sogenannten Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt P.

## 12.2. Der Differentialquotient

### (a) Die Änderungsrate

Die Berechnung des Differenzenquotienten läßt sich zusammenfassend so beschreiben:

Bei einer reellen Funktion f(x) wird folgender Quotient gebildet $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$.

Dabei lassen sich die Werte für z unbegrenzt dem fixen Wert x nähern, wobei z natürlich nie den Wert von x annehmen darf. Nähert sich bei dieser Berechnung der Differenzenquotient ebenfalls einem bestimmten Wert, so bezeichnet man diesen Wert als die Änderungsrate oder den Differentialquotienten.

Der Grenzwert $$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

heißt **Änderungsrate** oder **Differentialquotient** der Funktion f an der Stelle x.

Die Änderungsrate f´(x) kann als ein Maß für die Stärke bzw. Schnelligkeit der Änderung von f(x) an der Stelle x angesehen werden. In Anlehnung an das Tangentenproblem kann die Änderungsrate als Anstieg der Tangente von f(x) an der Stelle x angesehen werden.

Die Gerade durch den Punkt X(x|f(x)) mit der Steigung f´(x) ist die **Tangente** an den Graphen von f. Man nennt f´(x) auch den Anstieg der Funktion f an der Stelle x.

Zur Berechnung des Differentialquotienten vorerst bei Potenzfunktionen geht man folgendermaßen vor:

z.B. $f(x) = x^2$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{z^2 - x^2}{z - x} = \frac{(z + x)(z - x)}{z - x} = z + x$$
$$f'(x) = \lim_{z \to x}(z + x) = x + x = 2x$$

oder allgemein für $f(x) = x^n$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{z^n - x^n}{z - x} = z^{n-1} + z^{n-2}x + z^{n-3}x^2 + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1}$$
$$f'(x) = \lim_{z \to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + z^{n-3}x^2 + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1}) = n \cdot x^{n-1}$$

Der Differentialquotient für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten lautet:

$$f(x) = x^n,\ f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Da die Berechnung für keinen bestimmten Wert von x durchgeführt wurde, ist sie für alle reellen x gültig. Dadurch ist mit f´ wieder eine reelle Funktion festgelegt, man bezeichnet sie als (erste) Ableitung von f. Den rechnerischen Vorgang bezeichnet man entsprechend als ableiten bzw. differenzieren.

## (b) Differentationsregeln

Ist eine Funktion f und ihre Ableitung f´ bekannt, so gilt für die Funktion c·f (c∈R):

$$(c \cdot f)'(x) = \lim_{z \to x} \frac{c \cdot f(z) - c \cdot f(x)}{z - x} = c \cdot \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = c \cdot f'(x)$$

$$\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad (c \in R)}$$

Sind zwei Funktionen f und g sowie deren Ableitungen f´ und g´ bekannt, so gilt für die Funktion f + g:

$$(f+g)'(x) = \lim_{z \to x} \frac{(f(z)+g(z)) - (f(x)+g(x))}{z-x} = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x) + g(z) - g(x)}{z-x} =$$
$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x} + \lim_{z \to x} \frac{g(z) - g(x)}{z-x} = f'(x) + g'(x)$$

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

Diese Summenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen und läßt sich natürlich auf eine unbegrenzte Anzahl von Funktionen verallgemeinern. Sie ermöglicht uns vor allem die Ableitung beliebiger Polynomfunktionen, da sich diese aus Potenzfunktionen zusammensetzen.

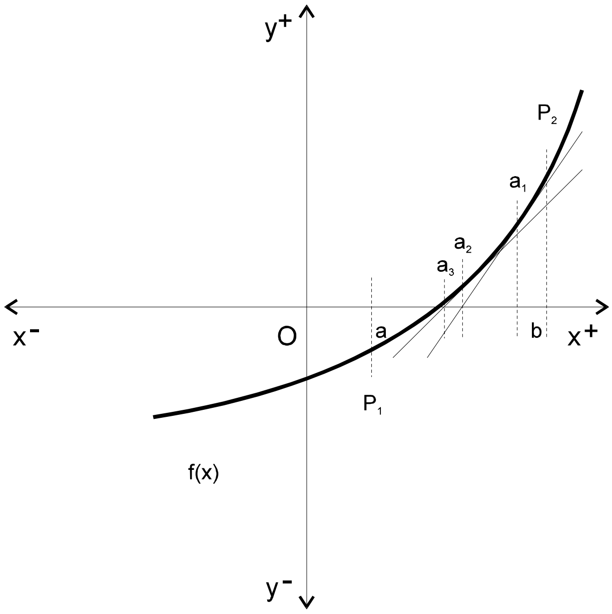
Im folgenden wurde die Regel für die Ableitung der Potenzfunktion für einige Sonderfälle angewendet.

$$\boxed{f(x) = x,\ f'(x) = 1 \quad \text{und} \quad f(x) = c,\ f'(x) = 0}$$

Aufgrund der historischen Entwicklung haben sich für die Bildung des Differentialquotienten unterschiedliche Schreibweisen und Symbole ergeben. Ist die Funktion durch ihre Funktionsgleichung y = f(x) gegeben, so schreibt man für die Ableitung y´ = f´(x). Auch die von Leibniz verwendete Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ für den Differentialquotienten ist üblich, wobei diese Symbolik für keinen Bruch, sondern für „dy nach dx“ steht und damit im speziellen zum Ausdruck bringt, daß y nach der Variablen x abgeleitet wird.

## 12.3. Newtonsches Näherungsverfahren

Die Mittel der Differentialrechnung ermöglichen ein verbessertes Verfahren zur Lösung von Gleichungen höheren Grades, das sogenannte Newtonsche Näherungsverfahren. Dieses Verfahren hat in seinen Grundzügen Ähnlichkeit zur Reagula falsi, statt der Sekante wird die Tangente zum Auffinden einer verbesserten Lösung für einen Startwert verwendet. Den Startwert findet man wie auch bei der Regula falsi als Wert in einem Intervall [a;b], sodaß f(a) und f(b) unterschiedliches Vorzeichen haben.




Bezeichnet man den Startwert mit $a_1$, so lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(a_1|f(a_1))$:

Tangente $\quad$ t: $y - f(a_1) = f'(a_1) \cdot (x - a_1)$

Die Nullstelle dieser Tangente ist die verbesserte Näherung $a_2$ für die Lösung der Gleichung:

Nullstelle $\quad x = a_1 - \dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)} = a_2$

Setzt man dieses Verfahren fort, kann man sich der Lösung beliebig genau nähern.

| Newtonsches Näherungsverfahren (Nullstellen) | $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ |
|---|---|

***Beispiel**: Berechnen Sie eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ mit $a_1$=1,5 auf vier Kommastellen genau.*

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

| $a_n$ | $f(a_n)$ | $f'(a_n)$ | $a_{n+1}$ |
|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,125 | 3,75 | 1,4666 |
| 1,4666 | -0,0053 | 4,0594 | 1,4679 |
| 1,4679 | -0,00004 | | $x_1$=1,4679 |

## 12.4. Kurvendiskussion

Viele Zusammenhänge in der Technik und in der Wirtschaft lassen sich, wenn auch oft nur als vereinfachtes Modell, durch Funktionen darstellen. Für diese Anwendungen sind aber die Eigenschaften und der Verlauf dieser Funktion bzw. des Graphen der Funktion von großer Bedeutung.

Wie im folgenden gezeigt wird, stellt die Differentialrechnung die mathematischen Grundlagen zur Untersuchung von Funktionen zur Verfügung. Eine solche Untersuchung wird als Kurvendiskussion bezeichnet. Wir wollen uns vorerst wieder nur auf Polynomfunktionen, deren Ableitungen wir bereits allgemein gezeigt haben, beschränken.

### (a) Nullstellen

Wie wir bereits bei den linearen Funktionen und ihren Anwendungen sehen konnten, sind oft die Punkte einer Funktion, deren Funktionswert gleich Null ist und die daher auf der x-Achse liegen, von erstem Interesse. Man errechnet diese Stellen, indem man die Funktionsgleichung gleich Null setzt.

| | | |
|---|---|---|
| Nullstellen | $f(x) = 0$ | $y = 0$ |

Für lineare und quadratische Gleichungen sind eindeutige Formeln zur Lösung bereits hergeleitet worden; Gleichungen höheren Grades sind entweder durch Herausheben eines Linearfaktors (Wurzelsatz von Vieta) mittels Polynomdivision oder durch ein Näherungsverfahren (Regula falsi, Newtonsches Näherungsverfahren) zu lösen.

Hierbei ist zu bedenken, daß die Anzahl der reellen Lösungen höchsten gleich dem Grad des Polynoms sein kann. Durch Überlegungen bezüglich des Vorzeichens und des Grades des Polynoms kann man Aussagen treffen, ob es überhaupt eine reelle Nullstelle gibt.

Eine Wertetabelle kann zumindest helfen, ein Intervall [a;b] zu finden, so daß f(a) und f(b) ungleiches Vorzeichen haben. Da Polynomfunktionen einen ununterbrochen Verlauf haben (siehe auch späteren Abschnitt Stetigkeit), muß daher in diesem Intervall eine Nullstelle der Funktion liegen. Umgekehrt müssen jedoch beim Durchgang durch eine Nullstelle die Funktionswerte nicht das Vorzeichen wechseln, man denke an die Grundparabel $f(x) = x^2$.

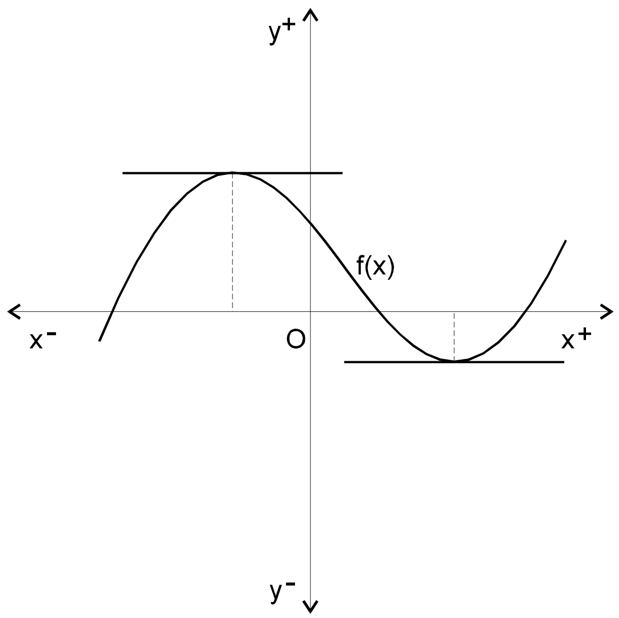
## (b) Extremstellen

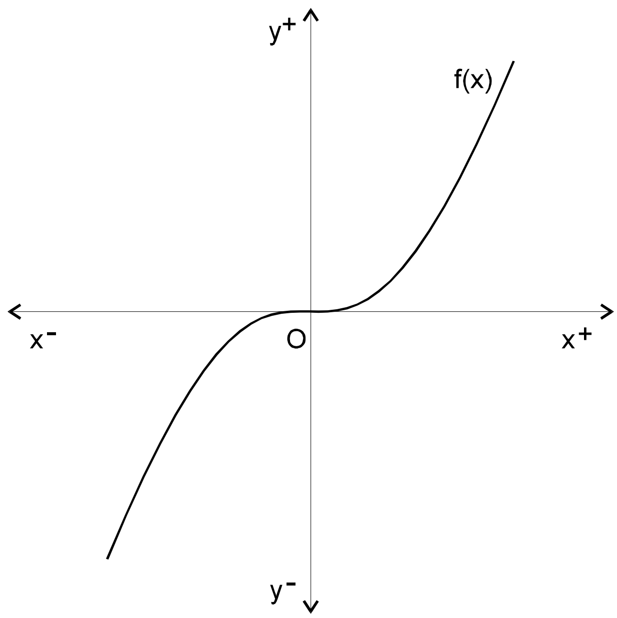
Im Kapitel über quadratische Gleichungen haben wir den Scheitel einer quadratischen Gewinnfunktion gesucht, weil an dieser Stelle der Gewinn am größten war. Im Bezug auf seine Umgebung hat der Scheitel einer quadratischen Funktion einen größeren bzw. einen kleineren Funktionswert als die Punkte links und rechts vom Scheitel. Einen derartigen Punkt bezeichnet man als lokalen Extrempunkt; je nachdem, ob an den Stellen links und rechts größere oder kleinere Funktionswerte auftreten, spricht man von einer lokalen Minimumstelle bzw. Maximumstelle.

> Eine Stelle p heißt lokale **Maximumstelle** einer reellen Funktion f, wenn es eine Umgebung $]p-\varepsilon;p+\varepsilon[$ gibt, sodaß $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in \, ]p-\varepsilon;p+\varepsilon[$ gilt.

> Eine Stelle p heißt lokale **Minimumstelle** einer reellen Funktion f, wenn es eine Umgebung $]p-\varepsilon;p+\varepsilon[$ gibt, sodaß $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in \, ]p-\varepsilon;p+\varepsilon[$ gilt.

Die Bezeichnung „lokal“ soll hierbei zum Ausdruck bringen, daß es sich nicht automatisch um den größten bzw. kleinsten Funktionswert der Funktion handelt. Diese würde man als globale Extremstellen bzw. als Maximum und Minimum der Funktion bezeichnen.




Augenscheinlich ist die Tangente an den Graphen in einem Extrempunkt horizontal und parallel zur x-Achse, Ihr Anstieg ist also gleich Null; das heißt, daß $f'(p) = 0$ gilt.

| |
|---|
| Ist p eine lokale Extremstelle, so ist $f'(p) = 0$. |

Umgekehrt gilt allerdings nicht, daß jede Stelle, für die die erste Ableitung gleich Null ist, automatisch eine Extremstelle ist. Die obenstehende Zeichnung der Funktion $y = x^3$, für die $f'(0) = 0$ gilt, hat bei p=0 keine Extremstelle, da die obigen Bedingungen für kein Intervall $]p-\varepsilon;p+\varepsilon[$ erfüllt sind. Die Bedingung $f'(p) = 0$ ist also eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung.

Mit den derzeitigen Mitteln können wir eine Stelle p dann als Extremstelle festlegen, wenn $f'(p) = 0$ gilt und mit einem Wert links und rechts dieser Stelle überprüft wurde, ob beide Funktionswerte größer oder kleiner als der an der Stelle p sind. Damit wird zusätzlich festgestellt, ob es sich um eine Minimum- oder Maximumstelle handelt. Die Wahl zweier solcher Punkte kann darüberhinaus nur dann sinnvoll erfolgen, wenn alle Stellen $p_i$ mit $f'(p_i) = 0$ bekannt sind.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie die Extremstellen von* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$0 = 3x^2 - 18x + 24$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 4$$
$$P_1(1|-3),\ E_1(2|1),\ P_2(3|-1)$$
$$P_2(3|-1),\ E_2(4|-3),\ P_3(5|1)$$

*Die Extremstellen sind $E_1(2|1)$ und $E_2(4|-3)$, wobei es sich bei $E_1$ um eine lokale Maximumstelle und bei $E_2$ um eine lokale Minimumstelle handelt.*

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden lokale Maximumstellen oft als Hochpunkte (H) und lokale Minimumstellen als Tiefpunkte (T) bezeichnet.

### (c) Monotonieverhalten

| |
|---|
| Eine reelle Funktion f heißt **streng monoton** zunehmend bzw. abnehmend, wenn für alle $x_1$, $x_2$ eines Intervalls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ |
| Eine reelle Funktion f heißt **monoton** zunehmend bzw. abnehmend, wenn für alle $x_1$, $x_2$ eines Intervalls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ bzw. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ |

Anschaulich läßt sich das Monotonieverhalten natürlich auch über die Steigung der Tangente und damit f´ formulieren. Ist die Funktion f in einem Intervall monoton zunehmend, dann ist f´(x) größer oder gleich Null für alle x in diesem Intervall. Entsprechend umgekehrt gilt natürlich, daß f´(x) kleiner oder gleich Null ist, wenn die Funktion f in einem Intervall monoton fallend ist.

| | |
|---|---|
| f(x) monoton zunehmend: $f'(x) \geq 0$ | f(x) monoton abnehmend: $f'(x) \leq 0$ |

Für die strenge Monotonie gelten diese Aussagen entsprechend mit > bzw. <, wobei es sich jedoch um keine notwendige, sondern um eine hinreichende Bedingung handelt (da es Punkte mit gleichem Anstieg geben kann).

Der Wechsel zwischen Zunehmen und Abnehmen von f(x) kann nun nur dann stattfinden, wenn f´(x) gleich Null ist. Die Stellen, für die einerseits f´(x) = 0 gilt und andererseits ein Wechsel des Monotonieverhaltens erfolgt, sind aber die Extremstellen. Durch die Extremstellen werden also Intervalle festgelegt, in denen eine Funktion f gleiches Monotonieverhalten zeigt. Damit läßt sich nun die Bedingung zur Ermittlung einer Extremstelle verfeinert angeben.

Eine Stelle p ist dann Extremstelle, wenn f´(p) = 0 gilt und an der Stelle p ein **Monotoniewechsel** stattfindet.

Sind $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ Extremstellen der reellen Funktion f, so hat die Funktion in den Intervallen $]-\infty;p_1]$, $[p_1;p_2]$, ..., $[p_n;+\infty[$ jeweils über das gesamte Intervall gleiches Monotonieverhalten. Das Monotonieverhalten wechselt jeweils von Intervall zu Intervall.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.*

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$0 = 3x^2 - 18x + 24$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 4$$
$$f'(1) = 9,\ f'(3) = -3,\ f'(5) = 9$$
$$H(2|1),\ T(4|-3)$$

Diesmal wurde die Entscheidung, ob an der Stelle p eine Extremstelle vorliegt und weiterführend ob es sich um einen Hochpunkt oder Tiefpunkt handelt, mittels der der Ableitung f´ getroffen. Somit ergibt sich:

*] – ∞;2]  monoton zunehmend, da z.B. f '(1) = 9 > 0*
*[2;4]  monoton abnehmend, da z.B. f '(3) = -3 < 0*
*[4;+∞[  monoton zunehmend, da z.B. f '(5) = 9 > 0*

Zusammenfassend läßt sich daher über den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung folgende Aussage treffen:

Die (erste) Ableitung einer Funktion gibt Auskunft über das Zu- und Abnehmen dieser Funktion.

### (d) Die zweite Ableitung

Im folgenden wollen wir uns noch genauer mit den Steigungen der Tangenten einer Funktion beschäftigen. Errechnet man die Steigungen der Tangenten einer Funktion, so kann man bei diesen Werten wiederum ein Zu- und Abnehmen feststellen.

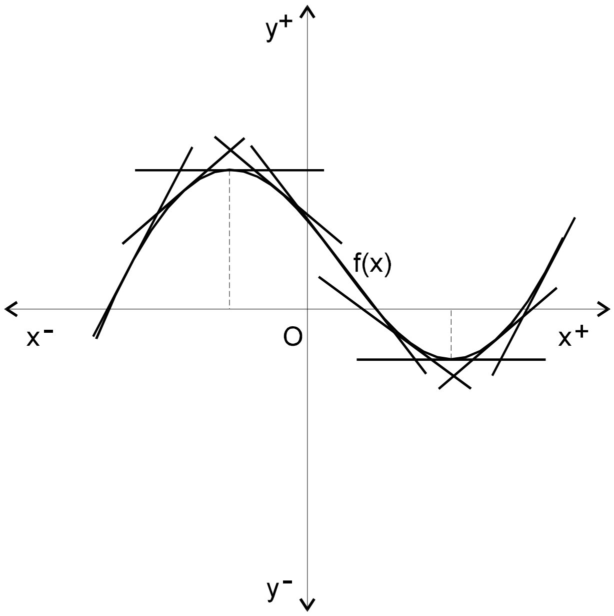
Folgende Tabelle macht dies für die bisherige Beispielsfunktion $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ deutlich:

| x | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f´(x) | 72 | 45 | 24 | 9 | 0 | –3 | 0 | 9 | 24 | 45 | 72 |

Die Tabelle zeigt, daß die Werte für die Steigung der Tangenten anfangs abnehmen, bis sie bei x = 3 einen scheinbaren Tiefstand erreichen, ab dann nehmen die Werte wieder zu. Bei dieser Funktion ergibt sich zufälligerweise auch eine Symmetrie der Werte.

Will man das Zu- und Abnehmen der Steigungen exakt beschreiben, so bedient man sich des oben angeführten Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung. Sieht man f´ als die Funktion, die die Steigung wiedergibt, so beschreibt die Ableitung von f´, also f´´, das Zu- und Abnehmen dieser Steigung. Damit wird die zweite Ableitung einer Funktion zur einfachen Möglichkeit, eine Stelle p als Extremstelle zu verifizieren.

Eine Stelle p, für die $f'(p) = 0$ gilt und $f''(p)$ größer oder kleiner Null ist, ist eine lokale Extremstelle von f.




Da sich beim Durchgang durch eine Extremstelle einer Funktion f das Vorzeichen der ersten Ableitung f´ ändert (Monotoniewechsel), nehmen die Steigungen der Tangenten bei diesem Durchgang entweder ab oder zu. Dieses Verhalten wird aber genau durch die zweite Ableitung beschrieben.

Da beim Durchgang durch eine Maximumstelle die Steigungen der Tangenten abnehmen, ist der Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle kleiner Null; entsprechend umgekehrt ist der Wert der zweiten Ableitung bei einer Minimumstelle größer Null.

| |
|---|
| Lokale Maximumstelle: $f'(p) = 0$ und $f''(p) < 0$, lokale Minimumstelle: $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0$ |

Auch diese Bedingung ist nur eine hinreichende, da im Falle von $f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$ keine zuverlässige Aussage über die Stelle p getroffen werden kann. In diesem Fall ist eine Entscheidung nur über die Vorzeichen von f´ beim Durchgang durch die Stelle p möglich (man denke an die Fälle $f(x) = x^3$ bzw. $f(x) = x^4$).

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie die Extremstellen von* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$0 = 3x^2 - 18x + 24$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 4$$
$$f''(x) = 6x - 18$$
$$f''(2) = -6 < 0,\ f''(4) = 6 > 0$$
$$H(2|1),\ T(4|-3)$$

Verwendet man die zweite Ableitung zur Verifizierung der Extremstellen, so ist also die wesentliche Bedingung hierbei, daß die zweite Ableitung an dieser Stelle nicht gleich Null ist, da sonst keine Entscheidung mittels zweiter Ableitung getroffen werden kann. Zusätzlich gibt das Vorzeichen der zweiten Ableitung an dieser Stelle noch Auskunft, ob es sich um eine lokale Maximum- oder Minimumstelle handelt.

### (e) Wendestellen

Der vorige Abschnitt hat gezeigt, daß die zweite Ableitung f´´ einer Funktion f das Zu- und Abnehmen der Steigung, die ja durch f´ gegeben ist, beschreibt. Wiederum sind die Stellen, an denen ein Wechsel zwischen Zu- und Abnehmen von f´ stattfindet, dadurch bestimmt, daß auf jedenfall f´´ = 0 gelten muß. Diese Stellen bezeichnet man als Wendestellen.

| Ist p eine Wendestelle, so ist f´´(p) = 0. |
|---|

Eine Wendestelle ist somit eine Extremstelle der ersten Ableitung f´ einer Funktion f. Der vorige Abschnitt hat schon gezeigt, daß der Wert der Steigung an dieser Stelle einen Tiefwert oder Hochwert annimmt. Wiederum ist die Bedingung f´´(p)=0 noch nicht ausreichend, um eine Wendestelle zu finden. Analog zum Auffinden von Extremstellen von f muß nun bei der zweiten Ableitung ein Vorzeichenwechsel beim Durchgang durch die Wendestelle erfolgen.

| Eine Stelle p ist dann Wendestelle, wenn f´´(p) = 0 gilt und beim Durchgang durch p ein Vorzeichenwechsel von f´´ stattfindet. |
|---|

Ähnlich zur Überprüfung der Extremstellen von f in der zweiten Ableitung können die Wendestellen mittels der dritten Ableitung verifiziert werden. In diesem Fall ist aber nur von Bedeutung, daß die dritte Ableitung an dieser Stelle ungleich Null ist.

| Eine Stelle p, für die f´´(p) = 0 gilt und f´´´ ungleich Null ist, ist eine Wendestelle. |
|---|

Auch diese Bedingung ist nur hinreichend, da im Falle f´´(p) = 0 und f´´´(p) = 0 keine zuverlässige Aussage über die Stelle p getroffen werden kann. In diesem Fall ist eine Entscheidung wieder nur über die Vorzeichen von f´´ beim Durchgang durch die Stelle p möglich (man denke an die Fälle $f(x) = x^4$ bzw. $f(x) = x^5$).

***Beispiel***: *Bestimmen Sie die Wendestellen von* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24,\ f''(x) = 6x - 18$$
$$6x - 18 = 0$$
$$x = 3$$
$$f''' = 6,\ f'''(3) = 6 \neq 0$$
$$W(3|-1)$$

## (f) Krümmungsverhalten

Ähnlich wie die erste Ableitung f´ einer Funktion f als ein Maß für die Stärke der Änderung der Funktion f angesehen wird, ist die zweite Ableitung f´´ einer Funktion f als Maß für die Stärke der Änderung von f´, der Steigung, zu verstehen. Die Stärke, wie sich die Steigung ändert, gibt einer Kurve aber einen charakteristischen Verlauf bezüglich ihrer Krümmung. Die zweite Ableitung kann also zur Bestimmung des Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion f herangezogen werden.

Für die weitere Betrachtung wollen wir bezüglich der Krümmung des Graphen einer Funktion nur zwischen der Richtung dieser Krümmung unterscheiden. Diese Frage ist vergleichbar mit der Frage nach der Richtung des Lenkradeinschlages beim „Fahren entlang des Graphen" sowie nach den Punkten, an denen sich diese Richtung ändert.

Diese Punkte sing genau an jenen Stellen, an denen sich da Zu- und Abnehmen der Steigungen der Tangenten ändert; es handelt sich also um die Wendestellen.

Somit ergeben sich durch die Wendestellen Intervalle, in denen die Funktion f gleiches Krümmungsverhalten zeigt; sie ist dort rechtsgekrümmt oder linksgekrümmt. In einem Bereich, in dem die Steigungen der Tangenten abnehmen und $f''(x) < 0$ gilt, ist der Graph der Funktion rechtgekrümmt; in einem Bereich, in dem die Steigungen der Tangenten abnehmen und $f''(x) > 0$ gilt, ist der Graph der Funktion linksgekrümmt.

| | |
|---|---|
| f(x) positiv oder linksgekrümmt: $f''(x) > 0$ | f(x) negativ oder rechtsgekrümmt: $f''(x) < 0$ |

Auch diese Bedingung ist nur hinreichend. Exakter müßte man formulieren, daß der Graph einer Funktion an einer Stelle p positiv oder linksgekrümmt ist, wenn in einer Umgebung von p alle Punkte des Graphen von f oberhalb der Tangente an der Stelle p liegen. Entsprechend ist der Graph der Funktion an einer Stelle p negativ oder rechtsgekrümmt, wenn in einer Umgebung von p alle Punkte des Graphen von f unterhalb der Tangente an der Stelle p liegen. Man spricht auch von konkaver (positiv) und konvexer (negativ) Krümmung.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24,\ f''(x) = 6x - 18, W(3|-1)$

$]-\infty;3]$ *rechtsgekrümmt, da z.B.* $f''(2) = -6 < 0$

$[3;+\infty[$ *linksgekrümmt, da z.B.* $f''(4) = 6 > 0$

## (g) Symmetrieeigenschaften

Gerade bei der Diskussion von Polynomfunktionen kann man zuweilen ein Symmetrieverhalten des Graphen feststellen. Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

**Symmetrie bezüglich der x-Achse**: Eine Kurve ist symmetrisch zur x-Achse, wenn für jeden Punkt P(x|y) auch der Punkt $\overline{P}(x|-y)$ Element der Kurve ist. Dieser Fall tritt jedoch nur selten auf, da es sich bei dieser Kurve um keine Funktion handelt.

***Beispiel***: $y^2 = x$

**Symmetrie bezüglich der y-Achse**: Eine Kurve ist symmetrisch zur y-Achse, wenn für jeden Punkt P(x|y) auch der Punkt $\overline{P}(-x|y)$ Element der Kurve ist. Es muß also gelten: $f(x) = f(-x)$

Dies gilt im speziellen bei den sogenannten geraden Polynomfunktionen; das sind jene Polynomfunktionen, die nur gerade Exponenten aufweisen.

***Beispiel***: $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$

**Symmetrie bezüglich des Ursprungs**: Eine Kurve ist symmetrisch zum Ursprung, wenn für jeden Punkt P(x|y) auch der Punkt $\overline{P}(-x|-y)$ Element der Kurve ist. Es muß also gelten: $f(x) = -f(-x)$

Dies gilt im speziellen bei den sogenannten ungeraden Polynomfunktionen; das sind jene Polynomfunktionen, die nur ungerade Exponenten aufweisen. Sie verlaufen alle durch den Ursprung.

***Beispiel***: $y = 3x^3 + x$

**Symmetrie bezüglich des Wendepunktes**: Eine Kurve ist symmetrisch zu ihrem Wendepunkt $W(x_w|y_w)$, wenn für jeden Punkt P(x|y) auch der Punkt $\overline{P}(2x_w - x|2y_w - y)$ Element der Kurve ist. Bei mehreren Wendepunkten gilt die Symmetrie bezüglich der einzelnen Wendepunkte zuweilen nur in einem bestimmten Intervall. Es muß gelten: $2f(x_w) - f(2x_w - x) = f(x)$

***Beispiel***: $y = x^3 - 6x^2 + 32 \text{ mit } W(2|16)$

Es ist noch anzumerken, daß das Zutreffen einer Symmetrieeigenschaft die anderen ausschließt (Ausnahme: Ursprung ist auch Wendepunkt).

## (h) Zusammenfassung

| **Kurvendiskussion** | **Hinreichende Bedingung** | **Notwendige Bedingung** |
|---|---|---|
| | | |
| **Nullstellen** | $f(x) = 0$ | $f(x) = 0$ |
| | | |
| **Extremstellen** | $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ | $f'(x) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ beim Durchgang durch die Extremstelle |
| lokale Maximumstelle | $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ | $f(x-\varepsilon) \leq f(x)$ und $f(x+\varepsilon) \leq f(x)$ für eine Umgebung $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$ |
| lokale Minimumstelle | $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ | $f(x-\varepsilon) \geq f(x)$ und $f(x+\varepsilon) \geq f(x)$ für eine Umgebung $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$ |
| | | |
| **Monotonieverhalten** | | |
| zunehmend | $f'(x) \geq 0$ monoton<br>$f'(x) > 0$ streng monoton | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ monoton<br>$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ streng monoton |
| abnehmend | $f'(x) \leq 0$ monoton<br>$f'(x) < 0$ streng monoton | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ monoton<br>$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ streng monoton |
| | | |
| **Wendestellen** | $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ | $f''(x) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ beim Durchgang durch die Wendestelle |
| | | |
| **Krümmungsverhalten** | | |
| positiv oder linksgekrümmt | $f''(x) > 0$ | Alle Punkte in einer Umgebung $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$ liegen oberhalb der Tangente |
| negativ oder rechtsgekrümmt | $f''(x) < 0$ | Alle Punkte in einer Umgebung $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$ liegen unterhalb der Tangente |

Diese Auflistung ist nur als Grundschema für Polynomfunktionen zu verstehen. Die Funktionen in den weiteren Abschnitten zeigen, daß dieses Schema noch einer Erweiterung bedarf.

## 12.5. Umkehraufgaben

Sind von einer Polynomfunktion bestimmte Angaben bekannt und gilt es, die Koeffizienten der Funktion zu ermitteln, so spricht man von einer Umkehraufgabe. Die Polynomfunktion wird allgemein entsprechend ihres Grades angesetzt und die bekannten Angaben werden dann weiterführend in die Funktion bzw. deren Ableitungen eingesetzt. Dies führt zu einem Gleichungssystem, dessen Lösung die Koeffizienten der gesuchten Polynomfunktion sind.

***Beispiel**:* *Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades hat im Punkt H(0|8) einen Hochpunkt und im Punkt W(–2|3) einen Wendepunkt; die Steigung der Wendetangente ist 4. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.*

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

*H(0|8)* $\qquad e = 8$

*W(–2|3)* $\qquad 16a - 8b + 4c - 2d + e = 3$

*f´(0)=0* $\qquad 0 = d$

*f´(–2)=4* $\qquad -32a + 12b - 4c + d = 4$

*f´´(–2)=0* $\qquad 48a - 12b + 2c = 0$

*Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 16a - 8b + 4c &= -5 \\ -32a + 12b - 4c &= 4 \\ 24a - 6b + c &= 0 \end{aligned}$$

*Lösung des Gleichungssystems* $\qquad a = \frac{1}{16},\ b = 0,\ c = -\frac{3}{2},\ d = 0,\ e = 8$

*Funktionsgleichung* $\qquad f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

Eine Überprüfung der gefundenen Polynomfunktion kann nun durch eine anschließende Kurvendiskussion erfolgen.

## 12.6. Weitere Differentationsregeln

### (a) Produktregel

Für die Ableitung des Produkts (f·g) zweier Funktionen f und g gilt:

$$\frac{\Delta(f\cdot g)(x)}{\Delta x}=\frac{(f\cdot g)(z)-(f\cdot g)(x)}{z-x}=\frac{f(z)\cdot g(z)-f(x)\cdot g(x)}{z-x}=\frac{f(z)\cdot g(z)-f(x)\cdot g(z)+f(x)\cdot g(z)-f(x)\cdot g(x)}{z-x}=$$

$$\frac{g(z)\cdot[f(z)-f(x)]+f(x)\cdot[g(z)-g(x)]}{z-x}=g(z)\cdot\frac{f(z)-f(x)}{z-x}+f(x)\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x}$$

$$[(f\cdot g)(x)]'=\lim_{z\to x} g(z)\cdot\frac{f(z)-f(x)}{z-x}+f(x)\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x}=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

**Produktregel**: Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch die Funktion f·g an der Stelle x differenzierbar und es gilt: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

***Beispiel**:* *Differenzieren Sie die Funktion* $h(x)=(x^2+2x)\cdot(x^3-1)$.

$$f(x)=x^2+2x,\ f'(x)=2x+2$$

$$g(x)=x^3-1,\ g'(x)=3x^2$$

$$h'(x)=(2x+2)\cdot(x^3-1)+(x^2+2x)\cdot 3x^2=$$

$$2x^4+2x^3-2x-2+3x^4+6x^3=$$

$$5x^4+8x^3-2x-2$$

Bei Polynomfunktionen ist das Ausmultiplizieren oftmals der schnellere Weg.

### (b) Quotientenregel

Für die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen f und g gilt:

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{z-x}=\frac{f(z)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(z)}{(z-x)\cdot g(z)\cdot g(x)}=\frac{f(z)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(z)}{(z-x)\cdot g(z)\cdot g(x)}=$$

$$\frac{1}{g(z)\cdot g(x)}\cdot\frac{g(x)\cdot[f(z)-f(x)]-f(x)\cdot[g(z)-g(x)]}{z-x}=\frac{1}{g(z)\cdot g(x)}\cdot\left[g(x)\cdot\frac{f(z)-f(x)}{z-x}-f(x)\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x}\right]$$

$$\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]' = \lim_{z\to x}\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(z)\cdot g(x)} = \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Quotientenregel**: Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $h(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

$$f(x)=x-1,\ f'(x)=1$$
$$g(x)=x^2,\ g'(x)=2x$$
$$h'(x)=\frac{1\cdot x^2-(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^2-2x^2+2x}{x^4}=$$
$$\frac{2x-x^2}{x^4}=\frac{2-x}{x^3}$$

Die Quotientenregel erlaubt es, die Ableitung der Potenzfunktion auf Exponenten aus den ganzen Zahlen zu erweitern.

Der Differentialquotient für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten lautet ($x\neq 0$):

$$f(x)=x^n,\ f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

$$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$$
$$f'(x)=-3\cdot x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$$

Da die Variable in diesem Fall im Nenner auftritt, muß die Bedingung $x\neq 0$ zusätzlich angeführt sein.

## (c) Wurzelfunktionen

Für die Ableitung der allgemeinen Wurzelfunktion $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ ($x\in R^+$) gilt:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{z^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{z-x}=\frac{z^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{\left(z^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(z^{\frac{n-1}{n}}+z^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\ldots+z^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-2}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}\right)}=\frac{1}{z^{\frac{n-1}{n}}+z^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\ldots+z^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-2}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\lim_{z\to x}\frac{1}{z^{\frac{n-1}{n}}+z^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\ldots+z^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-2}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Der Differentialquotient für Wurzelfunktionen lautet ($x\in R^+$):

$$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}},\quad f'(x)=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Schreibt man also die Wurzelfunktion auch in der Potenzschreibweise an, so läßt sich die Ableitung nach der bekannten Regel für Potenzfunktionen bilden. Die Variable muß in diesem Fall natürlich aus den positiven reellen Zahlen sein.

## (d) Kettenregel

Viele Funktionen sind leichter zu verstehen, wenn man sie als ein Hintereinanderausführen zweier Funktionen f und g auffaßt. Zum Beispiel kann man die Funktion $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ als Zusammensetzung der Funktionen $g(x)=x^2+1$ und $f(g)=\sqrt{g}$ verstehen. Diese Zusammensetzung wird auch als Verkettung von Funktionen bezeichnet. Die Funktion h(x) läßt sich dann als h(x) = f(g(x)) anschreiben; das heißt, daß zuerst die Funktion g(x) ausgeführt wird, und dieses Ergebnis g(x) im weiteren das Argument für die Funktion f(x) darstellt. Für die Ableitung der Verkettung zweier Funktionen f und g gilt:

$$\frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x}=\frac{f(g(z))-f(g(x))}{z-x}=\frac{f(g(z))-f(g(x))}{z-x}\cdot\frac{g(z)-g(x)}{g(z)-g(x)}=\frac{f(g(z))-f(g(x))}{g(z)-g(x)}\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x}$$

$$\left[f(g(x))\right]'=\lim_{z\to x}\frac{f(g(z))-f(g(x))}{g(z)-g(x)}\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x}=f'(g(x)\cdot g'(x)$$

**Kettenregel**: Sind die Funktionen f an der Stelle g(x) und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch die Funktion f(g) an der Stelle x differenzierbar und es gilt: $\left[f(g)\right]' = f'(g) \cdot g'$

Die Kettenregel besagt, daß die Verkettung f(g(x)) abgeleitet wird, indem die Funktion f „ungeachtet" des Arguments g abgeleitet und mit der Ableitung der Funktion g multipliziert wird. Diese Regel wird oft in der folgenden leicht merkbaren Form ausgesprochen:

Ableitung der Verkettung: Äußere Ableitung mal innere Ableitung.

Hierbei wird also die Ableitung von f(g) als äußere Ableitung, die von g(x) als innere Ableitung bezeichnet.

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$f(g) = \sqrt{g},\ f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g}}$$

$$g(x) = x^2 + 1,\ g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Die Kettenregel erlaubt es, die Ableitung der Potenzfunktion auf Exponenten aus den rationalen Zahlen zu erweitern.

Der Differentialquotient für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten lautet ($x \in R^+$):

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}},\ f'(x) = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n} - 1}$$

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$$

### (e) Ableitung der Winkelfunktionen

Die Herleitung der Ableitungen für die Winkelfunktionen ist nur mit den Mitteln der exakten Grenzwertdefinition möglich und übersteigt daher den Rahmen dieses Skriptums. Daher werden im folgenden nur die Ergebnisse der Bildung des Differentialquotienten angeführt. Dabei ist zu beachten, daß die Regeln nur dann Gültigkeit haben, wenn die Argumente für die Winkelfunktionen im Bogenmaß gegeben sind.

Die Funktion sin(x) ist für alle $x \in R$ differenzierbar und es gilt: $\sin'(x) = \cos(x)$

Die Funktion cos(x) ist für alle $x \in R$ differenzierbar und es gilt: $\cos'(x) = -\sin(x)$

Die Funktion tan(x) ist für alle $x \in R \setminus \{(2k+1)\cdot\pi\}$ differenzierbar und es gilt: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Die Ableitung von tan(x) bzw. auch für cot(x) ist mittels Quotientenregel durch sin(x) und cos(x) herleitbar.

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $f(x) = cot(x)$.

$$f(x) = cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-sin(x) \cdot sin(x) - cos(x) \cdot cos(x)}{sin^2(x)} =$$

$$\frac{-(sin^2(x) + cos^2(x))}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

***Beispiel***: *Differenzieren Sie die Funktion* $f(x) = (1 - cos(2x))^2$.

$$f'(x) = 2 \cdot (1 - cos(2x)) \cdot sin(2x) \cdot 2 =$$

$$4 \cdot sin(2x) \cdot (1 - cos(2x))$$

Im vorigen Beispiel mußte zweimal die Kettenregel zur Ermittlung der Ableitung angewendet werden.

## (f) Ableitung der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $e^x$ ist an jeder Stelle $x \in R$ differenzierbar und es gilt: $(e^x)' = e^x$

Die Exponentialfunktion bleibt also beim Differenzieren unverändert.

Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x)=a^x$ ist aufgrund des Zusammenhangs $a = e^{\ln(a)}$ und Verwendung der Kettenregel herleitbar.

Die Exponentialfunktion $a^x$ ist an jeder Stelle $x \in R$ ($a \in R^+$) differenzierbar und es gilt:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

Die Ableitung für die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ ist nun bereits herleitbar, denn es gilt:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x)} = \frac{\ln(z) - \ln(x)}{z - x}$$

Setzt man $\ln(z) = u$ und $\ln(x) = v$, dann folgt daraus $z = e^u$ und $x = e^v$ und für den Differenzenqoutienten:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x)} = \frac{\ln(z) - \ln(x)}{z - x} = \frac{u - v}{e^u - e^v} = \frac{1}{\frac{e^u - e^v}{u - v}}$$

$$\lim_{u \to v} \frac{1}{\frac{e^u - e^v}{u - v}} = \frac{1}{\lim\limits_{u \to v} \frac{e^u - e^v}{u - v}} = \frac{1}{e^v} = \frac{1}{x}$$

Die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ist an jeder Stelle $x \in R^+$ differenzierbar und es gilt: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Ebenso erhält man für die allgemeine Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a(x)$ (Logarithmus zur Basis a) unter Einbeziehung des Zusammenhangs $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$:

Die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ ist an jeder Stelle $x \in R^+$ differenzierbar und es gilt:

$$[\log_a(x)]' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

## 12.7. Extremwertaufgaben

Der folgende Abschnitt stellt eine einfache und dennoch eindrucksvolle Anwendung der Differentialrechnung dar. Ergibt sich eine Funktion als Beschreibung eines praktischen Problems, so bekommen die einzelnen Ergebnisse einer Kurvendiskussion natürlich eine interpretierbare Bedeutung; so lassen sich z.B. für eine Kostenfunktion eventuell die Produnktionsmengen ermitteln, an denen die Kosten ein Maximum oder ein Minimum betragen. Das folgende Beispiel soll den rechnerischen Ablauf zur Lösung der sogenannten Extremwertaufgaben darlegen.

### (a) Allgemeines Ablaufschema

***Beispiel**: Ein Bauer besitzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz für seine Tiere umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen dieses Rechtecks gewählt werden, damit dessen Flächeninhalt möglichst groß wird. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?*

Aus 100m Zaun lassen sich unterschiedliche Rechtecke mit den Seitenlängen a, b formen, die auch unterschiedlichen Flächeninhalt A haben; z.B. a = 10m, b = 40m und A = 400m$^2$ oder a = 20m, b = 30m und A = 600m$^2$. Es stellt sich also zurecht die Frage, für welche Seitenlängen der Flächeninhalt möglichst groß wird. Die Größe, die ein Maximum oder ein Minimum annehmen soll, legt die sogenannte **Hauptbedingung** fest.

*Hauptbedingung (HB)* $$A = a \cdot b$$

In dieser Hauptbedingung treten meistens mehrere Variablen auf, zwischen denen es jedoch einen Zusammenhang gibt. Dieser Zusammenhang wird in der sogenannten **Nebenbedingung** festgehalten. Sie ergibt sich aufgrund eines geometrischen Zusammenhangs (Strahlensatz, pythagoräischer Lehrsatz, usw.) oder durch Beschränkungen, die sich aus der jeweiligen praktischen Anwendung ergeben. In diesem Beispiel ist z.B. der Weideplatz durch den vorgegeben Umfang von 100m, der Zaunlänge, beschränkt.

*Nebenbedingung (NB)* $$100 = 2a + 2b$$

Es können sich, abhängig von der Variablenzahl der Hauptbedingung, auch mehrere Nebenbedingungen ergeben. Im weiteren werden aus diesen Nebenbedingungen einzelne Variablen explizit berechnet, sodaß durch Einsetzen mit den sich ergebenden Termen in der Hauptbedingung sich die Variablenzahl der Hauptbedingung auf eine Variable reduziert.

*Explizite Nebenbedingung* $a = 50 - b$

*Einsetzen in Hauptbedingung* $A = (50 - b) \cdot b = 50b - b^2$

Die Hauptbedingung stellt sich nun als eine Funktion einer veränderlichen Größe dar. In diesem Beispiel ist der Flächeninhalt des Weideplatzes nun nur mehr von der Wahl der Seitenlänge b abhängig.

*HB als Funktion* $A(b) = 50b - b^2$

Sucht man nun das Maximum oder Minimum dieser Funktion in einem bestimmten Intervall, so entspricht dies im Normalfall der Suche der Extremwerte in diesem Intervall. Die Funktion wird also nach der Veränderlichen abgeleitet und Null gesetzt.

*Ableitung, Nullsetzen*

$$A'(b) = 50 - 2b$$
$$50 - 2b = 0$$
$$b = 25$$

Wie bei der Kurvendiskussion müssen die errechneten Werte in der zweiten Ableitung auf ihre Extremwert-eigenschaften überprüft werden.

*Überprüfung in der 2. Ableitung*

$$A''(b) = -2$$
$$A''(25) = -2 < 0$$
$$\textit{Maximum}$$

Um das Ergebnis als brauchbare Lösung zu akzeptieren, muß der Wert für die Variable aus einem zulässigen Intervall sein, das sich durch die praktische Anwendung und durch Einschränkungen wie z.B. die Nebenbedingungen ergibt. Bei geometrischen Aufgaben ist auszuschließen, daß die veränderliche Größe negative Werte annimmt. In diesem Beispiel läßt die vorgegeben Zaunlänge von 100m zusätzlich keine Seitenlängen über 50m zu, da ansonsten die zweite Seitenlänge (rechnerisch) negativ wäre. Allgemein findet man die obere Grenze für eine Größe, indem man mit der unteren Grenze für die andere Variable in der Nebenbedingung einsetzt.

*Zulässiges Intervall für die Rechengröße* $b \in [0;50],\ 25 \in [0;50]$

Ist die errechnete Variable aus diesem Intervall, so brauchen abschließend nur noch die gefragten Größen errechnet werden, in diesem Beispiel also die Seitenlängen und der Flächeninhalt.

*Gefragte Größen* $a = 50 - 25 = 25,\ A = 25 \cdot 25 = 625$

*Antwort* *Die Seitenlängen betragen jeweils 25m, der Flächeninhalt 625m²*.

### (b) Randextremstellen

***Beispiel**:* *Ein fest montierter, geradliniger, 100m langer Zaun soll durch Anfügen von weiteren 280m Zaun zu einer Umzäunung eines rechteckigen Platzes von größtem Flächeninhalt verwendet werden. Wie sind die Maße des Rechtecks zu wählen? Wie groß ist der Flächeninhalt der Umzäunung?*

Es gibt nun die Möglichkeit, die Vorgabe des fixen Zaunstücks von 100m in der Hauptbedingung oder in der Nebenbedingung zu berücksichtigen. Zur Verdeutlichung der sich ergebenden Situation wird im folgenden der zweite Weg vorgezeigt.

*Hauptbedingung* $A = a \cdot b$

In der Nebenbedingung wird nun berücksichtigt, daß für den Umfang 100m Zaun weniger benötigt werden.

*Nebenbedingung* $280 = 2a + 2b - 100$

*explizite Nebenbedingung* $a = 190 - b$

Durch Einsetzen in der Hauptbedingung ergibt sich:

*Hauptbedingung* $A(b) = (190 - b) \cdot b = 190b - b^2$

$A'(b) = 190 - 2b$

*Ableitung, Nullsetzen* $190 - 2b = 0$

$b = 95$

*Überprüfung 2. Ableitung*

$$A''(b) = -2$$
$$A''(95) = -2$$
$$Maximum$$

Überlegt man sich nun das zulässige Intervall für die Größe b, so gibt es diesmal einen vorgegebenen Minimalwert für b, wenn b diejenige Seitenlänge ist, auf der die 100m fixer Zaun stehen. Dann muß b nämlich mindestens 100m lang sein. Die Obergrenze für b ergibt sich durch Einsetzen der Minimallänge für die Seitenlänge a (=0) in der Nebenbedingung: 280 = 2b − 100, b = 190.

*Zulässiges Intervall für die Rechengröße* $b \in [100;190],\ 95 \notin [100;190]$

Das errechnete b = 95 ist also nicht Element dieses Intervalls. Das bedeutet, daß in dem zulässigen Intervall für b keine Extremstelle vorhanden ist. Dennoch gibt es in dem Intervall einen maximalen Funktionswert. Dieser kann sich dann nur an einer der beiden Randstellen des Intervalls befinden. Setzt man also mit den beiden Intervallsgrenzen in die Funktion für die Fläche ein, so ergibt sich der gesuchte Maximalwert an der Stelle mit dem größeren Funktionswert. Bei Minimumaufgaben ist dies entsprechend umgekehrt.

*Überprüfung Randstellen*

$$A(b) = 190b - b^2$$
$$A(100) = 9000$$
$$A(190) = 0$$

Bei einer Seitenlänge von b = 100 erhält man also den größten Flächeninhalt für diese Umzäunung.

*Antwort* *Die Seitenlängen betragen 100m und 90m, der Flächeninhalt beträgt* $9000m^2$.

Hätte man bei den Überlegungen für das zulässige Intervall die Seitenlänge a als diejenige angenommen, auf der die 100m fixer Zaun stehen, so hätte sich damit für b die Minimallänge b = 0 ergeben. Die zulässige Maximallänge erhält man wieder aus der Nebenbedingung durch Einsetzen von a = 100, der Minimallänge für a: 280 = 200 + 2b − 100 und daher b = 90.
Da der errechnete Wert b = 95 auch in diesem Fall nicht Element des Intervalls [0;90] gewesen wäre, hätte die Überprüfung wieder mit den Randstellen erfolgen müssen: A(0) = 0 und A(90) = 9000.
Man erhält also auch bei diesem Ansatz dasselbe Ergebnis, da die Berechnung natürlich unabhängig von der Beschriftung der Seiten des Rechtecks erfolgt.

## Anhang: Übungsbeispiele zum 12. Kapitel

12/1 Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall:

a) $f(x) = x^2$ [2;5]

b) $f(x) = 3x^2 + 2$ [–1;3]

c) $f(x) = 2x^3$ [–4;–1]

d) $f(x) = -x^3 + 3x + 4$ [–3;0]

12/2 Stellen Sie eine Formel für den Differentialquotienten $f'(x)$ auf und berechnen Sie $f'(1)$, $f'(5)$ und $f'(-0{,}8)$:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2 - x$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$

d) $f(x) = -2x$

12/3 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = x^{948}$

c) $f(x) = x^a$

d) $f(x) = x^{n+2}$

12/4 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2 + x$

b) $f(x) = -x^4 - x^3$

c) $f(x) = 7x^5 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}x$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 10$

e) $f(x) = 1000x^{500} - 650x^{100} + 2500x + 10300$

f) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

12/5 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = 5a^3b^2x^4 - 2a^2bx^2 + abx$

b) $f(b) = 5a^3b^2x^4 - 2a^2bx^2 + abx$

c) $f(a) = 5a^3b^2x^4 - 2a^2bx^2 + abx$

d) $f(z) = 5a^3b^2x^4 - 2a^2bx^2 + abx$

12/6 Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 24$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

c) $f(x) = x^3 + x + 1$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 - 3{,}3125$

12/7 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$

12/8 Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = -3x^3 + 9x$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3$

12/9 Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

12/10 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = -3x^3 + 9x$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3$

12/11 Bestimmen Sie die Extremstellen und das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen mit Hilfe der 2. Ableitung:

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x - 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

c) $f(x) = x^4 - x^2$

d) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

e) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

12/12 Bestimmen Sie die Wendestellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

b) $f(x) = x^3 - 12x + 8$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$

d) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

12/13 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3$

d) $f(x) = \frac{1}{50}(x^4 - x^2)$

12/14 Führen Sie bei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)(x^2 + 2x - 8)$

d) $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32)$

12/15 Führen Sie bei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$

b) $f(x) = -\frac{1}{16}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x - 5$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4x + 4$

12/16 Führen Sie bei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^4$

12/17 Führen Sie bei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = x^3 - 9x$

c) $f(x) = 2x^3 + 6x^2$

d) $f(x) = x^3 - \frac{1}{16}x^5$

12/18 Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2$ hat den Extrempunkt E(4|4).

12/19 Der Graph von $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + px^2 + 2$ hat den Wendepunkt an der Stelle 2.

12/20 Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 - \frac{9}{2}x + d$ hat an der Stelle 4 den Wendepunkt mit der Wendetangente $t\colon 3x - 2y = 0$.

12/21 Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades geht durch P(2|3) und hat in W(0|1) den Wendepunkt; die Steigung der Wendetangente ist –3.

12/22 Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente; im Punkt P(–1|0,75) beträgt die Steigung der Tangente –2.

12/23 Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades hat in O(0|0) einen Extrempunkt und in W(1|–11) einen Wendepunkt; die Steigung der Wendetangente beträgt dort –16. Berechnen Sie den zweiten Wendepunkt.

12/24 Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades hat in O(0|0) die Steigung 3 und in T(6|0) den Tiefpunkt. Der Graph einer weiteren quadratischen Funktion g hat seinen Scheitelpunkt an der Stelle 3 und schneidet den Graphen von f in O rechtwinklig. Führen Sie bei beiden Funktionen eine Kurvendiskussion durch.

12/25 Differenzieren Sie die folgenden Funktionen mit der Produktregel:

a) $f(x) = (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$

b) $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$

c) $f(x) = x^3(x^4 - 1)$

d) $f(x) = (x - 1)(2x^2 - 2)(2x^3 - 3)$

12/26 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 15}{x^3 + x^2 + x + 1}$

12/27 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$

c) $f(x) = (x+2) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

12/28 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^{-3}}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^{-2}}}}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x}}}$

12/29 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{(x^3-2x)^4}$

12/30 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$

c) $f(x) = \sin^2(x)$

d) $f(x) = \tan(3x^3)$

12/31 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = (\cos^2(x) + 1)^3$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin(x)+1}{\cos(x)+1}}$

c) $f(x) = x^2 \cdot \tan(x^2)$

d) $f(x) = \dfrac{1+\tan(x)}{x}$

12/32 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = e^{3x} + 3x$

b) $f(x) = e^x \cdot \sin(x^2)$

c) $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)}+1}{e^{\cos(x)}+1}$

d) $f(x) = \dfrac{10^x \cdot \sin(x)}{\cos(2^x)}$

12/33 Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2)}$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = \log_{10}(x^2) \cdot 10^x$

e) $f(x) = \ln^2(\sin(x))$

f) $f(x) = \tan(e^{x \cdot \sin(x)})$

12/34 Bestimmen Sie zwei nichtnegative Zahlen a und b, deren Summe 50 ist, sodaß $ab^2$ ein Maximum ist.

12/35 Bestimmen Sie zwei Zahlen x und y (x,y > 0), deren Summe 100 ist, sodaß das Produkt $x^2y^3$ ein Maximum ist.

12/36 Einem Dreieck mit den Seiten a = 13, b = 15 und c = 14 ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, daß eine Seite des Rechtecks auf der Seite c zu liegen kommt.

12/37 Einem Dreieck mit c = 12 und h = 8 wird das flächengrößte Rechteck eingeschrieben, sodaß eine Seite des Rechtecks auf der Seite c zu liegen kommt. Dem verbleibenden Dreieck über dem Rechteck wird wie vorher ein Rechteck eingeschrieben usw. Berechnen Sie die Summe aller Rechtecksflächeninhalte.

12/38 Von einer rechteckigen Platte a = 125, b = 100 ist eine Ecke abgesprungen, sodaß auf der einen Seite a nur mehr 80 cm und auf einer Seite b noch 60 cm übrigbleiben. Man möchte nun aus dem verbleibenden Rest wieder ein möglichst großes Rechteck herausschneiden. Wie müssen die Maße dieses Rechtecks gewählt werden?

12/39 Einem Trapez mit $a = 8$, $c = 4$ und $h = 3$ wird das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingeschrieben. Berechnen Sie die Maße dieses Rechtecks.

12/40 Einem Halbkreis mit $r_1 = 6$ wird ein Rechteck von maximaler Fläche eingeschrieben, diesem wiederum ein Halbkreis usw. Berechnen Sie das Verhältnis der Summe aller Rechtecksflächeninhalte zur Summe aller Halbkreisflächeninhalte.

12/41 Einem Drehkegel ($r = 3$, $h = 9$) wird der volumsgrößte Zylinder eingeschrieben, dem darüber verbleibenden Kegel wiederum usw. Berechnen Sie das Verhältnis des Kegelvolumens zur Summe der Zylindervolumina.

12/42 Einem Kegel ($r_1 = 4$ cm, $h_1 = 12$ cm) wird ein Zylinder von maximalem Volumen eingeschrieben, dem verbleibenden Restkegel wiederum usw. Berechnen Sie das Verhältnis von Kegelvolumen zur Summe aller Zylindervolumina.

12/43 Einem Kegelstumpf ($r_1 = 6$, $r_2 = 2$, $h = 4$) wird der volumsgrößte Zylinder eingeschrieben. Berechnen Sie die Maße und das Volumen dieses Zylinders.

12/44 Einer Kugel vom Radius r wird ein Drehkegel von maximalem Volumen eingeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis von Kegelvolumen zum Kugelvolumen.

12/45 Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters ist $U = 500$ cm. Ermittlen Sie Breite und Höhe des Fensters so, daß der Flächeninhalt maximal wird.

12/46 Welche Maße muß eine zylindrische (beidseitig geschlossene) Dose haben, damit ihr Volumen 1 $dm^3$ beträgt und der Materialverbrauch am kleinsten ist?

12/47 Einem Quadrat soll ein gleichschenkliges Dreieck mit möglichst kleinem Flächeninhalt umschrieben werden, sodaß eine Seite des Quadrats auf der Grundlinie des Dreiecks liegt. Berechnen Sie die Maße des Dreiecks.

12/48 Einem Halbkreis mit r = 6cm ist ein Rechteck so einzuschreiben, daß eine Rechtecksseite auf dem Durchmesser des Halbkreises liegt. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit ein Zylinder, der durch Zusammenrollen dieses Rechtecks entsteht, maximales Volumen hat? Wie groß ist dieses Volumen?

12/49 Ein Verein möchte Werbeprospekte herausgeben. Jeder Prospekt soll ein einseitig bedrucktes Papierblatt sein, wobei die bedruckte Fläche $A = 96\,cm^2$ ausmachen soll. Links und rechts soll ein Rand von je 2 cm bleiben, oben und unten von je 3 cm. Wie lauten die Maße des Prospektes, damit der Papieraufwand minimal ist?

12/50 Aus drei gleich breiten Brettern (Breite 10 cm) soll eine Rinne mit möglichst großem Fassungsvermögen (also Querschnitt) gebildet werden. Berechnen Sie das Maß des Neigungswinkels der Seitenwände gegen die Horizontale (Hinweis: Es entsteht also ein gleichschenkliges Trapez als Querschnittfläche).

12/51 Wie lange darf eine Stange höchstens sein, damit sie in waagrechter Lage um die Ecke eines Ganges getragen werden kann, der auf der einen Seite 3 m und auf der anderen Seite 2 m breit ist?

12/52 Von einer Trafostation T, die an einer geraden Straße steht, soll ein Stromkabel zu einem Haus H verlegt werden. Die kürzeste Entfernung des Hauses von der Straße beträgt 300 m, die Luftlinie von der Trafostation zum Haus 500 m. Wie ist die Leitung zu verlegen, damit die Kosten, die längs der Straße S 300,- und querfeldein S 500,- pro Meter betragen, minimal werden?

12/53 Herr Adam ist in einem Boot im Punkt A genau 1 km vom nächsten Punkt B der geradlinigen Küste entfernt und möchte zu einem Punkt C der Küste gelangen, der von B genau 1 km entfernt ist. Herr Adam erreicht mit seinem Boot eine Geschwindigkeit von 3 km/h, an Land schafft er zu Fuß 5 km/h. Welchen Punkt X der Küste muß Herr Adam ansteuern, um möglichst schnell in C zu sein?