10. FOLGEN, REIHEN, GRENZWERTE

10.1. Folgen

(a) Definition

Betrachtet man bei einer Funktion nur jene Funktionswerte, die sich durch Einsetzen von **Argumenten n aus den natürlichen Zahlen** ergeben, so erhält man eine Punktmenge. Beginnt man diesen Vorgang darüberhinaus mit n = 1 und durchläuft alle weiteren n aus den natürlichen Zahlen bis zu einem Wert n = k, ergibt sich eine Punktmenge, die sich folgendermaßen anschreiben läßt:

$f: N_k \to R,\ n \to f(n)$ $\{(1,f(1)), (2,(f(2)), (3,f(3)), ..., (k-1,f(k-1)), (k,f(k))\}$

Die Menge N_k steht in diesem Zusammenhang für die Menge N = {1, 2, 3, ..., k–1, k}.

Durch die Wahl der Argumente n aus den natürlichen Zahlen ist in der obigen Punktmenge gleichzeitig eine Reihenfolge der Punkte festgelegt. Es würde also genügen, nur die Funktionswerte f(n) anzuschreiben, um die obige Punktmenge eindeutig zu bestimmen. Diese Funktionswerte f(n) legen somit eine sogenannte **Folge** von Zahlen fest, wobei durch das Argument n eine Platznummer und somit eine **Reihenfolge** festgelegt ist. Man bezeichnet die Menge N_k auch als **Indexmenge**.

Da sich Funktionswerte wiederholen können, kann eine Folge von Funktionswerten nicht wie eine Menge angeschrieben werden. Man verwendet stattdessen sogenannte **Folgeklammern** ⟨ und ⟩, um eine Folge anzugeben: $\langle f(1), f(2), f(3), ..., f(k-1), f(k)\rangle$

Ist die Indexmenge unbegrenzt, also N, so spricht man von einer **unendlichen Folge**, ansonsten von einer **endlichen Folge**. Die Elemente der Folge werden auch als Glieder der Folge bezeichnet, entsprechend ihrer Position auch als n-tes Glied. Um die Zugehörigkeit zu einer Folge zu verdeutlichen werden die Glieder einer Folge als a_n (oder b_n usw.) angeschrieben.

Eine Funktion f über einem Abschnitt N_k als Definitionsmenge nennt man eine endliche Folge: $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, a_k\rangle$

Eine Funktion f über einem Abschnitt N als Definitionsmenge nennt man eine unendliche Folge: $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, a_k, ...\rangle$

(b) Festlegen von Folgen

Es gibt folgende Möglichkeiten Folgen festzulegen:

Angabe aller Glieder der Folge (bei endlichen Folgen)

***Beispiele**:* $\langle 2, 3, 5, 7, 11, 13 \rangle$ *Folge der Primzahlen kleiner 15*

$\langle a, e, i, o, u \rangle$ *Folge der Vokale des Alphabets*

Angabe des erzeugenden Terms

Ist die Folge durch einen Term darstellbar, erhält man jedes Glied der Folge durch Belegen des Terms mit der jeweiligen Indexnummer.

***Beispiele**:*

$\langle n^2 - 4n + 4 \rangle$ für $n \in N_4$ $\quad \langle 1, 0, 1, 4 \rangle$

$\langle 5 \cdot (-2)^n \rangle$ für $n \in N$ $\quad \langle -10, 20, -40, 80, \ldots \rangle$

$\langle \frac{2n}{n} \rangle$ für $n \in N$ $\quad \langle 2, 2, 2, \ldots \rangle$

Die letzte Folge bezeichnet man auch als konstante Folge. Ist bei einer Folgenangabe durch einen Term keine Indexmenge angegeben, so gilt vereinbarungsgemäß N als Indexmenge.

Angabe durch eine Rekursionsformel

Das Erzeugen von Folgen erfolgt manchmal schrittweise, indem eine Vorschrift angegeben ist, nach der das nächstfolgende Glied aus einem oder mehreren vorangehenden Gliedern zu berechnen ist. Eine solche Vorschrift nennt man Rekursionsformel. Zusätzlich müssen zumindest die notwendigen Anfangsglieder bekannt sein.

***Beispiele**:*

$\langle a_{n+1} = a_n + 2 \rangle$, $a_1 = -3$ $\quad \langle -3, -1, 1, 3, \ldots \rangle$

$\langle a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \rangle$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ $\quad \langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \rangle$

(c) Arithmetische Folgen

Wir betrachten die lineare Funktion f: $y = k{\cdot}x+d$. Diese Funktion hat ihren Namen nicht zuletzt aufgrund der Tatsache, daß bei fortschreitenden Werten von x die Funktionswerte y um den gleichen linearen Faktor zunehmen. Anders ausgedrückt: gleicher Zuwachs bzw. Abnahme der Werte von x - z.B. um h - bewirkt immer gleiche Änderung der Werte von y. Größe dieser Änderung ist dann $k{\cdot}h$.

Greift man nämlich zwei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen heraus, so können diese Punkte P_1, P_2 folgende Koordinaten $P_1\ (x_1|y_1)$ und $P_2\ (x_2|y_2)$ haben, wobei $x_2 = x_1+h$ gewählt wird, damit $x_2 - x_1 = h$ gilt. Setzt man die Koordinaten dieser Punkte in die Funktionsgleichung ein und subtrahiert sie voneinander um das d zu eliminieren, so erhält man:

$$y_2 = k \cdot (x+h) + d$$
$$y_1 = k \cdot x \quad + d$$
$$y_2 - y_1 = k \cdot (x+h) - k \cdot x$$

und nach dem Zusammenfassen $$y_2 - y_1 = k \cdot h$$

Der Graph dieser Funktion f: $y = k{\cdot}x+d$ für ganzzahlige x ist eine Punktemenge, wobei die einzelnen Punkte auf der reellen Funktion $y = kx+d$, einer Geraden, liegen. Wählt man ein Intervall aus den x-Werten aus und numeriert die x-Werte mit 1 beginnend durch, so ergibt sich für die y-Werte eine Folge, die die charakteristische Eigenschaft hat, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge immer gleich groß ist (siehe oben für h = 1). Eine Folge dieser Art bezeichnet man als arithmetische Folge.

Jede Folge, bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, heißt **arithmetische Folge**.

Üblicherweise hat sich für die Bezeichnung der Glieder einer arithmetischen Folge eine eigene Schreibweise ergeben, die jedoch von der Schreibweise der linearen Funktionen abweicht. Um die oben genannte Eigenschaften zu verdeutlichen wurden folgende Bezeichnungen gewählt:

a_1 ... Anfangsglied, n ... Indexnummer des jeweiligen Gliedes, d ... Differenz zweier Glieder

Da $a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_2+d = a_1+2d$, ..., $a_n = a_{n-1}+d = a_1+(n-1){\cdot}d$ gilt, ergibt sich:

Eine arithmetische Folge hat die Form $\langle a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1){\cdot}d, ...\rangle$

Diese Folge hat einige charakteristische Eigenschaften:

Ausgehend von einem Anfangsglied, werden die Folgeglieder immer durch Addition ein und derselben Zahl ermittelt. Daher muß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant sein. Es gilt:

$$a_2 - a_1 = (a_1 + d) - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = (a_2 + d) - a_2 = d$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n+1} - a_n = (a_n + d) - a_n = d$$

Das sogenannte arithmetische Mittel, der übliche Mittelwert, der Nachbarglieder jedes Folgenelements ergibt das jeweilige Folgenelement. Es gilt:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + (n-2)\cdot d) + (a_1 + n\cdot d)}{2} = \frac{2a_1 + (2n-2)\cdot d}{2} = a_1 + (n-1)\cdot d = a_n$$

Zwischen zwei Gliedern a_r und a_s einer arithmetischen Folge besteht die Beziehung $a_s = a_r + (s-r)\cdot d$

denn $a_r = a_1 + r\cdot d$, $a_s = a_1 + s\cdot d = a_1 + r\cdot d + (s-r)\cdot d = a_r + (s-r)\cdot d$

Somit ist auch folgende Definition für arithmetische Folgen möglich:

Jede Folge, die durch einen linearen Term in n über N_k oder N erzeugt wird, heißt arithmetische Folge.

***Beispiel**: Ein Skriptum mit 500 Seiten ist 52 mm dick, wobei der Einband 2mm stark ist. Berechnen Sie, wie dick ein Skriptum mit 320 Seiten bzw. mit 780 Seiten ist.*

Da anzunehmenderweise die Seiten des Skriptums stets gleich dick sind, ergibt sich eine arithmetische Folge mit der Dicke des Einbands als Anfangswert a_1 und der Dicke einer Seite als Differenz d, welche noch zu ermitteln ist.

$$a_1 = 2,\ a_{501} = a_1 + 500\cdot d = 52$$
$$a_{501} - a_1 = 500\cdot d = 50,\ d = 0{,}1$$
$$a_{321} = 2 + 320\cdot 0{,}1 = 34$$
$$a_{781} = 2 + 780\cdot 0{,}1 = 80$$

Das eine Skriptum ist 34mm, das andere 80mm dick.

***Beispiel**: Eine 1m lange Eisenbahnschiene dehnt sich bei Erwärmung um 1°C um $1{,}2\cdot10^{-5}$ m aus. Berechnen Sie die Ausdehnung einer 40 Meter langen Schiene nach einer Erwärmung um 10°, um 120° und um 300° Celsius.*

Da Eisenbahnschienen in der Natur verlegt nicht über einen bestimmten Wert (z.B. 700°C bei Schnellbremsung des Zuges) erhitzt werden können, bilden die temperaturabhängigen Längenänderungen eine endliche arithmetische Folge.

$$a_1 = 40,\ d = 40\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5} = 4{,}8\cdot 10^{-4}$$
$$a_{11} = a_1 + 10\cdot d = 40 + 10\cdot 4{,}8\cdot 10^{-4} = 40{,}0048$$
$$a_{121} = a_1 + 120\cdot d = 40 + 120\cdot 4{,}8\cdot 10^{-4} = 40{,}0576$$
$$a_{301} = a_1 + 300\cdot d = 40 + 300\cdot 4{,}8\cdot 10^{-4} = 40{,}144$$

Die Schienen dehnen sich bei 10°C Temperaturerhöhung um 4,8 mm, bei 120° um 57,6 mm und bei 300° um 144 mm aus.

***Beispiel**: Im Jahr 1202 behandelte der italienische Mathematiker Leonardo von PISA eine Zahlenfolge, die durch die Vermehrung eines Kaninchenpaares beschrieben werden kann. „Das Paar wirft vom 3. Lebensmonat an in jedem Lebensmonat ein weiteres Kaninchenpaar, ebenso wie alle seine Nachkommen “. Überprüfen Sie, ob es sich bei der monatlichen Anzahl der Kaninchenpaare um eine arithmetische Folge handelt.*

Aus mathematischer Sicht ist dieser Vermehrung keine Grenze gesetzt. Die Folge ist über also über N definiert. Man kennt $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$, da es erst ab dem 3. Monat Nachwuchs gibt. Somit ergeben sich die weiteren Folgenglieder:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 2,\ a_4 = a_2 + a_3 = 3,\ a_5 = a_3 + a_4 = 5,\ a_6 = a_4 + a_5 = 8,\ a_7 = a_5 + a_6 = 13,\ \text{usw.}$$

Und gesamt: $\langle 1,1,2,3,5,13,21,34,55, ...\rangle$ *bzw.* $\langle a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\rangle$

Man erkennt, daß es sich bei diesem Beispiel um keine arithmetische Folge handelt.

(d) Geometrische Folgen

Im folgenden Abschnitt sollen ähnliche Betrachtungen nun für die Exponentialfunktion angestellt werden. Betrachtet man zwei Punkte $P_1(x_1|c\cdot a^{x_1})$ und $P_2(x_2|c\cdot a^{x_2})$ der Exponentialfunktion $y = c\cdot a^x$ und errechnet den relativen Unterschied der Funktionswerte (d.h. den Quotienten der Funktionswerte), so erhält man für $x_2 = x_1+h$:

$$y_1 = c\cdot a^{x_1}$$
$$y_2 = c\cdot a^{x_1+h}$$
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{c\cdot a^{x_1+h}}{c\cdot a^{x_1}} = a^h$$

Man erkennt, daß gleicher Zuwachs der x-Werte (hier um h) immer gleiche relative Änderung der Funktionswerte y im Verhältnis a^h zur Folge hat. Oder anders ausgedrückt: der Funktionswert des um h vergrößerten Arguments unterscheidet sich vom ursprünglichen um den Faktor a^h, also $y_2 = y_1\cdot a^h$.

Der Graph der Funktion f: $y = c\cdot a^x$ für ganzzahlige x ist eine Punktemenge, wobei die einzelnen Punkte auf der Trägerkurve der reellen Funktion $y = c\cdot a^x$ liegen. Wählt man ein Intervall aus den x-Werten aus und numeriert die x-Werte mit 1 beginnend durch, so ergibt sich für die y-Werte eine Folge, die die charakteristische Eigenschaft hat, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge immer gleich groß ist (siehe oben für h = 1). Eine Folge dieser Art bezeichnet man als geometrische Folge.

Jede Folge, bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, heißt **geometrische Folge**.

Üblicherweise hat sich für die Bezeichnung der Glieder einer geometrischen Folge eine eigene Schreibweise ergeben, die jedoch von der Schreibweise der Exponentialfunktion abweicht. Um die oben genannten Eigenschaften zu verdeutlichen wurden folgende Bezeichnungen gewählt:

b_1 ... Anfangsglied, n ... Indexnummer des jeweiligen Gliedes, q ... Quotient

Da $b_2 = b_1\cdot q$, $b_3 = b_2\cdot q = b_1\cdot q^2$, ..., $b_n = b_{n-1}\cdot q = b_1\cdot q^{n-1}$ usw. gilt, ergibt sich:

Eine geometrische Folge hat die Form $\langle b_1, b_1\cdot q, b_1\cdot q^2, ..., b_1\cdot q^{n-1}, ...\rangle$

Diese Folge hat einige charakteristische Eigenschaften:

Ausgehend von einem Anfangsglied, werden die Folgeglieder immer durch Multiplikation mit ein und derselben Zahl ermittelt. Daher muß der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant sein. Es gilt:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_1 \cdot q}{b_1} = q$$
$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2 \cdot q}{b_2} = q$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n \cdot q}{b_n} = q$$

Das sogenannte geometrische Mittel der Nachbarglieder jedes Folgenelements ergibt das jeweilige Folgenelement. Es gilt:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n} = \sqrt{b_1^2 \cdot q^{2n-2}} = b_1 \cdot q^{n-1} = b_n$$

Somit ist auch folgende Definition für geometrische Folgen möglich:

Jede Folge, die durch einen Exponentialterm der Form $b_1 \cdot q^{n-1}$ in n über N_k oder N erzeugt wird, heißt geometrische Folge.

***Beispiel**: Fünf in frischer Kuhmilch eingebrachte Keime (z.B. Milchsäurebakterien) verdoppeln sich bei Temperaturen über 30° C alle 20 Minuten. Berechnen Sie die Anzahl nach 4 und 12 Stunden.*

Da sich die Anzahl der Keime alle 20 Minuten verdoppelt, entspricht dies einer Multiplikation mit 2. Um die Anzahl nach x Stunden zu berechnen, müssen die Stunden noch jeweils auf Vielfache von 20 umgerechnet werden.

$$b_1 = 5,\ q = 2$$
$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5 \cdot 2^{12} = 20480$$
$$b_{37} = b_1 \cdot q^{36} = 5 \cdot 2^{36} = 68719476736$$

Nach 4 Stunden sind es 20480 Keime, nach 12 Stunden fast 69 Milliarden Keime.

(e) Monotonie von Folgen

Bei den bisherigen Folgen konnte man meist ein Zunehmen oder Abnehmen der Werte der Folgenglieder mit wachsendem Index feststellen. Allgemein läßt sich dieser Sachverhalt folgendermaßen formulieren:

> Eine Folge von Zahlen $\langle a_n \rangle$ heißt **streng monoton** zunehmend bzw. abnehmend, wenn für alle a_n, a_{n+1} gilt: $a_n < a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$
>
> Eine Folge von Zahlen $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton** zunehmend bzw. abnehmend, wenn für alle a_n, a_{n+1} gilt: $a_n \le a_{n+1}$ bzw. $a_n \ge a_{n+1}$

Mit dieser Definition gleichwertig ist das Kriterium, ob die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder einer Folge größer bzw. kleiner (streng monoton) oder größer gleich bzw. kleiner gleich (monoton) Null ist.

Folgen, auf die keines der oben genannten Kriterien zutrifft, bezeichnet man als nicht monotone Folgen. Folgen, bei denen darüberhinaus aufeinanderfolgende Glieder jeweils unterschiedliches Vorzeichen aufweisen (z.B. $\langle (-2)^n \rangle$), bezeichnet man als alternierende Folgen. Als ein Sonderfall ist noch die konstante Funktion (z.B. $\langle 2 \rangle$) anzuführen, die sowohl monoton zunehmend als auch monoton abnehmend ist.

***Beispiel**:* *Überprüfen Sie, ob die Folge $\left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$ streng monoton zunimmt.*

$$a_n < a_{n+1}$$
$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}$$
$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2n+1}{n+2}$$
$$(2n-1)(n+2) < (2n+1)(n+1)$$
$$2n^2+3n-2 < 2n^2+3n+1$$
$$-2 < 1$$

Die Folge ist streng monoton zunehmend.

Da die Berechnungen zu einer für alle $n \in N$ wahren Aussage führen, ist die Voraussetzung - nämlich, daß die Folge streng monoton zunimmt - als bewiesen anzusehen.

10.2. Reihen

(a) Definition

In manchen Fällen sind nicht nur die einzelnen Glieder einer Folge interessant, sondern auch die Summe einzelner Glieder dieser Folge.

***Beispiel**: Die nachstehende Folge gibt die Niederschlagsmengen in mm von Jänner bis Dezember einer Stadt wieder: $\langle 81, 12, 15, 33, 65, 37, 105, 121, 63, 48, 75, 18\rangle$. Berechnen Sie jeweils die Niederschlagssumme bis zum Ende jedes Quartals.*

Die Niederschlagssumme bis zum Ende jedes Quartals ist offensichtlich die Summe der einzelnen Monatsniederschlagsmengen bis zum 3., 6., 9. und 12. Monat.

$$s_3 = 81 + 12 + 15 = 108$$
$$s_6 = 81 + 12 + \ldots + 65 + 37 = 243$$
$$s_9 = 81 + 12 + \ldots + 121 + 63 = 532$$
$$s_{12} = 81 + 12 + \ldots + 75 + 18 = 673$$

Im obigen Beispiel wurde der Folge der Monatsniederschläge $\langle a_n\rangle$ die Folge $\langle s_n\rangle$ zugeordnet, wobei s_n jeweils die Summe der ersten n Glieder der Folge $\langle a_n\rangle$ waren. Die einzelnen s_n sind also Teilsummen. Die so entstehende Folge der Teilsummen bezeichnet man als die der Folge $\langle a_n\rangle$ zugeordnete Reihe.

Unter einer Reihe von Zahlen versteht man die Folge der Teilsummen $\langle s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots\rangle$, die der Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\rangle$ zugeordnet wird.

Je nachdem ob die Anzahl der Glieder der Folge $\langle a_n\rangle$ endlich ist oder unendlich, spricht man von einer endlichen oder einer unendlichen Reihe.

Die Summation $s_n = s_1+s_2+\ldots+s_n$ läßt sich mit dem Summensymbol Σ vereinfacht anschreiben:

Summe s_n aller a_i von i = 1 bis n	$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

(b) Arithmetische Reihen

Die einer arithmetischen Folge zugeordnete Reihe heißt arithmetische Reihe.

Da die einzelnen Glieder einer arithmetischen Folge durch den linearen Term $a_n = a_1+(n-1)\cdot d$ gebildet werden, kann man sich zurecht die Frage stellen, ob sich die Teilsummen s_n nicht ebenfalls durch eine Termdarstellung gewinnen lassen.

Allgemein gilt für das Glied s_n einer arithmetischen Reihe $s_n = a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$.
Laut Bildungsterm gilt weiters $s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...+(a_1+(n-2)d)+(a_1+(n-1)d)$.
Faßt man nun das erste und das letzte Glied zusammen, dannach das zweite und das vorletzte, usw., so ergeben sich immer wieder glieche Teilsummen:

$$
\begin{aligned}
a_1+a_n &= a_1+a_n \\
a_2+a_{n-1} &= (a_1+d)+(a_1+(n-2)d) = a_1+(a_1+(n-1)d) = a_1+a_n \\
a_3+a_{n-2} &= (a_1+2d)+(a_1+(n-3)d) = a_1+(a_1+(n-1)d) = a_1+a_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n-1}+a_2 &= (a_1+(n-2)d)+(a_1+d)=a_1+(a_1+(n-1)d) = a_1+a_n \\
a_n+a_1 &= a_1+a_n
\end{aligned}
$$

Addiert man nun alle Zeilen, so steht links zweimal die Summe aller Glieder, also $2\cdot s_n$. Auf der rechten Seite wird n-mal die Summe a_1+a_n addiert. Es ergibt sich also: $2\cdot s_n = n\cdot(a_1+a_n)$

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge beträgt:

$$s_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2} \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n\cdot[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100.*

$$a_1 = 1,\ a_n = 100,\ d = 1$$

$$s_n = \frac{100\cdot(1+100)}{2} = 5050$$

$$s_n = \frac{100\cdot(2+99\cdot 1)}{2} = 5050$$

Diese Aufgabe ist berühmt geworden, da Carl Friedrich GAUSS, einer der größten Mathematiker der Geschichte, sie im Alter von 14 Jahren ohne Anleitung lösen konnte.

(c) Geometrische Reihen

Die einer geometrischen Folge zugeordnete Reihe heißt geometrische Reihe.

Da die einzelnen Glieder einer geometrischen Folge durch den linearen Term $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ gebildet werden, kann man sich auch hier die Frage stellen, ob sich die Teilsummen s_n nicht ebenfalls durch eine Termdarstellung gewinnen lassen.

Allgemein gilt für das Glied s_n einer geometrischen Reihe $s_n = b_1+b_2+b_3+...+b_{n-1}+b_n$.

Laut Bildungsterm gilt weiters $s_n = b_1+b_1 \cdot q+b_1 \cdot q^2+...+b_1 \cdot q^{n-2}+b_1 \cdot q^{n-1}$.

Multipliziert man diese Gleichung mit q, so erhält man $q \cdot s_n = b_1 \cdot q+b_1 \cdot q^2+b_1 \cdot q^3+...+b_1 \cdot q^{n-1}+b_1 \cdot q^n$.

Subtrahiert man nun die beiden Gleichungen voneinander, so fallen die meisten Glieder weg

$$s_n - q \cdot s_n = b_1+b_1 \cdot q+b_1 \cdot q^2+...+b_1 \cdot q^{n-2}+b_1 \cdot q^{n-1} - (b_1 \cdot q+b_1 \cdot q^2+b_1 \cdot q^3+...+b_1 \cdot q^{n-1}+b_1 \cdot q^n) = b_1 - b_1 \cdot q^n.$$

Für s_n ergibt sich dadurch $s_n \cdot (1-q) = b_1 \cdot (1-q^n)$

Die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge beträgt:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{bzw.} \quad s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \text{jeweils für } q \neq 1$$

Für q = 1 erhält man die offensichtliche Summe $s_n = n \cdot b_1$. Es ist zweckmäßig, die erste Formel für $0<q<1$ zu verwenden und die zweite für $q>1$.

***Beispiel**: Einem Quadrat mit der Seitenlänge 6cm wird ein weiteres Quadrat so eingeschrieben, daß seine Eckpunkte in die Seitenmitten des gegeben Quadrats fallen. In das zweite Quadrat wird auf gleiche Weise wieder ein Quadrat eingeschrieben und so fort. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der ersten 12 Quadrate.*

$$A_1 = b_1^2 = 6^2 = 36, \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = b_2^2, A_2 = b_2^2 = b_1^2 \cdot \frac{1}{2}, q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$$

$$s_{12} = 36 \cdot \frac{1-0{,}5^{12}}{1-0{,}5} = 71{,}98242\ldots$$

Der Flächeninhalt der ersten 12 Quadrate beträgt 71,98cm².

10.3. Anwendung Folgen und Reihen

Aus der Vielfalt der Anwendungsbereiche von Folgen und Reihen - Folgen und Reihen in Verbindung mit Grenzwertberechnungen bilden die Grundlage der höheren Mathematik - soll hier der Anwendungsbereich der Finanzmathematik herausgegriffen werden. Genau genommen haben die bisherigen Ausführungen über Zinsen und Zinseszinsen bereits engen Zusammenhang zum Abschnitt Folgen gezeigt.

Betrachtet man nämlich ein Kapital und sein jährliches Wachsen bei einem bestimmten Zinssatz, so ergeben die Kapitalbeträge am Jahresende bei einfacher Verzinsung eine arithmetische Folge; bei Verzinsung unter Berücksichtigung der Zinseszinsen führt die obige Kapitalfolge zu einer geometrischen Folge.

(a) Rentenrechnung

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung sogenannter Renten. Als Rente bezeichnet man eine Folge von Zahlungen gleicher Größe in gleichen Zeitabständen. Die Aufgabe der Rentenrechnung besteht nun darin, den Wert aller Rentenraten für einen bestimmten Zeitpunkt zu ermitteln.

***Beispiel**: Jemand zahlt 4 Jahre lang jeweils am Ende eines jeden Jahres ÖS 10000,- auf ein Sparkonto ein. Wie groß ist der Wert der Einzahlungen am Ende des 4. Jahres, wenn die Einzahlungen mit p = 6% p.a. Zinseszins verzinst werden?*

Bezeichnet man mit t = 0 den Beginn dieser Rente, so wird zum Zeitpunkt t = 1, t = 2, t = 3 und t = 4 jeweils die Rentenrate einbezahlt. Der Betrag zum Zeitpunkt t = 1 wird bis zum Ende der Rente, also t = 4, über 3 Perioden verzinst, der Betrag zum Zeitpunkt t = 2 wird über 2 Perioden verzinst, usw. Der letzte Betrag zum Zeitpunkt t = 4 wird also nur mehr dem Kapital unverzinst hinzugezählt.

$$
\begin{aligned}
10000 \cdot 1{,}06^3 &= 11910{,}16 \\
10000 \cdot 1{,}06^2 &= 11236 \\
10000 \cdot 1{,}06^1 &= 10600 \\
& 10000 \\
\text{Summe} & 43746{,}16
\end{aligned}
$$

Nach 4 Jahren ist der Wert der Rente ÖS 43746,16.

Im vorigen Beispiel wurde der Wert der Rente für das Ende t = n der Rente bestimmt. Diesen Wert bezeichnet man als den **Endwert E_n** einer Rente. Wird im Gegensatz dazu der Wert der Rente für den Zeitpunkt t = 0 bestimmt, so nennt man diesen Betrag den **Barwert B_n** der Rente.

Der **Wert einer Rente** zu einem Zeitpunkt t ist als der Betrag zu verstehen, den man **zum Zeitpunkt t einmalig** zu bezahlen hätte, um alle bis dahin geleisteten Zahlungen samt Zinseszinsen abzugelten. Der Endwert ist dann also der Gesamtwert der Rente am Ende der Rente; der Barwert ist jener Betrag, den man am Beginn der Rente als einmaligen Betrag einzahlen muß, um nach n Zinsperioden zum gleichen Endwert zu gelangen.

Im Rahmen der Rentenrechnung unterscheidet man darüberhinaus verschiedene Arten von Renten, abhängig vom Zeitpunkt der Zahlung der Rentenrate. Wird die Rentenrate wie im vorigen Beispiel jeweils am Ende der Rentenperiode bezahlt, so spricht man von einer **nachschüssigen (postnumerando)** Rente; die erste Zahlung erfolgt somit zum Zeitpunkt t = 1. Wird die Rentenrate jeweils am Beginn der Rentenperiode bezahlt, so spricht man von einer **vorschüssigen (pränumerando)** Rente; die erste Zahlung erfolgt also zum Zeit-punkt t = 0.

Prinzipiell könnte darüberhinaus noch zwischen **vor- und nachschüssigen (antizipativ und dekursiv) Zinssätzen** unterschieden werden; da sich aber ein vorschüssiger Zinssatz jederzeit in einen nachschüssigen umrechnen läßt und umgekehrt, beschränken sich die folgenden Ausführungen, falls nicht anders angegeben, immer auf dekursive Zinssätze.

Im vorigen Beispiel konnte man darüberhinaus feststellen, daß die einzelnen Rentenraten zum Ende der Rente hingerechnet eine geometrische Folge bilden. Die Summe der Werte der einzelnen Rentenraten zum Zeitpunkt t = n, also den Endwert, hätte man mit der entsprechenden Summenformel für geometrische Folgen leichter errechnen können. Die Folge der Endwerte einer Rente nach jeweils einer weiteren Rentenperiode bilden also eine geometrische Reihe.

Für das vorige Beispiel heißt das:

$$b_1 = 10000,\ q = 1{,}06,\ n = 4$$

$$s_4 = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746{,}16$$

Nach 4 Jahren ist der Wert der Rente ÖS 43746,16.

Verallgemeinert man diese Zusammenhänge, so kann man für Barwert und Endwert einer nachschüssigen Rente allgemeine Formel erstellen, da der Barwert durch Abzinsen über alle Rentenperioden aus dem Endwert hervorgeht.

Für eine **nachschüssige Rente** mit der Rentenrate R, dem Zinssatz p (pro Rentenperiode) und der Rentendauer n (in Rentenperioden) gilt mit $q = 1 + \frac{p}{100}$:

Endwert: ${}^{n}E_{n} = R \cdot \frac{q^{n} - 1}{q - 1}$ Barwert: ${}^{n}B_{n} = R \cdot \frac{q^{n} - 1}{q^{n} \cdot (q - 1)}$ mit: ${}^{n}E_{n} = {}^{n}B_{n} \cdot q^{n}$

Das hochgestellte n bei den Formeln soll verdeutlichen, daß es sich um die Berechnung einer nachschüssigen Rente handelt.

Für eine vorschüssige Rente gilt, daß die einzelnen Rentenraten jeweils um eine Rentenperiode länger verzinst werden, da sie früher bezahlt wurden. Verzinst man also Barwert und Endwert einer nachschüssigen Rente für eine Periode, so erhält man Barwert und Endwert der vorschüssigen Rente.

Für eine **vorschüssige Rente** mit der Rentenrate R, dem Zinssatz p (pro Rentenperiode) und der Rentendauer n (in Rentenperioden) gilt mit $q = 1 + \frac{p}{100}$:

Endwert: ${}^{v}E_{n} = R \cdot q \cdot \frac{q^{n} - 1}{q - 1}$ Barwert: ${}^{v}B_{n} = R \cdot \frac{q^{n} - 1}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$ mit: ${}^{v}E_{n} = {}^{v}B_{n} \cdot q^{n}$

Diesmal zeigt das hochgestellte v an, daß es sich um die Berechnung einer vorschüssigen Rente handelt.

Zusammenhang vorschüssig-nachschüssig ${}^{v}E_{n} = {}^{n}E_{n} \cdot q$ und ${}^{v}B_{n} = {}^{n}B_{n} \cdot q$

Die obigen Formeln sind unabhängig von der Länge der Rentenperioden. Die Formeln behalten also ihre Gültigkeit, wenn die Rentenperiode nicht wie im Beispiel ein Jahr beträgt. Zu berücksichtigen ist jedoch, daß der Zinssatz für die jeweilige Rentenperiode gelten muß; ist dies nicht der Fall, so muß der Zinssatz (wie im Kapitel Zinseszinsrechnung beschrieben) umgerechnet werden. Die derzeitigen mathematischen Mitteln ermöglichen nun die wesentlichen Berechnungen im Rahmen der Rentenrechnung, wie die folgenden Beispiele zeigen.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Barwert einer 5-jährigen vorschüssigen Rente mit der Rentenrate ÖS 6600,- zu p = 5% p.a.*

$$R = 6600,\ q = 1{,}05$$

$$^{v}B_{5} = 6600 \cdot \frac{1{,}05^{5} - 1}{1{,}05^{4} \cdot (1{,}05 - 1)} = 30003{,}27$$

Der Barwert beträgt ÖS 30003,27.

***Beispiel**:* *Jemand zahlt durch 10 Jahre nachschüssig ÖS 12000,- jährlich bei einer Versicherung ein und möchte dafür vom Beginn des 15. Jahres an bis zum Beginn des 20. Jahres einschließlich eine entsprechende Rente ausbezahlt bekommen. Wie hoch ist diese Rentenrate bei p = 6% p.a.?*

Die Aufgabe verlangt zuerst die Berechnung des Endwertes der einbezahlten Rente.

$$R = 12000,\ q = 1{,}06$$

$$^{n}E_{10} = 12000 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{(1{,}06 - 1)} = 158169{,}54$$

Dieser Betrag wird bis zum Ende des 14. Jahres, also 4 Jahre, zu p = 6% verzinst.

$$158169{,}54 \cdot 1{,}06^{4} = 199685{,}40$$

Dieser Betrag ist nun als Barwert der auszubezahlenden Rente, die nun vorschüssig vom 15. bis zum 20. Jahr, also 6 Jahre lang, erwartet wird. Die Formel für den Barwert ist also so umzuformen, daß die Rentenrate explizit zu berechnen ist.

$$R = {}^{v}B_{n} \cdot \frac{q^{n-1} \cdot (q - 1)}{q^{n} - 1}$$

$$R = 199685{,}4 \cdot \frac{1{,}06^{5} \cdot (1{,}06 - 1)}{1{,}06^{6} - 1} = 38309{,}95$$

Die Rentenrate beträgt ÖS 38309,95.

Beispiel: *Statt einer im 4. Jahr beginnenden vorschüssigen Rente von ÖS 50000,- durch 6 Jahre möchte jemand eine sofort beginnende nachschüssige Rente durch 12 Jahre. Wieviel wird er bei p = 4% p.a. als Rentenrate bekommen?*

$$ {}^{v}B_6 = 50000 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^5 \cdot (1{,}04 - 1)} = 272591{,}11 $$

Dieser Betrag ist über 3 Jahre abzuzinsen, um den Wert zum Zeitpunkt t = 0 zu berechnen.

$$ \frac{272591{,}11}{1{,}04^3} = 242332{,}51 $$

Die neue Rentenrate ergibt sich nach Umformen der Barwertformel für eine nachschüssige Rente.

$$ R = 242332{,}51 \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^{12} - 1} = 16127{,}76 $$

Die Rentenrate beträgt ÖS 16127,76.

Beispiel: *Der Prokurist einer Firma wird in 8 Jahren in Pension gehen. Die Firma will ihm dann weitere 20 Jahre lang eine vorschüssige Firmenpension von ÖS 180000,- jährlich bezahlen. Welchen Betrag muß diese Firma jetzt auf ein mit 8% p.a. verzinstes Sparbuch einzahlen, um die Pension von diesem Sparbuch bezahlen zu können?*

$$ {}^{v}B_{20} = 180000 \cdot \frac{1{,}08^{20} - 1}{1{,}08^{20} \cdot (1{,}08 - 1)} = 1767266{,}5 $$

Dieser Betrag ist über 8 Jahre abzuzinsen, um den jetzt nötigen Betrag zu ermitteln.

$$ \frac{1767266{,}5}{1{,}08^8} = 954799{,}12 $$

Die Firma benötigt ÖS 954799,12.

Beispiel: *Jemand hat Anspruch auf eine nachschüssige Rente von 8000,- Schilling monatlich über 10 Jahre. Er möchte die Rentenrate auf 5000,- Schilling senken, um so die Rentendauer zu erhöhen. Wie lange kann er diese Rente bei p = 8% p.a. bekommen?*

Bei diesem Beispiel muß zuerst der jährliche Zinssatz in einen monatlichen Zinssatz umgerechnet werden.

$$1{,}08 = (1 + i_{12})^{12}\ ,\ p = 0{,}6434029\ldots$$

$$^{n}B_{120} = 8000 \cdot \frac{1{,}006\ldots^{120} - 1}{1{,}006\ldots^{120} \cdot (1{,}006\ldots - 1)} = 667459{,}13$$

$$667459{,}13 = 5000 \cdot \frac{1{,}006\ldots^{n} - 1}{1{,}006\ldots^{n} \cdot (1{,}006\ldots - 1)}$$

Diese Aufgabe führt also zur Berechnung einer unbekannten Hochzahl. Dazu ist es notwendig, die Gleichung so umzuformen, daß sich die Potenzen mit dieser Hochzahl isoliert auf einer Seite der Gleichung finden.

$$0{,}8588\ldots = \frac{1{,}006\ldots^{n} - 1}{1{,}006\ldots^{n}}$$

$$0{,}8588\ldots \cdot 1{,}006\ldots^{n} = 1{,}006\ldots^{n} - 1$$

$$1{,}006\ldots^{n} - 0{,}8588\ldots \cdot 1{,}006\ldots^{n} = 1$$

$$1{,}006\ldots^{n} \cdot (1 - 0{,}8588\ldots) = 1$$

$$1{,}006\ldots^{n} = 7{,}0866\ldots$$

Diese Gleichung ist durch Logarithmieren lösbar.

$$n = \frac{lg(7{,}0866\ldots)}{lg(1{,}006\ldots)} = 305{,}33$$

Die neue Rentendauer beträgt 305 Monate.

10.4. Grenzwerte von Zahlenfolgen

(a) Problemstellung

Im Abschnitt Monotonie wurde bereits eine wesentliche Eigenschaft von Folgen aufgezeigt. Betrachtet man monotone bzw. streng monotone Folgen genauer, so kann man weitere Eigenschaften feststellen.

***Beispiele**:* *Formulieren Sie weitere Eigenschaften nachstehender Folgen:*

a) 0; 0,5; 0,66; 0,75; 0,8; ... *b) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ...*

c) 2; 1,5; 1,33; 1,25; 1,2; ... *d) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...*

e) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; ... *f) 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ...*

Die obigen Folgen weisen folgende Eigenschaften auf:

Die Zahlen der Folge a) und b) nehmen fortwährend zu, wachsen aber nicht über alle Grenzen hinaus, sondern nähern sich der Zahl 1.
Im Beispiel c) und d) werden die Glieder der Folge immer kleiner und nähern sich dem Wert 1 in b) bzw. 0 in c) je weiter man in der Folge fortschreitet.
In den Beispielen e) und f) schließlich (natürliche Zahlen und deren Quadrate) wachsen die Glieder bekanntermaßen unbegrenzt.

Darüberhinaus kann man die Folgen durch ihren erzeugenden Term angeben.

a) $\left\langle 1-\frac{1}{n}\right\rangle$ c) $\left\langle 1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\rangle$

b) $\left\langle 1+\frac{1}{n}\right\rangle$ d) $\left\langle \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\rangle$

e) $\langle n\rangle$ f) $\langle n^2\rangle$

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit Folgen, die Eigenschaften wie jene im Beispiel a)-d) aufweisen. Solche Folgen nennt man konvergent, und unterscheidet sie, je nachdem ob sie sich einem bestimmten Wert von links nähern - wie in a) und b) - oder von rechts nähern - wie in c) und d) - in links konvergente bzw. rechts konvergente Folgen. Zur genauen Definition der Konvergenz müssen jedoch noch einige Begriffe festgelegt werden.

(b) Beschränkte Folgen

Betrachtet man die Folge aus Beispiel a), so ergibt sich offensichtlich eine Folge von lauter echten Brüchen, da jedes Glied der Folge kleiner als 1 ist. Diese Aussage läßt sich in auch leicht rechnerisch nachweisen. Dazu löst man die Ungleichung $a_n < 1$ über N.

$$1-\frac{1}{n}<1$$
$$n-1<n$$
$$-1<0$$

Da die Aussage für alle $n \in N$ wahr ist, gilt: $a_n < 1$

Ferner gilt für alle Glieder der Folge $a_n \geq 0$ und somit: $0 \leq a_n < 1$

Die Folge ist also sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt; das heißt, daß die Glieder der Folge den Wert 1 nie übersteigen und den Wert 0 nie unterschreiten. Die Werte 0 und 1 werden in diesem Zusammenhang als Schranken bezeichnet. Auch für die Beispiele b)-d) lassen sich Schranken finden.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist nach **oben beschränkt**, wenn eine Zahl M existiert, sodaß alle Elemente der Folge kleiner oder gleich M sind. M heißt dann **obere Schranke** der Folge.

$a_n \leq M$ ... $\langle a_n \rangle$ ist nach oben beschränkt mit der oberen Schranke M

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist nach **unten beschränkt**, wenn eine Zahl m existiert, sodaß alle Elemente der Folge größer oder gleich m sind. Dann heißt m **untere Schranke** der Folge.

$a_n \geq m$ ... $\langle a_n \rangle$ ist nach unten beschränkt mit der unteren Schranke m

Wie bereits das angeführte Beispiel gezeigt hat, muß die Schranke M bzw. m selbst nicht ein Folgenglied sein.

Jede Zahl, die größer als die obere Schranke M ist, ist ebenfalls eine obere Schranke der Folge. Umgekehrt gilt, daß jede Zahl, die kleiner als die untere Schranke m ist, wieder eine untere Schranke der Folge ist. Eine nach oben beschränkte (nach unten beschränkte) Folge besitzt daher unendlich viele obere (untere) Schranken.

Eine Folge, die nach oben und nach unten beschränkt ist, heißt beschränkt. Stellt man eine solche Folge auf der Zahlengeraden dar, so liegen die Bildpunkte in einem endichen Intervall.

(c) Supremum und Infimum

Der vorige Abschnitt hat gezeigt, daß die Folge $\left\langle 1-\frac{1}{n} \right\rangle$ die Zahl 1 als obere Schranke besitzt. Jede Zahl, größer als 1 ist ebenfalls obere Schranke dieser Folge. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es eine Zahl kleiner 1 gibt, die obere Schranke dieser Folge ist. Um das zu untersuchen - ob etwa die Zahl 0,9 eine obere Schranke - ist, setzt man:

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{n} &\le 0{,}9 \\ n-1 &\le 0{,}9n \\ 0{,}1n &\le 1 \\ n &\le 10 \end{aligned}$$

Diese Berechnung zeigt, daß nur die ersten zehn Glieder der Folge kleiner als 0,9 sind; 0,9 ist also keine obere Schranke dieser Folge. Diese Berechnung läßt sich für andere Werte, z.B. 0,99 oder 0,999 usw., ebenfalls durchführen., es läßt sich jedoch keine Zahl kleiner 1 finden, die obere Schranke ist.

Verallgemeinert man diese Berechnung und wählt eine Zahl $1-\varepsilon$ mit $\varepsilon>0$, so läßt sich zeigen, daß es tatsächlich keine Zahl kleiner 1 gibt, die obere Schranke ist.

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{n} &\le 1-\varepsilon \\ -\frac{1}{n} &\le -\varepsilon \\ n &\le \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß die Glieder der Folge nur für jene n kleiner als $1-\varepsilon$ sind, solange n kleiner als der Kehrwert von ε ist. So klein man also ε auch wählt und so groß der Kehrwert von ε daher auch wird, es gibt stets nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge, die kleiner als $1-\varepsilon$ sind. Da es also keine Zahl kleiner 1 gibt, die obere Schranke ist, bezeichnet man 1 als kleinste obere Schranke der Folge.

Besitzt eine Folge eine kleinste obere Schranke, so heißt diese Zahl obere Grenze oder **Supremum** der Folge. Jede nach oben beschränkte Folge besitzt in R ein Supremum.

Besitzt eine Folge eine größte untere Schranke, so heißt diese Zahl untere Grenze oder **Infimum** der Folge. Jede nach unten beschränkte Folge besitzt in R ein Infimum.

(d) Der Umgebungsbegriff (Epsilontik)

Die schon mehrfach verwendete Zahlenfolge $\langle a_n \rangle = \left\langle 1-\frac{1}{n} \right\rangle = \langle 0;\ 0{,}5;\ 0{,}66;\ 0{,}75;\ 0{,}8;\ ... \rangle$, von der nunmehr bekannt ist, daß sie streng monoton wachsend ist und die kleinste obere Schranke 1 besitzt, hat noch eine weitere besondere Eigenschaft. Wie auch in der graphischen Darstellung ersichtlich, nähern sich die Werte der Glieder der Folge immer mehr der Zahl 1. Es stellt sich zuweilen die Frage, ab welchem Folgenglied alle weiteren einen Abstand kleiner als ein bestimmter Wert - z.B. 0,03 - von 1 haben. Das führt zu der Ungleichung:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right) < 0{,}03$$
$$\frac{1}{n} < 0{,}03$$
$$n > 33{,}33$$

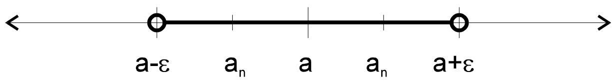
Somit unterscheidet sich das 34. Glied der Folge und alle weiteren um weniger als 0,03 vom Wert 1.

Auch hier kann man allgemein statt dem bestimmten Wert 0,03 den Wert $\varepsilon > 0$ benützen. Fragt man nun ob es Elemente der Folge gibt, deren Abstand von 1 kleiner als eine beliebige positive Zahl ε ist, so muß folgende Ungleichung gelöst werden:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Das Ergebnis zeigt, daß jene Elemente der Folge, für die n größer als der Kehrwert von ε ist, einen geringeren Abstand als ε von 1 haben.

Prinzipiell läßt sich diese Berechnung für jede beliebige Zahl a und jeden beliebigen Abstand ε durchführen. Ist die Zahl a jedoch nicht obere oder untere Schranke der Folge, so muß für die Ermittlung jener Glieder der Folge, für die der Abstand von a kleiner als ε ist, die Berechnung für $|a-a_n| < \varepsilon$ durchgeführt werden.



Es ergeben sich aufgrund der Betragsungleichung also die Fälle $a-a_n < \varepsilon$ und $a_n - a < \varepsilon$.

Wie auch die Graphik zeigt, legt ε eine Umgebung um a fest.

Die **ε-Umgebung U (a;ε)** der reellen Zahl a ist die Menge aller Zahlen x aus R, für die der Betrag der Differenz a–x kleiner als ε ist.

Es gilt: $U(a;\varepsilon) = \{x \in R \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$ bzw. $\{x \in R \mid |a-x| < \varepsilon\}$

Die ε-Umgebung U (a;ε) ist also das offene Intervall $]a-\varepsilon;a+\varepsilon[$.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie, ab welchem Element der Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$ sich die Glieder um weniger als 0,1 von Null unterscheiden.*

$$\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle = \langle -1; 0{,}5; -0{,}33; 0{,}25; \dots \rangle$$

Man erkennt, daß die Folge alternierend ist, wobei sich für die Elemente mit geraden Indexzahlen positive, für jene mit ungeraden Indexzahlen negative Zahlenwerte ergeben. In beiden Fällen nähern sich die Elemente immer mehr der Zahl Null.

Man führt nun folgende Fallunterscheidung durch:

1. Fall $a-a_n < \varepsilon$

$$0 - \frac{(-1)^n}{n} < 0{,}1$$

Dieser Fall trifft nur für ungerade n zu, da nur dann die Elemente a_n links von 0 liegen. Das Ergebnis der Potenzrechnung im erzeugenden Term der Folge ist also -1. Analog wird der zweite Fall im Anschluß behandelt.

$$0 - \frac{-1}{n} < 0{,}1 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow L = \{11;13;\dots\}$$

2. Fall $a_n-a < \varepsilon$

$$\frac{1}{n} - 0 < 0{,}1; \Rightarrow n > 10 \Rightarrow L = [12;14;\dots\}$$

Die Glieder der Folge unterscheiden sich ab dem 11. Glied um weniger als 0,1 von Null.

(e) Häufungswerte von Folgen

Mit dem eben definierten Begriff der Umgebung, lassen sich die bisherigen Aussagen über die Folge $\left\langle 1-\frac{1}{n}\right\rangle$ in der folgenden Aussage zusammenfassen: In jeder Umgebung $U(1;\varepsilon)$ liegen unendlich viele Glieder dieser Folge. Der Wert 1 wird daher Häufungswert genannt.

Die Zahl α heißt **Häufungswert** der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Häufungswert:	$\lvert a_n-\alpha \rvert < \varepsilon$ für unendlich viele Glieder

Ein Häufungswert zeichnet sich also dadurch aus, daß sich in seiner Umgebung die Glieder der Folge zusammendrängen. Der Häufungswert muß selbst nicht ein Glied der Folge sein. Bei der Untersuchung einer Folge auf das Vorhandensein von Häufungswerten können verschiedene Fälle auftreten:

Folgen ohne Häufungswert:	Beispiele e) und f)
Folgen mit genau einem Häufungswert:	Beispiele a) bis d)
Folgen mit mehreren Häufungswerten:	$\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \right\rangle$
Folgen mit unendlich vielen Häufungswerten:	Folge der rationalen Zahlen

Bei Untersuchungen von Folgen und Mengen ist ein Lehrsatz von fundamentaler Bedeutung, auf dessen exakten Beweis hier aber verzichtet werden muß:

Satz von **Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte unendliche Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Beweisansatz: Die unendliche Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ ist beschränkt, also existiert eine untere Schranke m und eine obere Schranke M mit $m \le a_n \le M$. Halbiert man das Intervall $[m;M]$, so müssen in mindestens einem Teilintervall unendlich viele Glieder der Folge liegen. Dieses Teilintervall wird erneut halbiert, sodaß in mindestens einem der neu entstehenden Teilintervalle wieder unendlich viele Glieder der Folge liegen. Dieser Teilungsprozeß wird unendlich oft fortgesetzt, wodurch eine Intervallschachtelung entsteht, die einen Häufungspunkt der Folge bestimmt.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge* $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \right\rangle$.

$$\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \right\rangle = \left\langle -2; 1{,}5; -1{,}33; 1{,}25; -1{,}2; \ldots \right\rangle$$

Die Folge ist also alternierend, wobei sich die Glieder der Folge offenbar den Werten 1 und –1 nähern. Da für gerades n die Potenz $(-1)^n$ positiv und für ungerades n negativ ist, kann man die Folge in zwei Teilfolgen unterscheiden.

1. Fall n gerade:

$$\left\langle \frac{n+1}{n} \right\rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{n} \right\rangle$$

2. Fall n ungerade:

$$\left\langle -\frac{n+1}{n} \right\rangle = \left\langle -1 - \frac{1}{n} \right\rangle$$

Da im 1. Fall der Wert 1 nicht unterschritten werden kann, braucht die Betragsungleichung $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ nur auf den Fall $a_n - \alpha < \varepsilon$ untersucht werden. Analog muß der 2. Fall nur für den Fall $\alpha - a_n < \varepsilon$ betrachtet werden.

1. Fall $a_n - \alpha < \varepsilon$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

2. Fall $\alpha - a_n < \varepsilon$:

$$-1 - \left(-1 - \frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Da für beliebiges ε die Glieder der Teilfolgen ab einem n, das größer als der Kehrwert des ε gewählt werden muß, sich um weniger als ε von 1 bzw. –1 unterscheiden und damit unendlich viele Glieder der Folge in jeder Umgebung dieser Werte liegen, sind 1 und –1 Häufungswerte der Folge.

Die Häufungswerte sind 1 und –1.

(f) Grenzwerte und Konvergenz von Folgen

Das letzte Beispiel zeigt, daß in jeder Umgebung eines Häufungswertes unendlich viele Glieder einer Folge zu finden sind, daß es aber dennoch unendlich viele Glieder außerhalb dieser Umgebung geben kann. Bei den beiden Teilfolgen lagen ebenfalls unendlich viele Glieder der Folge in jeder Umgebung des jeweiligen Häufungswertes, doch blieben dann stets nur endlich viele außerhalb dieser Umgebung. Um diesen Sachverhalt kürzer darstellen zu können, verwendet man die Sprechweise „fast alle".

> Wenn nur endlich viele Glieder einer unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$ eine Eigenschaft nicht haben, sagt man, daß **fast alle** Glieder diese Eigenschaft haben.

Die Aussage „fast alle" beinhaltet also, daß es sich um unendlich viele handelt.

Tritt nun bei einer Folge der Fall ein, daß für jede Wahl von ε die Umgebung eines Wertes nicht nur unendlich viele sondern fast alle Glieder der Folge enthält, so bezeichnet man einen derartigen Häufungswert als **Grenzwert** der Folge.

> Die Zahl a heißt **Grenzwert** einer unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen.

Dieser Umstand wird durch die folgende Schreibweise ausgedrückt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Gelesen: limes von a_n für n gegen unendlich ist a (lat. limes ... Grenze)

Diese Schreibweise soll andeuten, daß der Index n jede noch so große angebbare Zahl überschreitet; $n \to \infty$ bedeutet also nicht, daß n gegen einen bestimmten Zahlenwert strebt.

Hat eine Folge nur einen Häufungswert, so ist dieser nicht automatisch auch Grenzwert der Folge. Dies gilt nur dann, wenn die Folge auch beschränkt ist, da nur dann endlich viele Glieder außerhalb jeder Umgebung dieses Häufungswertes liegen.

Hat die Folge $\langle a_n \rangle$ den Grenzwert a, so hat die Folge $\langle a_n - a \rangle$ zwangsläufig den Grenzwert Null. Da sich alle Folgen, die einen Grenzwert besitzen, derart umformen lassen, haben Folgen mit dem Grenzwert Null die naheliegende Bezeichnung Nullfolgen erhalten.

> Eine Nullfolge ist eine Folge mit dem Grenzwert Null $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

***Beispiele** für Nullfolgen:*

$$\left\langle \frac{2}{3n} \right\rangle; \left\langle \frac{9}{n^2} \right\rangle; \left\langle \frac{17n}{9n^2 - 4n^3} \right\rangle$$

Mit Hilfe der Grenzwertdefinition läßt sich nun der Begriff der Konvergenz erklären.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **konvergent**, wenn sie beschränkt ist und den Grenzwert a besitzt.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist **konvergent** mit dem Grenzwert a, wenn eines der drei nachstehenden gleichwertigen Kriterien zutrifft:
- In jeder Umgebung von a liegen fast alle Glieder der Folge.
- Die Folge $\langle a_n - a \rangle$ ist eine Nullfolge.
- Zu jeder Umgebung von a existiert ein Glied der Folge, sodaß alle folgenden Glieder der Folge in dieser Umgebung liegen.

***Beispiel**: Zeigen Sie, daß 2 der Grenzwert der Folge $\left\langle \frac{6n-2}{3n+3} \right\rangle$ ist und ermitteln Sie den Index, für den alle Glieder der Folge in U (2;0,01) liegen.*

Ist 2 Grenzwert der Folge, dann gilt $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ für fast alle Glieder der Folge. Die Betragsungleichung $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ muß für die Fälle $a_n - a < \varepsilon$ und $a - a_n < \varepsilon$ gelöst werden. Da der Nenner der Folge stets größer Null ist, braucht man bei der Bruchungleichung keine Fallunterscheidung (Nenner >0 oder <0) durchzuführen.

$$\begin{aligned} \frac{6n-2}{3n+3} - 2 &< \varepsilon \\ 6n - 2 - 6n - 6 &< 3n\varepsilon + 3\varepsilon \\ -3n\varepsilon &< 8 + 3\varepsilon \\ n &> -\frac{8}{3\varepsilon} - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 - \frac{6n-2}{3n+3} &< \varepsilon \\ 6n + 6 - 6n + 2 &< 3n\varepsilon + 3\varepsilon \\ -3n\varepsilon &< -8 + 3\varepsilon \\ n &> \frac{8}{3\varepsilon} - 1 \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt einerseits, daß alle Glieder der Folge kleiner als 2 sind, da $a_n - a < \varepsilon$ für alle n gilt und bietet andererseits die Möglichkeit, den gesuchten Index für $\varepsilon = 0{,}01$ zu berechnen.

$$n > \frac{8}{3 \cdot 0{,}01} - 1,\ n > 265$$

10.5. Berechnungen mit Grenzwerten

(a) Grenzwertsätze

Zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ werden verknüpft, wenn ihnen in eindeutiger Weise eine dritte Folge $\langle c_n \rangle$ zugeordnet wird. Das geschieht durch Anwendung der vier Grundrechnungsarten.

Addition:	$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$
Subtraktion:	$\langle a_n \rangle - \langle b_n \rangle = \langle a_n - b_n \rangle$
Multiplikation:	$\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n \rangle$
Division:	$\langle a_n \rangle : \langle b_n \rangle = \left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$, $b_n \neq 0$

Sind $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b, so sind die Folgen $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle$, $\langle a_n \rangle - \langle b_n \rangle$, $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle$, $\langle a_n \rangle : \langle b_n \rangle$ ($b_n \neq 0$) konvergent und haben die Grenzwerte $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

Die obige Aussage läßt sich in den folgenden Grenzwertsätzen detailliert formulieren:

Grenzwertsätze:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n : b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n : \lim_{n\to\infty} b_n$$

Diese Sätze erleichtern die Berechnung von Grenzwerten wesentlich. Formt man den erzeugenden Term einer Folge derart um, daß man die Folge als Zusammensetzung mehrerer Teilfolgen interpretieren kann und kennt man die Grenzwerte der Teilfolgen, so ist der Grenzwert der Folge berechenbar. Im speziellen wird man dannach streben den Term so umzuformen, daß einzelne Teilfolgen zu Nullfolgen werden.

Die folgenden Beispiele zeigen die Berechnung von Grenzwerten nach dieser Methode, wobei die Tatsache, daß eine Folge, bei der die Variable n nur im Nenner des erzeugenden (Polynom)-Terms vorkommt, eine Nullfolge ist, als Voraussetzung gilt.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Grenzwert der Folge* $\left\langle \dfrac{5n-2}{2n^2+4} \right\rangle$.

Dividiert man Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von n, so verändert sich der Wert des Bruchterms nicht. Bei der nachfolgenden Grenzwertberechnung ergeben sich jedoch mehrere Nullfolgen.

$$\frac{5n-2}{2n^2+4} = \frac{\dfrac{5n}{n^2} - \dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{2n^2}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}} = \frac{\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^2}}{2 + \dfrac{4}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^2}}{2 + \dfrac{4}{n^2}} = \frac{0-0}{2+0} = 0$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Grenzwert der Folge* $\left\langle \dfrac{6n-2}{3n+3} \right\rangle$.

$$\frac{6n-2}{3n+3} = \frac{\dfrac{6n}{n} - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{3n}{n} + \dfrac{3}{n}} = \frac{6 - \dfrac{2}{n}}{3 + \dfrac{3}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6 - \dfrac{2}{n}}{3 + \dfrac{3}{n}} = \frac{6-0}{3+0} = 2$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Grenzwert der Folge* $\left\langle \dfrac{n^3+2}{n-3} \right\rangle$.

$$\frac{n^3+4}{n-1} = \frac{\dfrac{n^3}{n^3} + \dfrac{4}{n^3}}{\dfrac{n}{n^3} - \dfrac{1}{n^3}} = \frac{1 + \dfrac{4}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{4}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}} = \frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \textit{divergent}$$

Eine Folge, wie jene aus dem letzten Beispiel, die nicht konvergent ist, nennt man divergent. Überschreiten die Glieder der Folge mit wachsendem n jede noch so große Zahl, ist also $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so spricht man von einem uneigentlichen Grenzwert.

Im Rahmen der Berechnung stößt man zuweilen auf die sogenannten unbestimmten Formen $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\cdot\infty;\infty-\infty;0^0;\infty^0$ o.ä. Diese Formen sind deswegen unbestimmt, weil ihnen offensichtlich kein eindeutiger Zahlenwert zugeordnet werden kann. Die Methoden der Differentialrechnung (im speziellen die Regel von de l'Hospital), auf die im entsprechenden Kapitel noch eingegangen wird, stellen Möglichkeiten zur Verfügung, um in einigen derartigen Fällen den Grenzwert zu bestimmen.

Abschließend soll noch auf den besonderen Grenzwert einer Folge hingewiesen werden. Es handelt sich hierbei um die Folge $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$. Betrachtet man die ersten Glieder dieser Folge, so kann man feststellen, daß es sich um eine zunehmende Folge handelt, wobei die Glieder mit wachsendem n immer langsamer zunehmen. Der Grenzwert der Folge ist mit elementaren Mitteln nicht zu berechnen. Dieser Grenzwert ist die bereits bekannte Eulersche Zahl e, die sich bei großem n als e = 2,718281828459045... ergibt. Auf ihre Bedeutung im Rahmen der Exponentialfunktionen und deren Anwendung wurde bereits hingewiesen. Die obige Folge läßt sich auch als Verzinsung eines Kapitals zu 100% p.a. interpretieren. Teilt man das Jahr in n Abschnitte und teilt man daher auch den Prozentsatz durch n, so ergibt sich der Folgenterm als Faktor für das Anfangskaptital nach n Verzinsungsperioden. Denkt man sich die Verzinsung kontinuierlich, das heißt werden die Zinsen in jedem Augenblick zum jeweiligen Kapitalstand zugezählt, so ergibt sich als Faktor die Eulersche Zahl e.

(b) Grenzwert der geometrischen Folge

Für die Beschreibung von Wachstumsvorgängen und im Rahmen der Rentenrechnung und hat sich die geometrische Folge $\langle b_1 \cdot q^{n-1}\rangle$ und weiterführend ihre geometrische Reihe als bedeutend herausgestellt. Im folgenden sollen daher für die beiden Fälle q>1 und 0<q<1 Überlegungen bezüglich des Grenzwertes der Folge $\langle q^n\rangle$ angestellt werden.

Ist q>1 so werden die Glieder der Folge $\langle q^n\rangle$ immer größer und die Folge ist offensichtlich divergent. Naheliegenderweise ist daher auch die geometrische Reihe in diesem Fall divergent, da die Summen s_n immer größer werden.

Für 0<q<1 werden die Glieder der geometrischen Folge immer kleiner und nähern sich der Zahl Null. Mit Hilfe der sogenannten Bernoullischen Ungleichung läßt sich zeigen, daß in diesem Fall die Folge $\langle q^n \rangle$ tatsächlich eine Nullfolge ist.

Bernoullische Ungleichung: $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$ für $h > -1$

Beweis: Ist die Formel für ein n richtig, so gilt sie auch für n+1: für n = 1 gilt: $(1+h) \geq 1+h$

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+n\cdot h)\cdot(1+h) = 1+n\cdot h+h+n\cdot h^2 \geq 1+(n+1)\cdot h$$

Setzt man nun 0<q<1 und $q = \frac{1}{1+h}$, dann gilt für q^n: $q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+n\cdot h}$

Die verbleibende Folge ist nun eine Nullfolge.

Die Folge $\langle q^n \rangle$ konvergiert genau dann gegen Null, wenn 0<q<1 gilt. Für q = 1 konvergiert die Folge gegen 1, für alle anderen Werte von q divergiert die Folge.

Verwendet man dieses Ergebnis für die geometrische Reihe, so ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty} b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

Die unendliche geometrische Reihe konvergiert für 0<q<1; ihr Grenzwert ist $s = \frac{b_1}{1-q}$.

Dieses Ergebnis besagt, daß es unter Umständen möglich ist, die Summe von unendlich vielen Summanden zu berechnen. Dies ist eine Erkenntnis der neuzeitlichen Mathematik und war lange Zeit unbegreiflich.

***Beispiel**: Einem Quadrat mit der Seitenlänge 6cm wird ein weiteres Quadrat so eingeschrieben, daß seine Eckpunkte in die Seitenmitten des gegeben Quadrats fallen. In das zweite Quadrat wird auf gleiche Weise wieder ein Quadrat eingeschrieben und so fort. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate.*

$$A_1 = a_1^2 = 6^2 = 36, \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_2^2,\ A_2 = a_2^2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{2},\ q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$$

$$s_{12} = 36 \cdot \frac{1}{1-0{,}5} = 72.$$

Die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate beträgt 72cm².

(c) Grenzwerte von Funktionen

Bisher wurde das Verhalten von Zahlenfolgen bei wachsendem n betrachtet. Läßt man in einer Funktion y = f(x) die Veränderliche x eine Zahlenfolge durchlaufen, so durchläuft natürlich auch y eine Zahlenfolge. Setzt man in eine Funktion für x nacheinander die Werte 1, 2, 3, ..., n, ... ein, so ergibt sich für die Funktionswerte eine wie auch bisher gewohnte Zahlenfolge, die f(x) als erzeugenden Term hat. Der Grenzwert dieser Zahlenfolge ist also auch als Grenzwert dieser Funktion zu verstehen.

In der Regel sind die Werte für die Veränderliche x allerdings nicht auf die natürlichen Zahlen beschränkt, sondern auf Werte aus den reellen Zahlen. Es stellt sich also die Frage, ob die bisherige Grenzwertbildung auch für beliebige reelle Veränderliche durchführbar ist.

Beschränken sich die Betrachtungen auf das unbegrenzte Anwachsen der Veränderlichen und wird also der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ gebildet, so macht es augenscheinlich keinen Unterschied, ob die Veränderliche den natürlichen oder den reellen Zahlen entstammt, da die natürlichen Zahlen einerseits Teilmenge der reellen Zahlen sind und es andererseits zu jeder reellen Zahl eine noch größere natürliche Zahl gibt.

Darüberhinaus stellt sich jedoch bei Funktionen zuweilen die Frage, ob und welchem Wert die Funktionswerte zustreben, wenn die Veränderliche einem bestimmten Wert zustrebt. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

***Beispiel**:* *Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$, wenn x gegen den Wert 2 strebt.*

Setzt man für x = 2 in den Funktionsterm ein, so erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Durch Einsetzen ist der gesuchte Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ also nicht zu ermitteln. Hierzu muß geklärt werden, was die mathematische Bedeutung von „x strebt gegen 2“ bzw. „$x \to 2$“ eigentlich ist.

Strebt eine Veränderliche x gegen einen bestimmten Wert z, so bedeutet dies, daß sich die Veränderliche unbegrenzt der Zahl z nähert. Die Formulierung läßt sich aber mit dem Begriff des Grenzwertes einer Folge brauchbar beschreiben. Demnach bedeutet „x strebt gegen z“, daß die Veränderliche x nacheinander die Werte $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ($n \in N$), wobei die Folge $\langle x_n \rangle$ den Grenzwert z hat und $x_n \neq z$ gilt. Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$.

Bildet man zu den Gliedern x_n dieser Folge $\langle x_n \rangle$ die Funktionswerte $f(x_n)$, so ergibt sich eine Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$.

Diese Folge kann konvergent sein. Wenn sie konvergent ist, dann ergibt sich ein Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Ist dieser Grenzwert für alle Folgen $\langle x_n \rangle$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ gilt, derselbe, so ist dies der gesuchte Grenzwert. Es gilt dann also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Es sei f eine reelle Funktion. Wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$ mit Grenzwert z die Folge $\langle f(x_n) \rangle$ konvergent ist und für jede Folge denselben Grenzwert q besitzt, so nennt man diese Zahl q den **Grenzwert der Funktion f an der Stelle z**: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to z} f(x) = q$

Aufgrund dieser Definition läßt sich also die Grenzwertbildung von Funktionen mit reellen Veränderlichen auf die Grenzwertbildung von Folgen mit einem Index $n \in N$ zurückführen.

Im vorigen Beispiel läßt sich damit der Grenzwert folgendermaßen ermitteln:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 - 8}{x_n - 2}$$

Nun läßt sich jedoch durch den Nenner dividieren und kürzen, da der Nenner selbst laut Voraussetzung ($x_n \neq z$) nicht Null ist.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 - 8}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + 2x_n + 4$$

Da der Grenzwert für die Folge $\langle x_n \rangle$ laut Voraussetzung gleich 2 ist, läßt sich unter Verwendung der Grenzwertsätze der gesuchte Grenzwert errechnen.

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 + 2x_n + 4 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

Läßt sich der Funktionsterm nicht wie im vorigen Beispiel vereinfachen, so sind zumeist Methoden der Differentialrechnung nötig, um den gesuchten Grenzwert zu ermitteln.

Das abschließende Beispiel soll noch eine weitere Besonderheit bei der Bildung von Grenzwerten von Funktionen aufzeigen.

***Beispiel**:* *Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x}$, wenn x gegen den Wert 0 strebt.*

Setzt man mit x-Werten im Funktionsterm ein, die größer als Null sind und sich der Null nähern (z.B. mit den Gliedern der Folge $\langle (10)^{n-1} \rangle = \langle 1; 0{,}1; 0{,}01; ... \rangle$), so ergibt sich für die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle = \langle 2; 11; 101; ... \rangle$. Formt man den Funktionsterm entsprechend um, so erkennt man, daß dem Zunehmen der Funktionswerte bei Abnehmen der x-Werte keine Grenzen gesetzt sind.

$$\lim_{x \to +0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 + \frac{1}{x} = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{0} = +\infty$$

In der obigen Schreibweise wurde bewußt $x \to 0+$ verwendet, um anzudeuten, daß die Grenzwertbildung für Folgen $\langle x_n \rangle$ durchgeführt wurde, die sich von rechts, also aus dem positiven Zahlenbereich, der Zahl Null nähern. Die entsprechenden Folgen sind also rechts-konvergente Folgen. Die Folgen der Funktionswerte sind divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert $+\infty$.

Setzt man hingegen mit x-Werten im Funktionsterm ein, die kleiner Null sind und sich der Null nähern (z.B. mit den Gliedern der Folge $\langle -(10)^{n-1} \rangle = \langle -1; -0{,}1; -0{,}01; ... \rangle$), so ergibt sich für die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle = \langle 0; -9; -99; ... \rangle$. Aus der obigen Umformung kann man bereits erkennen, daß die Funktionswerte gegen $-\infty$ streben, wenn sich die x-Werte der Null von links nähern; die entsprechenden Folgen $\langle x_n \rangle$ sind also links-konvergent.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to 0-} 1 + \frac{1}{x} = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{0} = -\infty$$

Strebt x gegen einen festen Wert z, so kann die Bewegung auf der Zahlengeraden **von rechts oder von links** nach z erfolgen. Man unterscheidet diese Annäherungen durch **$x \to z+$ bzw. $x \to z-$**. Ergeben sich bei der Grenzwertbildung von f(x) unterschiedliche Grenzwerte, so bezeichnet man diese als **rechtseitige und linksseitige Grenzwerte**.

Anhang: Übungsbeispiele zum 10. Kapitel

10/1 Geben Sie folgende Folgen durch ihre Glieder an:

a) N_g bis 20

b) P bis 100

c) Die Quadratzahlen kleiner 100

d) Menge der Konsonanten des Alphabets

10/2 Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folgen, die durch ihren erzeugenden Term gegeben sind:

a) $\left\langle 3n^2 + 1 \right\rangle$

b) $\left\langle n^2 + n - 1 \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1} \right\rangle$

d) $\left\langle n^{(-1)^n} \right\rangle$

10/3 Ermitteln Sie die ersten zehn Glieder der Folgen, die durch ihre Rekursionsformel gegeben sind:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - a_n$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$

c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

d) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_1 + n \cdot a_2$

10/4 Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der arithmetischen Folgen:

a) $a_1 = 3$, $d = 2$

b) $a_1 = -2$, $d = -1$

c) $a_1 = 0$, $d = 0{,}01$

d) $a_1 = 1$, $d = 0$

10/5 Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen arithmetische Folgen sind:

a) $\langle -1;\ 1;\ 3\rangle$

b) $\langle 2;\ 3{,}5;\ 5\rangle$

c) $\left\langle \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right\rangle$

d) $\left\langle \frac{7}{5}; 1; \frac{3}{5}\right\rangle$

10/6 Geben Sie den erzeugenden Term für die arithmetischen Folgen an:

a) $a_3 = 7$, $a_7 = 3$

b) $a_5 = 9$, $a_9 = 17$

c) $a_1 = 6$, $a_6 = 0$

d) $a_{100} = 1$, $a_{1000} = 1{,}01$

10/7 In einem Lager werden auf einer 2 dm hohen Unterlage Pakete von je 12 cm Höhe gestapelt. Wieviele solcher Pakete können bis zu einer Gesamthöhe von 1,88 m bzw. 3,20 m gestapelt werden?

10/8 Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Längen der Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks stehen müssen, wenn sie eine arithmetische Folge bilden.

10/9 Zeigen Sie, daß es sich bei der Folge $\langle r; s; 2s - r\rangle$ um eine arithmetische Folge handelt.

10/10 Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der geometrischen Folgen:

a) $b_1 = 3$, $q = 1{,}2$

b) $b_1 = -1$, $q = 0{,}8$

c) $b_1 = 10$, $q = -2$

d) $b_1 = 1$, $q = 1$

10/11 Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen arithmetische Folgen sind:

a) $\langle -1; -2; -4 \rangle$

b) $\langle 2;\ 3;\ 4{,}5 \rangle$

c) $\langle -1; 2; -4 \rangle$

d) $\langle 1;\ 1{,}1;\ 1{,}21 \rangle$

10/12 Geben Sie den erzeugenden Term für die arithmetischen Folgen an:

a) $b_3 = 7$, $b_7 = 112$

b) $b_5 = 9$, $b_9 = 0{,}5625$

c) $b_1 = 6$, $b_6 = 12$

d) $b_{100} = 1$, $b_{1000} = 100000$

10/13 Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine geometrische Folge. Berechnen Sie die Längen der Seiten, wenn die längere Kathete 9 m lang ist.

10/14 Die Folge der Blendenzahlen des Objektivs eines Fotoapparates ist international durch den Term $b_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$ festgelegt. Berechnen Sie die ersten neun Glieder der Folge und vergleichen Sie diese mit den gerundeten internationalen Werten $\langle 1;\ 1{,}4;\ 2;\ 2{,}8;\ 4;\ 5{,}6;\ 8;\ 11;\ 16 \rangle$.

10/15 Die Vorschrift für DIN-Formate lautet: „Je zwei benachbarte Formate gehen durch Halbieren bzw. Verdoppeln der Fläche auseinander hervor. Für die Seitenlängen a und b eines Formats gilt: $(a:b)^2 = 2$. Das Ausgangsformat A_0 hat $1 m^2$.“ Berechnen Sie die Seitenlängen auf mm genau bis A_8.

10/16 Wird eine Strecke AC derart durch einen Punkt B geteilt, daß sich der kleinere Abschnitt AB zum größeren Abschnitt BC wie der größere zur Gesamtstrecke AC verhält, so heißt die Strecke nach dem goldenen Schnitt geteilt. Zeigen Sie, daß die Folge $\langle \overline{AB}; \overline{BC}; \overline{AC} \rangle$ eine geometrische Folge ist und berechnen Sie q.

10/17 Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen streng monoton zunehmen:

a) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$

b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

c) $a_n = \frac{6n-1}{4n+3}$

d) $a_n = 3^n$

10/18 Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen streng monoton abnehmen:

a) $a_n = \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{5n+1}{3n-2}$

c) $a_n = \frac{1-2n}{n}$

d) $a_n = 10^{-n}$

10/19 Untersuchen Sie die arithmetische Folge auf ihre Monotonieeigenschaften. Führen Sie dabei eine Fallunterscheidung bezüglich d durch.

10/20 Untersuchen Sie die geometrische Folge auf ihre Monotonieeigenschaften. Führen Sie dabei eine Fallunterscheidung bezüglich b_1 und q durch.

10/21 Von einer arithmetischen Folge kennt man $a_3 = 27$ und $a_7 = 71$. Berechnen Sie für die zugehörige arithmetische Reihe s_{10}, s_{31} und s_{125}.

10/22 Berechnen Sie, wieviele aufeinanderfolgende ungerade Zahlen mit 1 beginnend die Summe 225, die Summe 361 und die Summe 1296 ergeben.

10/23 Die Summe dreier Zahlen, die eine arithmetische Folge bilden, ist 24; die Summe ihrer Quadrate beträgt 480. Berechnen Sie die Zahlen.

10/24 Vier natürliche Zahlen, die eine arithmetische Folge bilden, haben die Summe 28; ihr Produkt beträgt 585. Berechnen Sie die Zahlen.

10/25 Berechnen Sie die Summe aller dreiziffrigen natürlichen Zahlen, die durch 3 dividiert den Rest 1 bzw. den Rest 2 haben.

10/26 Von einer geometrischen Reihe kennt man $b_1 = 9$ und $q = 2$. Berechnen Sie für die zugehörige geometrische Reihe s_5, s_{10} und s_{100}.

10/27 Die Summe der ersten drei Glieder einer geometrischen Reihe beträgt 14; die Summe ihrer Quadrate ist 84. Berechnen Sie s_5.

10/28 Ein Betrag von ÖS 4840,- soll so auf 5 Personen aufgeteilt werden, daß die erste einen Teil und jede folgende dreimal so viel erhält wie die vorhergehende. Wieviel bekommt jede Person?

10/29 Von drei Zahlen, die aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Reihe sind, ist die mittlere Zahl um 15 größer als die erste und um 60 kleiner als die dritte. Wie heißen die Zahlen?

10/30 Einem Kreis mit Radius $r_1 = 8$cm wird ein Quadrat eingeschrieben, diesem wiederum ein Kreis usw. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der ersten 5 Kreise.

10/31 Berechnen Sie für das Beispiel 10/30 die Summe der Flächeninhalte der ersten 5 Quadrate.

10/32 Der Erfinder des Schachbrettes soll als Lohn verlangt haben, jedes der 64 Felder des Schachbrettes derart mit Reiskörnern zu belegen, daß auf das erste Feld 1 Korn und auf jedes weitere die doppelte Anzahl der Körner gegeben wird, die jeweils auf dem vorangehenden liegen. Wieviel Reiskörner wären hiezu erforderlich gewesen?

10/33 Berechnen Sie den Barwert und den Endwert der nachschüssigen Jahresrenten:

a) ÖS 12000,-	durch 25 Jahre	bei p = 5% p.a.
b) ÖS 18000,-	durch 10 Jahre	bei p = 6% p.a.
c) ÖS 100,-	durch 50 Jahre	bei p = 1% p.a.
d) ÖS 100000,-	durch 100 Jahre	bei p = 10% p.a.

10/34 Berechnen Sie den Barwert und den Endwert der vorschüssigen Renten für die Angaben aus Beispiel 10/33.

10/35 Bei der Geburt ihres Sohnes vereinbaren die Eltern, am Ende jeden Jahres ÖS 5000,- auf ein Bankkonto zu legen, das mit p = 8,5% p.a. verzinst wird. Das Geld soll der Sohn mit vollendetem 18. Lebensjahr bekommen. Welchen Betrag erhält der Sohn?

10/36 Ein Landwirt verkauft seinen Hof gegen eine nachschüssige Jahresrente von ÖS 180000,- über 25 Jahre. Der neue Besitzer möchte die Rente sofort auszahlen. Welcher Betrag ist bei p = 5% p.a. notwendig?

10/37 Ein Schuldner hat an seine Gläubiger durch 15 Jahre jährlich zu Beginn des Jahres ÖS 71750,- zu zahlen. Durch welche einmalige Zahlung zu Beginn bzw. am Ende der Rentendauer könnte die Schuld bei p = 6,5% p.a. getilgt werden?

10/38 Welchen Betrag muß man durch 8 Jahre zu p = 4% p.a. einzahlen, um am Ende des 8. Jahres über ÖS 100000,- zu verfügen?

10/39 Als Pacht für eine Almhütte sind jährlich vorschüssig ÖS 12000,- zu bezahlen, der Pachtvertrag ist über 15 Jahre abgeschlossen. Welcher einmalige Betrag könnte stattdessen am Fälligkeitstag der ersten bzw. der letzten Rate bezahlt werden, wenn mit p = 5% p.a. gerechnet wird? Welcher Betrag ist in der Mitte der Vertragsdauer nötig?

10/40 Jemand möchte eine vorschüssige Rente mit $R=2000$, $n=10$ und $p=5\%$ p.a. in eine nachschüssige gleicher Dauer umwandeln. Wie hoch ist die neue Rentenrate.

10/41 Jemand möchte eine nachschüssige Rente mit $R = 12000$, $n = 15$ und $p = 4{,}5\%$ p.a. in eine vorschüssige, im dritten Jahr beginnende und im 15. Jahr endende Rente umwandeln. Berechnen Sie die Höhe der Rentenrate.

10/42 Der Prokurist einer Firma wird in 5 Jahren in Pension gehen. Die Firma will ihm dann weitere 15 Jahre lang eine Firmenpension von ÖS 120000,- jährlich bezahlen. Welchen Betrag muß diese Firma jetzt auf ein mit 6% p.a. verzinstes Sparbuch einzahlen, um diese Pension von diesem Sparbuch bezahlen zu können?

10/43 Jemand hat Anspruch auf eine nachschüssige Rente von 5000 Schilling monatlich über 10 Jahre. Er möchte die Rentenrate auf 3000 Schilling senken, um so die Rentendauer zu erhöhen. Wie lange kann er diese Rente bei $p = 6{,}5\%$ p.a. bekommen?

10/44 Eine Erbschaft aus dem Jahre 1980 sieht laut Testament vor, daß die Erben ÖS 10000,- monatlich vorschüssig über 12 Jahre ausbezahlt bekommen. Die Erben konnten aber erst Ende 1997 gefunden werden. Mit welchem Betrag konnten diese Erben Ende 1997 rechnen, wenn die Beträge in der Zwischenzeit mit 6% p.a. verzinst wurden?

10/45 Am Ende eines jeden Halbjahres werden durch 8 Jahre ÖS 4000,- bei $p = 6\%$ p.a. auf ein Sparkonto gelegt. Welche monatliche vorschüssige Rente kann man dafür vom 10. bis einschließlich 12. Jahr bekommen?

10/46 Welchen Betrag muß man über 10 Jahre lang monatlich nachschüssig einzahlen, um bei $p = 5\%$ p.a. am Ende dieser 10 Jahre über 1 Million Schilling zu verfügen? Wie lange kann man mit dieser Million eine vorschüssige Rente von monatlich 15000 Schilling beziehen?

10/47 Eine Firma hat bei ihrer Hausbank einen Kredit über ÖS 200000,- mit einer Laufzeit von sechs Jahren aufgenommen, der mit 11,75% p.a. verzinst wird. Wie hoch sind die gleich hohen Raten, die jährlich zurückgezahlt werden müssen?

10/48 Untersuchen Sie, ob die angegebenen Zahlen obere Schranken der betreffenden Folgen sind:

a) $\left\langle \frac{6n-2}{4n+1} \right\rangle$; 1 bzw. 1,75

b) $\left\langle \frac{2n}{2n+5} \right\rangle$; 2 bzw. 1,5

c) $\left\langle 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$; 1 bzw. 0,875

d) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{3n}{2n+1} \right\rangle$; 1,5 bzw. 1,25

10/49 Untersuchen Sie, ob die angegebenen Zahlen untere Schranken der betreffenden Folgen sind:

a) $\left\langle \frac{8n+1}{6n-3} \right\rangle$; 1,5 bzw. 1

b) $\left\langle \frac{3n}{3n-2} \right\rangle$; 1,25 bzw. 1,125

c) $\left\langle \frac{10-3n}{4n+1} \right\rangle$; –1 bzw. –1,125

d) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{5n+2}{10n+1} \right\rangle$; –1 bzw. –0,5

10/50 Ermitteln Sie obere und untere Schranken für die Folgen:

a) $\left\langle \frac{n}{2n+1} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{4n-1}{1-2n} \right\rangle$

10/51 Ermitteln Sie, welche Glieder der Folge $\left\langle \frac{6n^2}{n+1} \right\rangle$

a) größer als 40

b) größer als 100

c) kleiner als 39

d) kleiner als 60600 sind.

10/52 Zeigen Sie, daß die angegebenen Zahlen Supremum bzw. Infimum der betreffenden Folgen sind:

a) $\left\langle \frac{6n-2}{4n+1} \right\rangle$; 1,5

b) $\left\langle \frac{2n}{2n+5} \right\rangle$; 1

c) $\left\langle 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$; 1

d) $\left\langle \frac{10-3n}{4n+1} \right\rangle$; –0,75

10/53 Ermitteln Sie, von welchem Index n an sämtliche Glieder der Folgen in der angegebenen Umgebung liegen:

a) $\left\langle \frac{8n+1}{4n-3} \right\rangle$; U(2; 0,01)

b) $\left\langle \frac{3n}{3n-2} \right\rangle$; U(1; 0,2)

c) $\left\langle \frac{10-3n}{4n+1} \right\rangle$; U(–0,75; 0,005)

d) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{5n+2}{10n+1} \right\rangle$; U(–0,5; 0,03)

e) $\left\langle \frac{8n^2-12n}{4n^2-9} \right\rangle$; U(2; 0,01)

10/54 Zeigen Sie, daß die Folgen Nullfolgen sind:

a) $\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{4}{n^2} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{2n-1}{n^2-3} \right\rangle$

d) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n^2} \right\rangle$

10/55 Ermitteln Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen für n gegen unendlich:

a) $\left\langle \frac{2n+3}{3n-4} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{9n-8}{5-6n} \right\rangle$

c) $\left\langle \left(2+\frac{3}{n}\right)+\left(\frac{4n+3}{2n-5}\right) \right\rangle$

d) $\left\langle 2+\frac{1}{n+3} \right\rangle$

10/56 Ermitteln Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen für n gegen unendlich:

a) $\left\langle \frac{(n-2)^3}{n^2+3} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{(n+1)^3}{2n^3-1} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{2n+3}{n} \cdot \frac{4n^2}{2n^2-1} \right\rangle$

d) $\left\langle \frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2-1} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n^2+1} \right\rangle$

10/57 Einem Halbkreis k_1 vom Radius r_1=10cm wird ein Rechteck eingeschrieben, dessen Seitenlängen sich wie 2:1 verhalten, wobei die längere Seite auf dem Durchmesser liegt. Mit der Höhe des Rechtecks als Radius r_2 wird ein Halbkreis konstruiert und diesem in gleicher Weise ein Rechteck eingeschrieben, und so fort. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecksflächen.

10/58 Die Seite eines Rechtecks ist um 5 cm kürzer als die andere Seite; die Fläche beträgt 50 cm^2. Diesem Rechteck wird ein Halbkreis eingeschrieben, in diesen wiederum ein weiteres Rechteck, dessen Seiten im gleichen Verhältnis stehen, wie die des ersten usw. Berechnen Sie die Summe aller Rechtecksflächeninhalte.

10/59 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a_1=6 cm wird ein weiteres Quadrat so eingeschrieben, daß seine Eckpunkte in die Seitenmitten des gegebenen Quadrats fallen usw. Berechnen Sie die Summen der Flächeninhalte aller Quadrate.

10/60 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a_1 = 10 wird ein zweites Quadrat so eingeschrieben, daß dessen Eckpunkte die Seiten des ersten Quadrats im Verhältnis 3:4 teilen; diesem Quadrat ein drittes und so weiter. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate.

10/61 Verwandeln Sie die folgenden periodischen Dezimalzahlen in Brüche:

a) $0,\dot{6}$

b) $0,3\dot{4}$

c) $1,\dot{6}\dot{8}$

d) $0,76\dot{5}\dot{6}$

10/62 Wie groß ist der Fehler, wenn bei der periodischen Dezimalzahl $0,\dot{7}$ nach der vierten Stelle nach dem Komma abgebrochen wird?