9. EXPONENTIALFUNKTION, LOGARITHMUSFUNKTION

9.1. Exponentialfunktion

(a) Definition

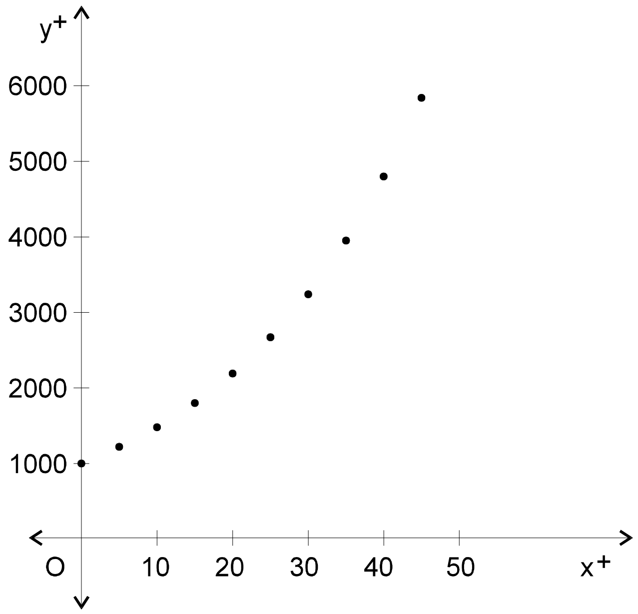
Im Abschnitt Zinseszinsrechnung konnte die Berechnung eines Kapitals K_n nach n Perioden der Verzinsung bei einem Zinssatz p ausgehend von einem Anfangskapital K_0 in einer Formel zusammengefaßt werden.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \qquad K_n = K_0 \cdot q^n$$

***Beispiel**:* *Ein Kapital von ÖS 1000,- wächst jährlich um 4%. Welchen Betrag hat man nach 45 Jahren?*

Berechnet man die Beträge für die einzelnen Jahre und trägt die Werte in ein Diagramm ein, so ergibt sich folgendes Bild:

n (x)	*K_n (y)*
0	*1000*
1	*$1000 \cdot 1{,}04^1 = 1040$*
2	*$1000 \cdot 1{,}04^2 = 1081{,}60$*
3	*$1000 \cdot 1{,}04^3 = 1124{,}86$*
.	.
.	.
.	.
43	*$1000 \cdot 1{,}04^{43} = 5400{,}50$*
44	*$1000 \cdot 1{,}04^{44} = 5616{,}52$*
45	*$1000 \cdot 1.04^{45} = 5841{,}18$*



Wie bereits im Rahmen der Zinseszinsrechnung erwähnt, steigt der Wert des Kapitals nicht linear an; es ergeben sich immer größer werdende Differenzen zwischen den jährlichen Kapitalwerten.

Betrachtet man die Formel losgelöst von ihrer Anwendung im Bereich der Zinseszinsrechung so hat sie die folgende allgemeine Gestalt: $y = c \cdot a^x$.

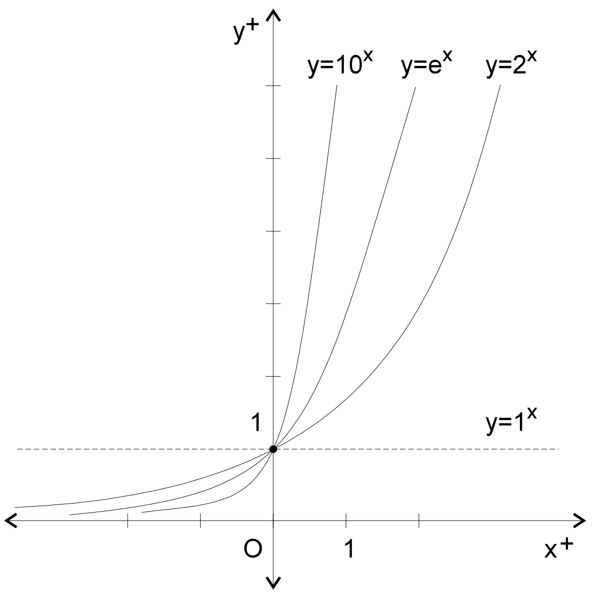
Eine Funktion dieser Gestalt bezeichnet man als Exponentialfunktion, da die Veränderliche x als Exponent einer bekannten Basis a auftritt.

Die **Exponentialfunktion** zur Basis a ist die reelle Funktion $^a\exp\colon y = c \cdot a^x \; (c \in R, a \in R^+)$

Die Zahl a wird wie bei der bisherigen Potenzrechnung als Basis a bezeichnet, x ist der Exponent, c ist ein konstanter, reeller Faktor. Da Potenzen mit rellen Exponenten nur für positive Basen wieder aus den rellen Zahlen sind, gilt hier für die Basis a, daß sie aus den positiven, reellen Zahlen sein muß.

(b) Graphische Darstellung

Betrachtet man den Graph der Exponentialfunktion mit c = 1 für unterschiedliche Basen, so kann zwischen zwei Fällen unterschieden werden.

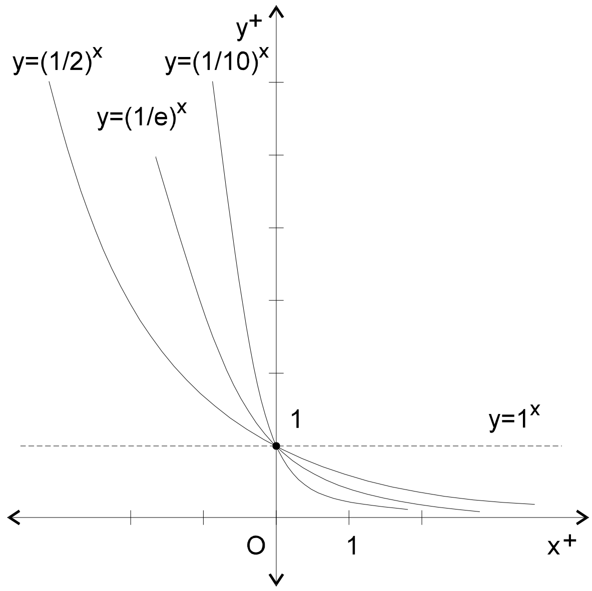


Für a>1 zeigt der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ steigenden Verlauf. Alle Funktionswerte sind positiv und alle Kurven gehen durch den Punkt D(0|1), was auf die Berechnung $a^0 = 1$ für beliebiges $a \in R^+$ zurückzuführen ist.

Die angeführten Beispiele mit a = 10, a = e (Eulersche Zahl) und a = 2 sind wichtige Vertreter der Exponentialfunktionen.

Die Basis 10 findet in Wirtschaft und Technik Anwendung; schließlich ist sie auch Basis unseres Zahlensystems und alle gängigen Abkürzungen für Größen sind Zehnerpotenzen (Kilo..., Mega...).

Die Eulersche Zahl e (e = 2,718281...) findet in naturwissenschaftlichen Berechnungen Anwendung. Auf ihre Bedeutung und Herleitung wird im Abschnitt Grenzwertberechnungen noch näher eingegangen. Die Basis 2 wird auch Boolsche (oder Binäre) Basis genannt und findet in der Informatik entsprechend Anwendung.



Gilt für die Basis 0<a<1, zeigt der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ fallenden Verlauf. Auch in diesem Fall sind alle Funktionswerte positiv und der Punkt D(0|1) ist ein Punkt der Kurve.

In nebenstehender Abbildung wurden die Kehrwerte der vorigen Basen zur Verdeutlichung des Verlaufs gewählt.

Ein Faktor $c \neq 1$ wirkt sich in beiden Fällen als Dehnung oder Stauchung des Graphen aus. Ist c darüberhinaus negativ, so erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse. Es sind dann alle Funktionswerte negativ.

Abschließend soll das lineare Wachstum mit dem Wachstum der Exponentialfunktion verglichen werden. Nimmt man eine lineare Funktion mit großem Anstieg, z.B. y = 100x, und vergleicht die Funktionswerte mit denen einer Exponentialfunktion mit kleinem Zuwachs, z.B. $y = 1{,}01^x$, so ergibt sich folgende Tabelle:

x	100x	$1{,}01^x$
10	1000	1,1046
100	10000	2,7048
1000	100000	20959
1174	117400	118383

Obwohl die lineare Funktion deutlich stärker anzusteigen scheint, ist bei x = 1174 der Funktionswert der Exponentialgleichung größer als der der linearen Funktion. Allgemein läßt sich sagen, daß bei genügend großen Argumenten die Funktionswerte der Exponentialfunktionen größer sind, als die der meisten anderen Funktionen.

(c) Anwendungen der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion stellt - wie die Zinseszinsrechnung schon andeutet - eine ausgezeichnete Möglichkeit zur mathematischen Beschreibung von Wachstumsvorgängen dar. Deshalb findet sie in nahezu allen Bereichen der Naturwissenschaften, der Technik, der Medizin und Wirtschaft ihre Anwendung. Die folgenden Beispiele sind diesen Bereichen entnommen und zeigen einige zusätzliche Eigenschaften der Exponentialfunktion auf.

Beispiel: *Ein Biologe stellt bei der Beobachtung einer Bakterienkultur fest, daß sich die von den Bakterien bedeckte Fläche im Reagenzglas jede Stunde um 30% vergrößert. Wie groß ist die Fläche nach 1, 2, 3, ..., n Stunden, wenn sie zu Beginn der Beobachtung 100 mm² groß war?*

Da sich die Fläche stündlich um 30% vergrößert, muß man den Anfangswert mit a = (1+0,3) = 1,3 multiplizieren, um die bedeckte Fläche eine Stunde später zu erhalten.

$$A(0) = 100$$
$$A(1) = 100 \cdot 1{,}3 = 130$$
$$A(2) = A(1) \cdot 1{,}3 = 100 \cdot 1{,}3^2 = 169$$
$$A(n) = A(0) \cdot 1{,}3^n$$

Die Vorgangsweise bei der Berechnung zeigt bereits, daß Funktionswerte zweier aufeinanderfolgender Argumente stets im gleichen Verhältnis zueinander stehen bzw. stets durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor auseinander hervorgehen.

Die im Beispiel aufgestellte allgemeine Wachstumsgleichung beinhaltet den sogenannten Wachstums-faktor a, der das stündliche Wachstum beschreibt. Der Exponent n ist also in Stunden anzugeben. Will man einen Prozentsatz für das Wachstum in einer halben Stunde errechnen, so ist dies mit n = 0,5 möglich.

$$A(0{,}5) = A(0) \cdot 1{,}3^{0{,}5} = A(0) \cdot 1{,}1402$$

Den Faktor 1,1402 kann man nun als Zuwachs um 14,02% pro halber Stunde interpretieren. Die Berechnung zeigt darüberhinaus, daß der Zuwachs unabhängig vom Anfangswert A(0) ist.

Allgemein lassen sich Exponentialfunktionen, die ein naturwissenschaftliches Wachstum beschreiben, folgendermaßen anschreiben:

$$\boxed{N(t) = N(0) \cdot a^t \qquad N(t+h) = N(t) \cdot a^h \qquad N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

Hierbei entspricht N(0) der Menge (o.ä.) zum Zeitpunkt des Beobachtungsbeginns; t ist die Variable für die Zeit (o.ä.), gemessen in der Einheit, der die Wachstumskonstante a entspricht. Zuweilen wird, um einen leichten Vergleich verschiedener Wachstumsfunktionen zu ermöglichen, die Wachstumskonstante als Potenz der Eulerschen Zahl e (und damit nur abhängig vom Exponent λ) angeschrieben.

***Beispiel**: Die Erdbevölkerung wächst im wesentlichen exponentiell an. In einem Land betrage dieses Wachstum 6% pro Jahr. Wie groß ist die Bevölkerung in 5 und in 10 Jahren, wenn sie heute 9,3 Millionen beträgt?*

$$N(t) = N(0) \cdot 1{,}06^t$$
$$N(0) = 9300000$$
$$N(5) = 12445498$$
$$N(10) = 16654884$$

Im vorigen Beispiel wurden die jeweiligen Ergebnisse immer aufgerundet, da Nachkommastellen keinen Sinn machen.

***Beispiel**: Wie groß ist die Wachstumsrate in einem Land, das vor 8 Jahren 12 Millionen Einwohner hatte und heute 16,3 Millionen Einwohner zählt? Wieviele Einwohner werden es in weiteren 15 Jahren sein?*

$$N(0) = 12 \cdot 10^6, N(8) = 16{,}3 \cdot 10^6$$
$$16{,}3 \cdot 10^6 = 12 \cdot 10^6 \cdot a^8$$
$$a = \sqrt[8]{\frac{16{,}3}{12}} = 1{,}03902451564\ldots$$
$$N(8+15) = N(23) = N(0) \cdot 1{,}039..^{23}$$

An dieser Stelle stellt sich die Frage, mit welcher Genauigkeit für den Wert von a man nun die weitere Berechnung durchzuführen hat. Im folgenden sind die Ergebnisse für N(23) mit 3, 5 und 8 Nachkommastellen angeführt.

$$N(23) = 12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}039^{23} = 28929361$$
$$N(23) = 12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}03902^{23} = 28942172$$
$$N(23) = 12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}03902451^{23} = 28945062$$

Wie zu ersehen ist, führen die kleinsten Änderungen bei den Nachkommastellen bereits zu großen Änderungen des Ergebnisses. Wie bei der Zinsenrechnung gilt daher auch hier, daß die Anzahl der Nachkommastellen der verwendeten Wachstumskonstanten der Anzahl der Stellen des Anfangswertes entsprechen sollte. Es empfiehlt sich, die Berechnungen mit allen Stellen, die der Taschenrechner zur Verfügung stellt, durchzuführen.

***Beispiel**: Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab. Er sinkt jeweils auf die Hälfte, wenn die Höhe um 5,5 km zunimmt. Der Luftdruck auf Meeresniveau beträgt p_0=1013 hPa. Welchen Wert hat er in 3100 m Höhe?*

$$p_h = p_0 \cdot a^h \ \ (h \text{ in km})$$
$$\frac{1}{2} \cdot p_0 = p_0 \cdot a^{5,5}$$
$$\frac{1}{2} = a^{5,5}$$
$$a = \sqrt[5,5]{0,5} = 0,88159$$
$$p_{3,1} = 1013 \cdot 0,88159^{3,1} = 685,39$$
$$p_{3,1} = 685,39 \ hPa$$

***Beispiel**: Für Unterwasserfotos ist die Kenntnis der Lichtintensität L(t) in verschiedenen Tiefen t nötig. An der Oberfläche setzt man sie zweckmäßigerweise mit L(0)=100 fest. Messungen haben ergeben, daß mit jedem in die Tiefe getauchten Meter 7% der Lichtintensität verloren gehen. Wie groß ist die Intensität in 3,75m?*

$$L(0) = 100,\ a = (1 - 0,07) = 0,93$$
$$L(t) = 100 \cdot 0,93^t$$
$$L(3,75) = 100 \cdot 0,93^{3,75} = 76,2$$

Die Lichtintensität in 3,75m beträgt 76,2%.

In diesen beiden Beispielen war die Wachstumskonstante kleiner 1. Dies entspricht einer Abnahme der Anfangsgröße bei Ansteigen der Veränderlichen. Es gilt also:

$a > 1$ Zuwachs $\qquad 0 < a < 1$ Abnahme

Viele Berechnungen, bei denen nur die prozentuelle Änderung interessiert (siehe letztes Beispiel), sind unabhängig von der Anfangsgröße durchführbar. In diesen Fällen kann man diese Anfangsgröße auch mit 100 (für 100%) ansetzen, um so einen Prozentsatz als Ergebnis zu erhalten.

***Beispiel**: Bei vielen medizinischen Untersuchungen werden dem Patienten schwach radioaktive Substanzen injiziert. Diese lagern sich an bestimmten Stellen des Körpers an und ermöglichen so die Untersuchung des Organs. Die Zeitdauer des Auftretens solcher Substanzen werden in ihren Halbwertszeiten angegeben. Die Halbwertszeit ist jene Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist.*

Die Halbwertszeit für eine Substanz betrage 10 Tage. Wie lautet die Exponentialgleichung für diesen Zerfallsvorgang? Wieviel Prozent der ursprünglichen Menge sind 30 Tage nach der Untersuchung noch vorhanden?

$$N(10) = \frac{1}{2} \cdot N(0)$$
$$N(0) \cdot a^{10} = \frac{1}{2} \cdot N(0)$$
$$a = \sqrt[10]{0{,}5} = 0{,}933032991537\ldots$$
$$N(t) = N(0) \cdot 0{,}933\ldots^{t}$$

Da in diesem Beispiel keine Angaben über die Anfangsmenge bekannt sind, ist die Wachstumskonstante mit allen zur Verfügung stehenden Nachkommastellen zu verwenden.

$$N(30) = N(0) \cdot 0{,}933\ldots^{30}$$
$$N(30) = N(0) \cdot 0{,}125$$

Nach 30 Tagen sind noch 12,5% der ursprünglichen Menge vorhanden.

(d) Exponentialgleichungen

Die Exponentialgleichungen lassen sich in drei Gruppen unterteilen. Man unterscheidet Exponentialgleichungen mit gleichen Basen, Exponentialgleichungen mit gleichen Exponenten und Exponentialgleichungen mit unterschiedlichen Basen und Exponenten.

Kann man eine Exponentialgleichung durch Äquivalenzumformungen auf die Form $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a \in R^+$, $a \neq 1$) bringen, so kann die Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn auch $f(x) = g(x)$ gilt.

***Beispiel**:* *Lösen Sie die Gleichung* $2^{-x} = \frac{16^x}{32}$.

$$2^{-x} = \frac{2^{4x}}{2^5}$$
$$2^{-x} = 2^{4x-5}$$
$$-x = 4x - 5$$
$$x = 1,\ L = \{1\}$$

Kann man eine Exponentialgleichung durch Äquivalenzumformungen auf die Form $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ mit $a \neq b$ ($a,b \in R^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$) bringen, so kann die Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn f(x) = 0 gilt.

***Beispiel**:* *Lösen Sie die Gleichung* $8 \cdot 9^{x-3} + 4^{x-3} = 3^{2x-4}$.

$$8 \cdot 3^{2x-6} + 2^{2x-6} = 3^{2x-4}$$
$$2^{2x-6} = 3^{2x-4} - 8 \cdot 3^{2x-6}$$
$$2^{2x-6} = 3^{2x-6} \cdot (3^2 - 8)$$
$$2^{2x-6} = 3^{2x-6}$$
$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3,\ L = \{3\}$$

In beiden Fällen ließ sich die Exponentialgleichung auf eine Betrachtung des Exponenten reduzieren.

Sind in einer Exponentialgleichung Basen und Exponenten verschieden, also $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, so ist ein Lösen der Gleichung mit den derzeitigen Mitteln nicht möglich. Der anschließende Abschnitt Logarithmusfunktion wird diesem Problem Abhilfe schaffen.

Ist die Basis in einer Exponentialgleichung unbekannt, so ist ein Lösen - wie bereits im Abschnitt Zinseszinsrechnung beschrieben - mittels Wurzelziehen möglich. Aus der allgemeinen Gleichung $y = c \cdot a^x$ erhält man dann für die Basis a:

$$a = \sqrt[x]{\frac{y}{c}}$$

***Beispiel**:* *Lösen Sie die Gleichung* $a^5 = 100$.

$$a = \sqrt[5]{100}$$
$$a = 2{,}51189$$

9.2. Logarithmusfunktion

(a) Problemstellung

Im 16. Jahrhundert war die Mathematik stark durch die Notwendigkeiten der Astronomie bestimmt. Die Beobachtungen von Kopernikus und Kepler über die Planetenbewegungen in unserem Sonnensystem hatten immer mühsamere Berechnungen zur Folge. Michael Stifel veröffentlichte 1544 in seinem Werk „arithmetica integra“ erstmals Zusammenhänge der Multiplikation bzw. Division und den entsprechenden Rechenoperationen im Bereich der Exponenten. Das folgende Beispiel soll das verdeutlichen.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie das Ergebnis folgender Aufgaben:*

$$32 \cdot 64,\ 4096:256,\ 64^2, \sqrt[3]{512}$$

In diesen Aufgaben treten nur Potenzen der Basis 2 auf. Wie die Rechenregeln der Potenzrechnung zeigen, lassen sich alle diese Aufgaben daher auf Berechungen im Bereich der Exponenten reduzieren. Die beiden Mengen P (Potenzbereich) und E (Exponentenbereich) sollen den Zusammenhang zeigen.

$$P = \{1,2,5,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,4096,\dots\} =$$
$$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, \dots\}$$
$$E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\dots\}$$

Die obigen Berechnungen lassen sich daher einfach durchführen:

$$32 \cdot 64 = 2^5 \cdot 2^6 \Rightarrow 5 + 6 = 11 \Rightarrow \text{Ergebnis: } 2^{11} = 2048$$
$$4096:256 = 2^{12}:2^8 \Rightarrow 12 - 8 = 4 \Rightarrow \text{Ergebnis: } 2^4 = 16$$
$$64^2 = (2^6)^2 \Rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \Rightarrow \text{Ergebnis: } 2^{12} = 4096$$
$$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} \Rightarrow 9:3 = 3 \Rightarrow \text{Ergebnis: } 2^3 = 8$$

Die Vorgangsweise zeigt, daß sich Berechnungen dann leichter durchführen lassen, wenn der Exponent für eine Basis a (in den vorigen Beispielen a = 2) jeweils bekannt ist.

Die Aufgabe $11 \cdot 13$ hätte sich derart nicht lösen lassen, da es derzeit nicht möglich ist, die Zahlen 11 und 13 als Potenz der Basis 2 darzustellen. Das folgende Beispiel aus der Zinseszinsrechnung zeigt aber den Bedarf der Darstellung einer Zahl als Potenz einer bestimmten Basis a.

***Beispiel**:*

Nach wievielen Jahren hat sich ein Kapital, das zu 6% p.a. verzinst wird, verdoppelt?

$$K_t = K_0 \cdot q^t \text{ , } q = 1{,}06$$
$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}06^t$$
$$2 = 1{,}06^t$$

Es stellt sich also nun die Aufgabe, die Unbekannte in der Hochzahl zu berechnen. Näherungsweise kann man versuchen, die Lösung für t durch Probieren zu ermitteln.

$t \in [10;15]$	$1{,}06^{10} < 2 < 1{,}06^{15}$	$1{,}70984 < 2 < 2{,}39655$
$t \in [11;14]$	$1{,}06^{11} < 2 < 1{,}06^{14}$	$1{,}89829 < 2 < 2{,}26090$
$t \in [11{,}5;12]$	$1{,}06^{11{,}5} < 2 < 1{,}06^{12}$	$1{,}95441 < 2 < 2{,}01219$
$t \in [11{,}6;11{,}9]$	$1{,}06^{11{,}6} < 2 < 1{,}06^{11{,}9}$	$1{,}96583 < 2 < 2{,}00050$
$t \in [11{,}89;11{,}899]$	$1{,}06^{11{,}89} < 2 < 1{,}06^{11{,}899}$	$1{,}99934 < 2 < 2{,}00038$
$t \in [11{,}895;11{,}897]$	$1{,}06^{11{,}895} < 2 < 1{,}06^{11{,}897}$	$1{,}99992 < 2 < 2{,}00015$

Dieses Verfahren des links- und rechtsseitigen Eingrenzens eines gesuchten Wertes nennt man Intervallschachtelung. Im Kapitel Grenzwertberechnungen wird dieses Verfahren noch einmal genauer betrachtet.

In diesem Beispiel erhält man also nun $t \cong 11{,}896$

(b) Definition

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ ($a,b \in R^+$, $a \neq 1$) in den reellen Zahlen nennt man den **Logarithmus** von b zur Basis a: $x = {}^a\log(b)$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist jene reelle Zahl x, mit der man a potenzieren muß, um b zu erhalten: $a^{{}^a\log(b)} = b$

Das Bestimmen des Logarithmus einer Zahl bezüglich einer gegebenen Basis wird als Logarithmieren bezeichnet.

Logarithmen sind daher Exponenten. Es gibt daher von negativen Zahlen und von der Zahl Null keine Logarithmen. Der Name Logarithmus wurde von dem schottischen Mathematiker John Neper eingeführt und leitet sich von den griechischen Worten *logós* (Ursache) und *arithmós* (Zahl) ab.

Für die wichtigsten Basen a = 10, a = e, a = 2 o.ä. wurden Logarithmentafeln - teilweise durch Intervallschachtelung - erstellt. In ihnen konnte man für beliebige Zahlen den Logarithmus zur jeweiligen Basis nachschlagen. Dieses Nachschlagen übernimmt heute der Taschenrechner auf Knopfdruck. Für die Basis a = 10, den dekadischen Logarithmus, wird meist die Bezeichnung und die Taste *log* oder *lg* verwendet; für den sogenannten natürlichen Logarithmus zur Basis e die Taste *ln* und für die Basis 2, den binären oder boolschen Logarithmus, die Taste *lb*.

Dekadischer Logarithmus	Basis 10	Schreibweise ${}^{10}\log$ bzw. lg
Natürlicher Logarithmus	Basis e	Schreibweise ${}^{e}\log$ bzw. ln
Boolscher Logarithmus	Basis 2	Schreibweise ${}^{2}\log$ bzw. lb

Beispiele:

$$lg(1000) = 3 \qquad \text{wegen } 10^3 = 1000$$

$${}^{7}log(49) = 2 \qquad 7^2 = 49$$

$$lb\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$lg(0{,}1) = -1 \qquad 10^{-1} = 0{,}1$$

(c) Rechengesetze für Logarithmen

Folgende allgemeine Regeln gelten für Logarithmen:

$${}^{a}\log(a) = 1 \qquad \text{da} \qquad a^1 = a$$

$${}^{a}\log(1) = 0 \qquad \text{da} \qquad a^0 = 1$$

$${}^{a}\log(a^n) = n \qquad \text{da} \qquad a^n = (a^n)$$

$${}^{a}\log\left(\frac{1}{a^n}\right) = -n \qquad \text{da} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Da, wie bereits erwähnt, Logarithmen Exponenten sind, gelten die Rechenregeln für Potenzen. Bei den folgenden Regeln ist keine Basis a angegeben, da die Regeln für beliebige Basen gelten.

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren

$$\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$$

Beispiel: $lg(10 \cdot 1000) = lg(10) + lg(1000) = 1 + 3 = 4$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem Logarithmus des Divisors

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$$

Beispiel: $lg\left(\frac{100000}{1000}\right) = lg(100000) - lg(1000) = 5 - 3 = 2$

Der Logarithmus des Kehrwertes einer Zahl ist gleich dem negativen Logarithmus dieser Zahl

$$\log\left(\frac{1}{u}\right) = -\log(u)$$

Beispiel: $lg\left(\frac{1}{10000}\right) = -lg(10000) = -4$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis der Potenz

$$\log(u^n) = n \cdot \log(u)$$

Beispiel: $lg(100^4) = 4 \cdot lg(100) = 4 \cdot 2 = 8$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten

$$\log(\sqrt[n]{u}) = \frac{\log(u)}{n}$$

Beispiel: $lg(\sqrt[3]{1000}) = \frac{lg(1000)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

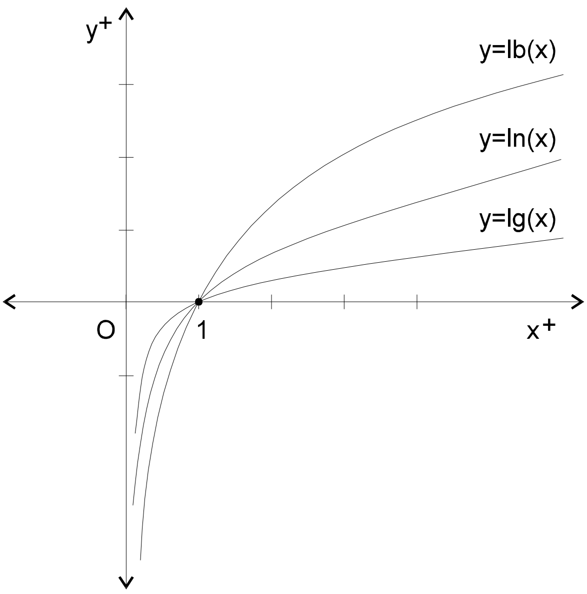
(d) Graphische Darstellung

Es sei $a \in R^+$, $a \neq 1$. Die Funktion, die jedem $x \in R^+$ die Zahl ${}^a\log(x)$ zuordnet, heißt Logarithmusfunktion zur Basis a $f(x) = {}^a\log(x)$

Aus der Definition des Logarithmus, also aus $y = a^x$ ergibt sich $x = {}^a\log(y)$, erkennt man, daß das Argument der Logarithmusfunktion der Funktionswert der Exponentialfunktion ist und umgekehrt. Ohne eine Beweis dieses Satzes kann man daher vermuten:

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn es zu jedem Element y der Zielmenge genau ein Element x der Definitionsmenge gibt, sodaß $f(x) = y$ gilt. Diese Bedingung erfüllt die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion offensichtlich.



Die Logarithmusfunktion erhält man auch durch Spiegelung der entsprechenden Exponentialfunktion an der ersten Mediane ($y = x$).

In der nebenstehenden Skizze sind die Logarithmusfunktionen für die Basen $a = 10$, $a = e$ und $a = 2$ gezeichnet. Das ist also der dekadische (lg), der natürliche (ln) und der boolsche (lb) Logarithmus.

Alle Kurven gehen durch den Punkt N(1|0), was darauf zurückzuführen ist, daß ${}^a\log(1) = 0$ für beliebiges a gilt. Zusätzlich ist zu beachten, daß die Funktion nur für positive Argumente definiert ist.

Die Logarithmusfunktion ermöglicht nun das Berechnen unbekannter Hochzahlen. Die folgenden Beispiele zeigen einige Anwendungsbereiche, wobei anzumerken ist, daß alle Anwendungsbereiche der Exponentialfunktion genau dann auch zur Berechnungen mit Logarithmen werden, wenn ein Exponent ermittelt werden muß.

(e) Anwendungen der Logarithmusfunktion

Beispiel: *Nach wievielen Jahren hat sich ein Kapital, das zu 6% p.a. verzinst wird, verdoppelt?*

$$K_t = K_0 \cdot q^t \text{ , } q = 1{,}06$$
$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}06^t$$
$$2 = 1{,}06^t$$

Zur Berechung der Zeit t wird nun die ganze Gleichung logarithmiert. Allgemein bedeutet das, daß die vorkommenden Zahlen als Potenz einer Basis a dargestellt werden; zweckmäßigerweise ist das eine Basis, für die der Taschenrechner die Logarithmen zur Verfügung stellt, also a = 10 oder a = e.

$$10^{lg(2)} = 10^{t \cdot lg(1{,}06)}$$
$$lg(2) = t \cdot lg(1{,}06)$$
$$t = \frac{lg(2)}{lg(1{,}06)} = 11{,}89566$$

Das Kapital hat sich nach 11,9 Jahren verdoppelt.

In diesem Beispiel wurde genau genommen der Logarithmus von 2 zur Basis 1,06 berechnet. Allgemein läßt sich die Berechnung des Logarithmus einer Zahl b zu einer Basis a mittels des Logarithmus zu einer anderen Basis z.B. 10 folgendermaßen anschreiben:

Umrechnung des Logarithmus	${}^{a}\log(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$

Die Logarithmusfunktion ermöglicht auch die Berechnung der Basis bei bekannten Exponenten.

Beispiel: *Ein Kapital wuchs in 30 Jahren von ÖS 1000,- auf ÖS 4321,94 an. Berechnen Sie den Zinssatz.*

$$K(30) = K(0) \cdot q^{30} \text{ , } 4321{,}94 = 1000 \cdot q^{30}$$
$$lg(4321{,}94) = lg(1000) + 30 \cdot lg(q)$$
$$lg(q) = 0{,}021189\ldots$$
$$q = 10^{0{,}021189\ldots} = 1{,}049999\ldots \cong 1{,}05$$

***Beispiel**: Wie lange braucht ein Kapital um bei einem Zinsatz von 3% von ÖS 10000,- auf ÖS 17500,- anzuwachsen?*

$$17500 = 10000 \cdot 1{,}03^t$$
$$1{,}75 = 1{,}03^t$$
$$lg(1{,}75) = t \cdot lg(1{,}03)$$
$$t = \frac{lg(1{,}75)}{lg(1{,}03)} = 18{,}932289\ldots$$

Es dauert 18,93 Jahre.

***Beispiel**: Ein Patient schluckt auf Anweisung seines Arztes um 12 Uhr und um 16.30 Uhr je eine Tablette Aspirin. Jede dieser Tabletten enthält 400 mg Wirksubstanz, welche im Körper nach etwa 2 Stunden zur Hälfte abgebaut wird. Berechnen Sie nach welcher Zeit sich nur noch 40 mg der Substanz im Körper des Patienten befinden und wann daher wieder eine Tablette eingenommen werden sollte.*

$$\frac{1}{2} \cdot N(0) = N(0) \cdot a^2$$
$$a = \sqrt{0{,}5}$$
$$N(4{,}5) = 400 \cdot a^{4{,}5} = 84{,}089$$

Um 16.30 wird die zweite Tablette eingenommen und es ergibt sich ein neues N(0).

$$N(0) = 84{,}089 + 400 = 484{,}089$$
$$40 = 484{,}089 \cdot a^t$$
$$0{,}08262\ldots = a^t$$
$$lg(0{,}08262..) = t \cdot lg(a)$$
$$t = \frac{lg(0{,}08262\ldots)}{lg(0{,}70710\ldots)} = 7{,}1944\ldots$$
$$t = 7\ h\ 11'$$

Die nächste Tablette muß um ca. 23.40 Uhr eingenommen werden.

Anhang: Übungsbeispiele zum 9. Kapitel

9/1 Berechnen Sie die Funktionswerte aller ganzzahligen Argumente im Intervall [–3;5] der folgenden Exponentialfunktionen:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 1{,}5^x$

c) $f(x) = 12^x$

d) $f(x) = 1{,}01^x$

9/2 Berechnen Sie die Funktionswerte aller ganzzahligen Argumente im Intervall [–5;3] der folgenden Exponentialfunktionen:

a) $f(x) = 0{,}2^x$

b) $f(x) = 0{,}6^x$

c) $f(x) = 0{,}01^x$

d) $f(x) = 0{,}99^x$

9/3 Von einer Menge des radioaktiven Isotops Jod 131 sind nach einem Tag nur noch 92% vorhanden. Stellen Sie das Zerfallsgesetz auf.

9/4 Die Anzahl der Bakterien in einer Kultur hat sich in 5 Stunden vervierfacht. Stellen Sie dieses Wachstum durch eine Exponentialgleichung dar.

9/5 Die Bevölkerung eines Staates wachse exponentiell, wobei pro Jahr ein Zuwachs von 8% zu verzeichnen sei. Wie groß wird die Bevölkerung nach 5, 6, 10 Jahren sein, wenn sie heute 8,5 Millionen beträgt.

9/6 Die Keime in der Kuhmilch vermehren sich annähernd exponentiell. In 1 cm^3 Kuhmilch waren 3 Stunden nach dem Melken 66000 Keime, 2 Stunden später 1,1 Millionen. Wieviele Keime waren es 2 bzw. 6 Stunden nach dem Melken?

9/7 Die Bevölkerung einer Stadt wachse exponentiell. Im Jahre 1970 hatte die Stadt 37000 Einwohner, 1980 waren es 49000 Einwohner. Wieviele Einwohner hat diese Stadt heute?

9/8 In einer Stadt mit 7% jährlicher Preissteigerung steigen die Löhne durchschnittlich um 9,5% im Jahr. Um wieviel Prozent wächst die Kaufkraft der Löhne durchschnittlich in einem bzw. in fünf Jahren?

9/9 Vor 8 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 6500 m^3. Heute hat dieser Wald 8400 m^3. Berechnen Sie den Holzbestand in fünf Jahren.

9/10 Berechnen Sie den Holzbestand des Waldes aus Beispiel 9/9 unter der Annahme, daß am Beginn jedes Jahres 150 m^3 Holz geschlägert werden.

9/11 Eine bestimmte Glasplatte absorbiert 12% des durchgehenden Lichtes. Wieviel Prozent der ursprünglichen Lichtmenge ergibt sich nach sieben dieser Glasplatten?

9/12 In einer Bakterienkultur sind nach 10 Stunden 10000 Bakterien, nach 2 Tagen 1000000 Bakterien. Wieviele waren es am Anfang?

9/13 Die Lichtintensität in Wasser beträgt in 5 m Tiefe 66% der ursprünglichen Intensität. Berechnen Sie die Intensität in 50 m Tiefe.

9/14 Der Luftdruck nimmt mit der Höhe exponentiell ab; er sinkt jeweils auf die Hälfte des ursprünglichen Werts, wenn die Höhe um 5500 m zunimmt. In 500 m Seehöhe mißt man einen Luftdruck von 980 mbar. Welchen Druck kann man in 8000 m Höhe messen?

9/15 Angenommen, ein Gerücht wird von jemanden an zwei weitere Personen weitererzählt, die das Gerücht jeweils wieder zwei weiteren Personen erzählen und so fort. Versuchen Sie durch Probieren zu ermitteln, wie lange es dauert, bis die gesamte Erdbevölkerung informiert ist, wenn jede Weitergabe eine Minute dauert.

9/16 Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a) $3^{x} = \frac{1}{9}$

b) $9^{x-1} = 27$

c) $4^{1-x} = 32$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-2} = \frac{8}{27}$

9/17 Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a) $2^{3x-2} \cdot 4^{3x+1} = \frac{2048}{2^{3x-1}}$

b) $0{,}2^{2-5x} \cdot 25^{2x-\frac{2}{3}} = 125$

c) $2^{x} + 3 \cdot 2^{x+1} = 28$

d) $2 \cdot 7^{x} - 7^{x-1} = \frac{13}{49}$

9/18 Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a) $3^{2x-1} - 11 \cdot 9^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$

b) $2^{3x+1} - 11 \cdot 8^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-4}$

c) $9^{x} - 4^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$

d) $2^{2x+1} = 5 \cdot 4^{x-2} + 3^{2x-1}$

9/19 Ermitteln Sie durch Intervallschachtelung die fehlenden Exponenten:

a) $2^{x} = 10$

b) $e^{t} = 2$

c) $10^{x} = 50$

d) $10^{t} = e$

9/20 Zerlegen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Logarithmensätze:

a) $\log(x^2 y)$

b) $\log\left(\frac{4x^3}{y^2}\right)$

c) $\log(a \cdot \sqrt{b})$

d) $\log(6rs^2t^3)$

9/21 Zerlegen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Logarithmensätze:

a) $\log(\sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{d})$

b) $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$

c) $\log\left(\frac{x^2 - y^2}{z^2}\right)$

d) $\log\left(\sqrt{\frac{r + s}{(r - s)^2}}\right)$

9/22 Stellen Sie die folgenden Angaben als Logarithmus eines einzigen Terms dar:

a) $\log(2) - \log(a) + \frac{1}{2}\log(b)$

b) $2\log(x) + \log(y) - \frac{2}{3}\log(z)$

c) $\log(1 - x) + \log(1 + x) - 2\log(x)$

9/23 Stellen Sie die folgenden Angaben als Logarithmus eines einzigen Terms dar:

a) $\frac{1}{3}[\log(x) + 2\log(x - y)] - \log(x) - \frac{1}{2}\log(y)$

b) $3\log(x) - \log(y) - \frac{4}{5}[2\log(a - b) + \log(c)]$

c) $2\log(x) + \frac{1}{4}[\log(a) - \log(a - b)]$

9/24 Eine Glasplatte einer bestimmten Sorte absorbiert 8% des durchgehenden Lichtes. Wieviel Prozent der ursprünglichen Lichtmenge ergibt sich nach sieben Glasplatten? Wie viele solcher Platten müssen übereinandergelegt werden, damit nur noch 10% des Lichts hindurchgeht?

9/25 In einer Bakterienkultur sind nach 10 Stunden 10000 Bakterien, nach 2 Tagen 1000000 Bakterien. Nach wievielen Stunden werden es 10.000.000 Keime sein?

9/26 Eine Stadt wachse exponentiell. Im Jahre 1970 hatte die Stadt 37000 Einwohner, 1980 waren es 49000. Wann wird die Einwohnerzahl dieser Stadt 100000 überstiegen haben?

9/27 In einem Land gibt es eine jährliche Preissteigerung von 6%. Nach wie vielen Jahren kostet eine Ware das doppelte des ursprünglichen Preises?

9/28 Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung 2,1 Milliarden Menschen, heute beträgt sie 5,7 Milliarden Menschen. Berechnen Sie die daraus folgende Verdopplungszeit.

9/29 Ein durch chemische Schadstoffe verunreinigtes Gewässer kann jährlich 10% der Schadstoffe abbauen. Nach wie vielen Jahren wird die Schadstoffmenge nur noch 1% der ursprünglichen Menge betragen?

9/30 Ein Wald wachse um 3,8% pro Jahr. Heute beträgt der Holzbestand dieses Waldes 7200 m^3. Man hat vor, in 3 Jahren 2000 m^3 Holz zu schlägern. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

9/31 Berechnen Sie die Zahl der Stellen von $M = 2^{2976221}-1$ (Hinweis: M ist die größte bekannte Primzahl, Stand August 1997). Wieviel Platz würde diese Zahl in diesem Skriptum ungefähr brauchen?

9/32 Ordnen Sie die Zahlen der Größe nach: 1000^{1000}, 1010^{999} und 990^{1001}.