8. PROZENTRECHNUNG, ZINSENRECHNUNG

8.1. Prozentrechnung

(a) Definition

In fast allen Bereichen des Lebens sind Angaben in Prozenten oder Promillen weit verbreitet; so z.B. 20% USt., 3% Skonto bei Barzahlung, 0,8‰ Alkohol im Blut, 3,6% Fett in der Milch usw. Die Prozentrechnung ist also ein Bereich der Mathematik, der uns im Alltagsleben auf Schritt und Tritt begegnet. Es lohnt sich deshalb, sich mit diesem Kapitel näher auseinanderzusetzen.

Allen oben genannten Beispielen ist gemeinsam, daß eine Größe (USt., Skonto, Alkohol, ...) als Anteil einer anderen Größe, der sogenannten Bezugsgröße (Nettobetrag, Rechnungssumme, Blutmenge, ...), angegeben wird. Dieser Anteil wird bei der Prozentrechnung immer in Hundertstel (Prozent) oder Tausendstel (Promille) der Bezugsgröße ausgedrückt.

Ein **Prozent** (1%) ist ein Hundertstel einer Bezugsgröße B.	$1\% \text{ von } B = \frac{B}{100}$
Ein **Promille** (1‰) ist ein Tausendstel einer Bezugsgröße B.	$1‰ \text{ von } B = \frac{B}{1000}$

Das Wort Prozent kommt aus dem Lateinischen : lat. centum ... hundert

(b) Bezugsgröße, Prozentsatz, Prozentwert

Die **Bezugsgröße B** ist somit die Basis der Prozentrechnung; sie beträgt immer 100%.

Der **Prozentsatz p** gibt an, wieviele Hunderstel von der Basis genommen werden sollen. In den obengenannten Beispielen wurde immer dieser Prozentsatz angegeben.

Der **Prozentwert P** ist der wertmäßige Betrag, der dem Prozentsatz entspricht.

Möchte man Berechnungen im Rahmen der Prozentrechnung durchführen, müssen zumindest zwei dieser drei Größen bekannt sein.

8.2. Grundaufgaben der Prozentrechnung

Die Aufgaben der Prozentrechnung lassen sich in zwei Hauptbereiche unterteilen, nämlich in Aufgaben mit bekanntem Prozentsatz p und Aufgaben mit unbekanntem Prozentsatz. Diese Unterscheidung erfolgt, weil der Ansatz zur Lösung bei diesen Aufgabentypen ein unterschiedlicher ist. Vorneweg soll jedoch der allgemeine Zusammenhang zwischen B, p und P angeführt werden.

(a) Zusammenhang zwischen B, p, P

Zwischen den Größen B, p und P besteht ein allgemeiner Zusammenhang, den man in allen Aufgaben der Prozentrechnung nutzen kann.

$$P = \frac{B}{100} \cdot p \qquad B = \frac{P}{p} \cdot 100 \qquad p = \frac{100}{B} \cdot P$$

(b) Aufgaben mit bekanntem Prozentsatz

Bei diesen Aufgaben wird immer ein Prozent der Bezugsgröße ermittelt, um dann die gesuchte Größe zu berechnen. Unter der Voraussetzung, daß der Prozentsatz p gegeben ist, kann zwischen drei Fällen unterschieden werden:

Grundaufgabe I:	Bezugsgröße B bekannt, Prozentwert P gesucht
Grundaufgabe II:	Prozentwert P bekannt, Bezugsgröße B gesucht
Grundaufgabe III:	Berechnung des vermehrten oder verminderten Betrages B+P, B–P

***Beispiel** Grundaufgabe I:* *Eine Ware kostet ÖS 1200,-, im Ausverkauf erhält man 5% Skonto. Wieviel Schilling erspart man sich?*

$$B = 1200,\ p = 5,\ P = ?$$

$$P = \frac{1200}{100} \cdot 5 = 60$$

Man spart ÖS 60,-.

Bei der Grundaufgabe I wird also ein Prozent der Bezugsgröße B ermittelt und dann mit dem Prozentsatz p multipliziert: $P = \frac{B}{100} \cdot p$

Beispiel *Grundaufgabe II:* *Eine Rate für ein Möbelstück beträgt ÖS 2400,-, das sind 6% des Gesamtpreises. Wieviel kostet das Möbelstück?*

$$P = 2400,\ p = 6,\ B = ?$$

$$B = \frac{2400}{6} \cdot 100 = 40000$$

Das Möbelstück kostet ÖS 40000,-.

Auch bei dieser Aufgabe wurde ein Prozent der Bezugsgröße ermittelt. Da dem Prozentwert P genau p Prozent der Bezugsgröße entsprechen, erhält man ein Prozent, indem man den Prozentwert P durch den Prozentsatz p dividiert. Die Bezugsgröße erhält man nach Multiplikation mit 100: $B = \frac{P}{p} \cdot 100$

Bei Beispielen, bei den der vermehrte oder verminderte Betrag B+P bzw. B–P gegeben oder gesucht ist, erhält man ein Prozent der Bezugsgöße, indem durch den vermehrten oder verminderten Prozentsatz 100+p bzw. 100–p dividiert oder mit diesem multipliziert wird.

Beispiel *Grundaufgabe III:* *Auf einer Rechnung steht: „ÖS 10000,- abzüglich 3% Skonto“ Welcher Betrag ist zu zahlen?*

$$B = 10000,\ p = 3,\ B - P = ?$$

$$B - P = \frac{10000}{100} \cdot (100 - 3) = 9700$$

Es sind ÖS 9700,- zu bezahlen.

Beispiel *Grundaufgabe III:* *Ein Möbelhändler möchte für einen Tisch ÖS 8000,- erhalten. In der Brache ist ein Rabatt von 5% üblich. Wieviel muß er aufschlagen, um tatsächlich einen Preis von ÖS 8000,- zu erreichen?*

$$B - P = 8000,\ p = 5,\ P = ?$$

$$P = \frac{8000}{100 - 5} \cdot 5 = 421{,}05$$

Er muß ÖS 421,05 aufschlagen.

Beispiel *Grundaufgabe III:* *Eine Rechung lautet auf ÖS 14400,- inkl. 20% USt.*

Wieviel Schilling macht die Steuer aus?

$$B + P = 14400,\ p = 20,\ P = ?$$

$$P = \frac{14400}{100 + 20} \cdot 20 = 2400$$

Die Steuer macht ÖS 2400,- aus.

In der Praxis wird für Aufgaben der Prozentrechnung folgende Terminologie verwendet:

Prozentrechnung „**von Hundert**“	Der gegebene Betrag ist 100%.
Prozentrechnung „**in Hundert**“	Der gegebene Betrag ist weniger als 100%.
Prozentrechnung „**auf Hundert**“	Der gegebene Betrag ist mehr als 100%.

(c) Aufgaben mit unbekanntem Prozentsatz

Da bei diesen Aufgaben der Prozentsatz nicht bekannt ist, ist es nicht möglich, ein Prozent der Bezugsgröße zu berechnen. Mit den gegebenen Angaben läßt sich allerdings berechnen, wieviel Prozent eine Einheit (z.B. ein Schilling) ausmacht. Multipliziert man dann mit jenem Betrag, dessen Prozentsatz errechnet werden soll, erhält man eben diesen gesuchten Prozentsatz. Wieder können wir zwischen drei Fällen unterscheiden:

Grundaufgabe I:	Bezugsgröße B und Prozentwert P bekannt
Grundaufgabe II:	Bezugsgröße B und B+P bzw. B–P bekannt
Grundaufgabe III:	Prozentwert P und B+P bzw. B–P bekannt

Beispiel*:* *Ein Bauer besitzt 60ha Land, davon sind 12ha Wald.*

Wieviel % seines Besitzes entfallen auf die Waldfläche?

$$B = 60,\ P = 12$$

$$p = \frac{100}{60} \cdot 12 = 20$$

Auf die Waldfläche entfallen 20%.

Da der Bezugsgöße B immer 100% entsprechen, erhält man den Prozentsatz für eine Einheit, indem man die 100% durch B dividiert: $\frac{B}{100}$

Ist - wie bei Grundaufgabe II - die Bezugsgröße B und der vermehrte oder verminderte Betrag B+P bzw. B–P gegeben, so läßt sich der Prozentwert P leicht ermitteln: $P = (B+P) - B$ bzw. $P = B - (B-P)$

Die weitere Berechnung entspricht der Berechnung bei Grundaufgabe I.

***Beispiel** Grundaufgabe II:*

Auf einem Preisschild in der einer Auslage steht:

„statt ÖS 7999,- nur mehr ÖS 5999,-.

Wieviel Prozent beträgt der Preisnachlaß?

$$B = 7999,\ B - P = 5999,\ p = ?$$

$$P = 7999 - 5999 = 2000$$

$$p = \frac{100}{7999} \cdot 2000 = 25$$

Der Preisnachlaß beträgt 25%.

Ist - wie bei Grundaufgabe III - der Prozentwert P und der vermehrte oder verminderte Betrag B+P bzw. B–P gegeben, so läßt sich die Bezugsgröße B leicht ermitteln: $B = (B+P) - P$ bzw. $B = (B-P) + P$

Die weitere Berechnung entspricht der Berechnung bei Grundaufgabe I.

***Beispiel** Grundaufgabe III:*

Nach Erhöhung der Miete um S 300,-

beträgt die Miete S 5 300,-.

Um wieviel % wurde die Miete erhöht?

$$B + P = 5300,\ P = 300,\ p = ?$$

$$B = 5300 - 300 = 5000$$

$$p = \frac{100}{5000} \cdot 300 = 6$$

Die Miete wurde um 6% erhöht.

8.3. Zinsenrechnung

(a) Zinsen, Arten der Verzinsung

Zinsen stellen eine Vergütung (als Gegenleistung) für die zeitlich begrenzte Überlassung von Geld oder Kapital dar. In welcher Höhe die Zinsen entrichtet werden, wird mittels eines Zinssatzes, welcher in Prozent angegeben wird, festgelegt.

Dieser Zinssatz ist ein Prozentsatz für einen fix vorgegeben Zeitraum, z.B.:
für ein Jahr (p.a) für ein Monat (p.m.) für ein Quartal (p.Qu.)

Die Zinsenrechnung ist also eine Prozentrechnung, bei der zusätzlich die Zeit berücksichtigt wird. Der Zinssatz muß dabei auf einen Prozentsatz für die jeweilige Kreditlaufzeit umgerechnet werden; für die weitere Berechnung gelten dann alle Regeln der Prozentrechnung.

Bezeichnet man das Kapital, von dem Zinsen zu berechnen sind, mit K, die Zinsen mit Z und den Zinssatz für ein Jahr mit p, so braucht man noch eine Größe t für die Laufzeit und eine Maßzahl m, die angibt, in welcher Einheit die Laufzeit gegeben ist, um einen Zusammenhang für die Zinsenberechnung aufstellen zu können.

Aus der Formel für den Prozentwert ergibt sich dann: $P = \frac{B}{100} \cdot p \Rightarrow Z = \frac{K}{100} \cdot \frac{p \cdot t}{m}$

Grundformel für die Zinsenrechnung: $Z = \frac{K}{100} \cdot \frac{p \cdot t}{m} = \frac{K}{100} \cdot p_t$

Die Maßzahl m ist in diesem Zusammenhang m = 1, wenn die Laufzeit in Jahren gegeben ist; sie ist entsprechend m = 12 bei Monaten und m = 360 bei Tagen; p_t ist der auf die Laufzeit umgerechnete Zinssatz. Bei Kreditinstituten sind sind zur Ermittlung der Laufzeit prinzipiell folgende Konditionen üblich:

Das Jahr wird mit 12 Monaten und 360 Tagen gerechnet. Die Monate selbst werden kalendermäßig gerechnet (z.B. Jänner 31 Tage, April 30 Tage). Für die Laufzeit wird der erste Tag nicht, der letzte schon mitgerechnet.

Zuweilen wird das Monat auch immer mit 30 Tagen oder das Jahr mit 365 Tagen gerechnet.

Bei der Zinsenrechnung von Kreditgeschäften wird darüberhinaus eine Unterscheidung bezüglich des Zeitpunkts der Bezahlung der Zinsen getroffen:

Dekursive Verzinsung: Die Zinsen werden im nachhinein bezahlt. Dem Kreditnehmer wird das reine Kapital K ausbezahlt, am Ende der Laufzeit ist das Kapital und Zinsen K+Z zurückzuzahlen.

Antizipative Verzinsung: Die Zinsen werden im vorhinein einbehalten. Dem Kreditnehmer wird das um die Zinsen verminderte Kapital K–Z ausbezahlt, am Ende der Laufzeit ist das reine Kapital K zurückzuzahlen.

Falls nicht anders angegeben, ist in den folgenden Beispielen immer dekursive Verzinsung gemeint.

Bei der Umrechnung des Zinssatzes treten in der Regel mehrere bishin zu unendlich viele Nachkommastellen auf. Um Rundungsfehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, mit einer Kommastelle mehr als die Anzahl der Ziffern des Kapitalbetrages weiterzurechnen.

Auch bei der Zinsenrechnung kann zwischen den grundlegenden Fällen des bekannten oder unbekannten Zinsatzes unterschieden werden.

(b) Berechnungen mit bekanntem Zinssatz

Bei diesen Aufgaben wird immer zuerst der Zinssatz auf die Laufzeit umgerechnet. Die weitere Berechnung erfolgt als entsprechende Prozentrechnung. Ist der Zinssatz p bekannt, so können die Zinsen oder das Kapital gesucht sein.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie die Zinsen für einen Kredit von ÖS 80000,- bei einem Zinssatz von p = 15% p.a. und einer Kreditlaufzeit t = 18 Monate.*

$$p_t = \frac{15}{12} \cdot 18 = 22{,}5$$

$$Z = \frac{80000}{100} \cdot 22{,}5 = 18000$$

Die Zinsen betragen ÖS 18000,-

Ist die Kreditlaufzeit durch das Anfangs- und Enddatum gegeben, muß zuerst die Anzahl der Tage ermittelt werden. Falls nicht anders angegeben, erfolgt in den folgenden Beispielen die Berechnung kalendermäßig wie am Beginn des Kapitels beschrieben.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie die Zinsen für ein Darlehen von ÖS 12500,- bei p=8,5% p.a. und einer Laufzeit von 26. Mai bis 30. September.*

$$t = 5 + 30 + 31 + 31 + 30 = 127$$

$$p_t = \frac{8,5}{360} \cdot 127 = 2,998611$$

$$Z = \frac{12500}{100} \cdot 2,998611 = 374,83$$

Die Zinsen betragen ÖS 374,83.

***Beispiel**:* *Ein Gebrauchtwagen kostet ÖS 53600,-. Dieser Kauf soll durch die Aufnahme eines Darlehens finanziert werden. Die Konditionen der Bank lauten: 11% Zinsen p.a., antizipativ, Laufzeit 36 Monate. In welcher Höhe muß der Kredit beantragt werden, um die Kosten ausbezahlt zu bekommen?*

$$p_t = \frac{11}{12} \cdot 36 = 33$$

$$K = \frac{53600}{100 - 33} \cdot 100 = 80000$$

Man muß einen Kredit in Höhe von ÖS 80000,- beantragen.

Da die Verzinsung im vorigen Beispiel antizipativ erfolgt, kommt nur das verminderte Kapital zur Auszahlung. Der Kaufpreis ist also der um die Zinsen verminderte Betrag, es erfolgt eine Berechung „in Hundert".

***Beispiel**:* *Ein Handelsvertreter erwartet am 1.12 eine Provision in der Höhe ÖS 50 000,-. Um bereits am 15.7. eine Urlaubsreise finanzieren zu können, nimmt er ein Darlehen auf, das er dann mit der Provision zurückzahlen möchte. Für das Darlehen sind 13 % p.a. Zinsen zu bezahlen. Wie teuer darf der Urlaub sein?*

$$t = 16 + 31 + 30 + 31 + 30 + 1 = 139$$

$$p_t = \frac{13}{360} \cdot 139 = 5{,}019444$$

$$K = \frac{50000}{100 + 5{,}019444} \cdot 100 = 47610{,}23$$

Er kann ein Darlehen von ÖS 47610,23 aufnehmen.

Der Rückzahlungsbetrag im vorigen Beispiel setzt sich aus der Darlehenssumme und den anfallenden Zinsen zusammen; er ist also der um die Zinsen vermehrte Betrag.

(c) Berechnungen mit unbekanntem Zinssatz - Effektivverzinsung

Im allgemeinen ist der Zinssatz p für Darlehen und Kredite bekannt und braucht daher nicht erst berechnet zu werden. Dies gilt jedoch nur für den offiziellen (nominellen) Zinssatz. In der Praxis interessiert man sich allerdings oft für die tatsächliche, die sogenannte **effektive** Verzinsung. Bei Kreditgeschäften fallen neben den Zinsen auch noch andere Nebenkosten an. Gemeinsam mit den Zinsen bilden diese Kosten dann die effektiven Kreditkosten. Werden diese in Beziehung zum tatsächlich gewährten Kredit (Effektivkredit) gesetzt, so erhält man einen neuen Zinssatz - den **Effektivzinssatz**. Die Bedeutung des Effektivzinssatzes liegt darin, daß er die Basis für den Vergleich verschiedener Kreditvarianten darstellt.

Der **Effektivzinssatz** gibt den dekursiven Jahreszinssatz an, mit dem ein Kredit tatsächlich verzinst ist.

Zur Berechnung des Effektivzinssatzes müssen folgende Fragen beantwortet werden:
Wie hoch sind die effektiven Kreditkosten? Wie hoch ist der effektive Kredit? Wieviel Prozent betragen die Kreditkosten vom Effektivkredit? Welchem Jahreszinssatz entspricht dieser Prozentsatz?

Die effektiven Kreditkosten setzen sich aus allen anfallenden Kosten wie z.B. Zinsen, Spesen, Gebühren, o.ä. zusammen.

Der effektive Kredit ist jener Betrag, der zum Zeitpunkt der Kreditaufnahme (also am Beginn der Laufzeit) zur Verfügung steht. Er entspricht meist nicht der beantragten Kreditsumme, sondern ist um etwaige Spesen, Gebühren o.ä. vermindert. Bei antizipativer Verzinsung werden darüberhinaus noch die Zinsen einbehalten.

***Beispiel**: Ein Kreditinstitut bietet folgende Konditionen: Verzinsung 11,5% p.a., Berarbeitungsgebühr 0,5% sofort fällig, Spesen ÖS 120 fällig bei Rückzahlung. Wie hoch ist die Effektivverzinsung, wenn ein Kredit über ÖS 100000,- vom 3. Juni bis 20. August aufgenommen wird?*

$$t = 27 + 31 + 20 = 78$$

$$p_t = \frac{11,5}{360} \cdot 78 = 2,4916667$$

$$Z = \frac{100000}{100} \cdot 2,4916667 = 2491,67$$

$$\text{Spesen: } \frac{100000}{100} \cdot 0,5 = 500$$

$$\text{effektive Kreditkosten: } 2491,67 + 500 + 120 = 3111,67$$

$$\text{effektiver Kredit: } 100000 - 500 = 99500$$

Die Berechnung der effektiven Verzinsung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird berechnet, wieviel Prozent die effektiven Kreditkosten vom effektiven Kredit betragen, dann wird dieser Prozentsatz, der ja für die Kreditlaufzeit gilt, auf einen Jahreszinssatz umgerechnet.

$$p_{eff(t)} = \frac{100}{99500} \cdot 3111,67 = 3,1273065$$

$$p_{eff} = \frac{3,1273065}{78} \cdot 360 = 14,43$$

***Beispiel**: Ein Darlehen S 100000,- wird für 18 Monate aufgenommen und mit 13% p.a. antizipativ verzinst.*

$$p_t = \frac{13}{12} \cdot 18 = 19,5;\; Z = \frac{100000}{100} \cdot 19,5 = 19500$$

$$\text{effektiver Kredit: } 100000 - 19500 = 80500$$

$$p_{eff(t)} = \frac{100}{80500} \cdot 19500 = 24,223602$$

$$p_{eff} = \frac{24,223602}{18} \cdot 12 = 16,15$$

Obwohl hier außer den Zinsen keine weiteren Kreditkosten anfallen, liegt die tatsächliche Verzinsung über dem nominellen Zinssatz von 13% p.a., da die anfallenden Zinsen auf den tatsächlichen ausbezahlten Betrag (Antizipativverzinsung) bezogen werden müssen.

***Beispiel**: Im ersten Quartal (Vierteljahr) sind auf einem Kontokorrentkredit folgende Bewegungen verzeichnet: –100000,- Kontostand per 31.12., 150000,- 17.1. Gutschrift, 200000,- 15.2. Belastung, 50000,- 28.2. Belastung, 250000,- 6.3. Gutschrift, 100000,- 25.3. Belastung. Konditionen der Bank: Kreditrahmen: S 500000,-, Soll-Zinssatz: 12% p.a., Haben-Zinssatz: 0,75% p.a., Bereitstellungsgebühr: 0,5% pro Quartal vom Kreditrahmen, sonstige Spesen: S 500,-. Berechnen Sie den Kontostand am Ende des Quartals und die Effektivverzinsung des Kontokorrentkredites.*

	Kapital	von ... bis	Tage	Sollzinsen	Habenzinsen
–	100000	31.12. - 17.1.	17	566,67	
+	150000				
+	50000	17.1. - 15.2.	29		30,21
–	200000				
–	150000	15.2. - 28.2.	13	650	
–	50000				
–	200000	28.2. - 6.3.	6	400	
+	250000				
+	50000	6.3. - 25.3.	19		19,79
–	100000				
	50000	25.3. - 31.3.	6	100	
				1716,67	50

$$\text{Bereitstellungsgebühr: } \frac{500000}{100} \cdot 0{,}5 = 2500$$

$$\text{Kreditkosten: } 500 + 2500 + 1716{,}67 = 4716{,}67$$

$$\text{Kontostand: } -50000 - 4716{,}67 + 50 = -54666{,}67$$

Da der Effektivkredit nicht bekannt ist, können wir die Effektivverzinsung am einfachsten auf Basis folgender Überlegung berechnen: die Zinsen 1716,67 sind 12%, wieviel Prozent sind dann die Kreditkosten?

$$p_{eff} = \frac{12}{1716{,}67} \cdot 4716{,}67 = 32{,}97\%$$

8.4. Zinseszinsrechnung

(a) Zinseszinsen

Werden Kapitalien längerfristig verzinst, so ist es üblich die Zinsen am Jahresende dem Kapital zuzurechnen und das vermehrte Kapital zu verzinsen. Auf diese Weise werden die Zinsen wieder verzinst, man spricht von den sogenannten Zinseszinsen. Da es üblich ist, Zinsen erst am Ende der Zinsperiode auszubezahlen, sind die folgenden Zinssätze, wenn nicht anders angegeben, immer dekursiv.

Wird ein Kapital K_0 zu einem Zinssatz p verzinst, so betragen die Zinsen für ein Jahr $Z = \frac{K_0}{100} \cdot p$.

Gibt man diese Zinsen zum Kapital, so ergibt sich nach einem Jahr $K_1 = K_0 + \frac{K_0}{100} \cdot p = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$

Zur vereinfachten Darstellung wählt man den Einheitszinsfuß $i = \frac{p}{100}$, und erhält $K_1 = K_0 \cdot (1+i)$

Verfährt man mit K_1 ebenso, um K_2 zu erhalten, ergibt sich $K_2 = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2$

Dekursiver Zinseszins: Wird ein Anfangskapital K_0 zu einem Zinssatz p über n Zinsperioden verzinst, so beträgt das Endkaptital K_n:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \text{bzw. mit } i = \frac{p}{100} \quad K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

***Beispiel**: Ein Betrag von ÖS 10000,- wird bei einer Bank eingezahlt. Der Zinsfuß beträgt p = 5% p.a. Auf welchen Wert wächst die Zahlung in insgesamt 1, 2 und 3 Jahren an, wenn während der Zeit nichts abgehoben wird?*

$$K_0 = 10000,\ p = 5,\ i = 0{,}05$$
$$K_1 = 10000 \cdot (1 + 0{,}05) = 10500$$
$$K_2 = 10000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 = 11025$$
$$K_3 = 10000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 11576{,}25$$

Da bei Zinseszinsberechungen der Ausdruck in der Klammer immer wieder auftritt, wird dieser als q = (1 + i) zusammengefaßt.

(b) Aufzinsen und Abzinsen

Die Herleitung der Zinsenzinsformel gibt bereits Auskunft, wie das Aufzinsen, das heißt die Berechnung des Kapitals nach einer oder mehreren Zinsperioden, rechnerisch abläuft. Ist ein Kapital zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben, so muß mit dem Faktor q = (1+i) multipliziert werden, um das Kapital nach der nächsten Zinsperiode zu erhalten.

Umgekehrt muß ein Kapital nur durch den Faktor $q = (1+i)$ dividiert bzw. mit dem Kehrwert von q multipliziert werden, um das Kapital eine Zinsperiode früher zu erhalten; diesen Vorgang nennt man entsprechend Abzinsen eines Kapitals.

Aufzinsen über eine Zinsperiode	$K_{m+1} = K_m \cdot q$
Abzinsen über eine Zinsperiode	$K_{m-1} = K_m \cdot \frac{1}{q}$

Der Faktor q wird in diesem Zusammenhang als Aufzinsungsfaktor, sein Kehrwert entsprechend als Abzinsungsfaktor für eine Periode bezeichnet.

Soll über mehrere Perioden auf- bzw. abgezinst werden, so muß das Kapital mehrmals mit dem Aufzinsungsfaktor bzw. Abzinsungsfaktor für eine Periode multipliziert werden.

Aufzinsen über mehrere Zinsperioden r	$K_{m+r} = K_m \cdot q^r$
Abzinsen über mehrere Zinsperioden r	$K_{m-r} = K_m \cdot \frac{1}{q^r}$

***Beispiel**:* *Ein Kapital beträgt bei einer Verzinsung zu p = 6% p.a. nach 3 Jahren ÖS 12000,-. Wie groß war es am Anfang, wir groß wird es nach 7 Jahren sein?*

$$K_3 = 12000,\ q = 1{,}06$$

$$K_0 = 12000 \cdot \frac{1}{1{,}06^3} = 10075{,}43$$

$$K_7 = 12000 \cdot 1{,}06^4 = 15149{,}72$$

Das Ergebnis wird exakter, wenn nur mit den Angaben gerechnet wird, da sich etwaige Rundungen nicht vorzeitig auswirken.

(c) Berechnung des Zinssatzes

Sind nur die Werte eines Kapitals nach zwei unterschiedlichen Zinsperioden bekannt, so läßt sich der Zinssatz p aus der allgemeinen Formel für die Zinseszinsberechnung ermitteln.

Zinssatz aus $K_{m+r} = K_m \cdot q^r$	$q = \sqrt[r]{\frac{K_{m+r}}{K_m}}$	$p = 100 \cdot (q - 1)$

Der Zinssatz wird also durch Ziehen der entsprechenden Wurzel errechnet (siehe auch späteres Kapitel Exponential- und Logarithmusfunktion).

***Beispiel**:* *Bei welchem Zinssatz wächst ein Kapital von ÖS 20000,- in 5 Jahren auf ÖS 25000,- an?*

$$K_0 = 20000,\ K_5 = 25000$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{25000}{20000}} = 1,0456396$$

$$p = 4,56$$

Der Zinssatz beträgt 4,56%.

(d) Unterjährige Zinsperioden

Wird nicht wie bisher jährlich verzinst, sondern halbjährlich oder monatlich o.ä., so behalten die bisherigen Formeln ihre Gültigkeit. Im Normalfall ist jedoch der Zinssatz ein anderer. Ist jedoch der Zinssatz für eine andere Zinsperiode gegeben, als verzinst wird, muß der Zinssatz umgerechnet werden. Die Überlegung dazu ist, daß beide Zinssätze nach gleicher Zeit zum gleichen Endkapital führen.

Zinssatzumrechnung	$(1 + i_j)^j = (1 + i_k)^k$

***Beispiel**:* *Rechnen Sie den Zinsatz p = 8% p.a. auf einen monatlichenZinssatz um.*

$$(1 + 0,08)^1 = (1 + i_{12})^{12}$$

$$q = \sqrt[12]{1,08} = 1,006434$$

$$p = 0,64$$

(e) Berechnung der Laufzeit

Ist die Laufzeit nicht bekannt, so führt die Umformung der allgemeinen Zinsezinsformel zu folgender Gleichung:

$$q^n = \frac{K_{m+r}}{K_m}$$

In dieser Gleichung ist nur die Laufzeit n unbekannt. Da es aber nicht möglich ist, eine unbekannte Wurzel zu ziehen, ist mit unseren derzeitigen Mitteln ein Lösen dieser Gleichung nicht möglich. Diesem Problem wird im nächsten Abschnitt Exponential- und Logarithmusfunktion Abhilfe geschafft.

Vergleich der Zinsenrechnung mit der Zinseszinsrechnung

Bei Berechnungen über nur eine Periode ergibt sich kein Unterschied zwischen der einfachen Zinsenrechnung und der Zinseszinsrechnung. Bei der Rechnung über mehrere Perioden besteht der Unterschied darin, daß sich das Anfangskapital bei der Zinseszinsrechnung von Periode zu Periode verändert, während man bei der Zinsrechnung immer von einem fixen Kapital ausgeht.

Folgendes Beispiel zeigt dies sehr deutlich:

***Beispiel**:* *Welchen Wert hätte ein Pfennig heute, den Karl der Große bei seiner Krönung im Jahre 800 zu 5% verzinslich angelegt hätte, bei einfacher Verzinsung und bei Zinseszinsen.*

$$p = 5,\ n = 1200$$

$$\text{Einfache Verzinsung: } p_t = 1200 \cdot 5 = 6000$$

$$K + Z = 1 + \frac{1}{100} \cdot 6000 = 61$$

$$\text{Zinseszinsen: } K_{1200} = 1 \cdot 1{,}05^{1200} = 2673984490280000000000000$$

Dieses Ergebnis ist als Betrag nicht vorstellbar. Zum Vergleich: Würde man alle diese Pfennige neben-einander auflegen, könnte man eine „Geldstraße“ ans Ende des derzeit erforschten Weltalls legen.

Anhang: Übungsbeispiele zum 8. Kapitel

8/1 Berechnen Sie den Prozentwert auf zwei Dezimalstellen:

a) 57 %	von	43,2
b) 8¾ %	von	144
c) 13,5 %	von	240
d) 116½ %	von	16620

8/2 Berechnen Sie den Prozentwert auf zwei Dezimalstellen:

a) 2,4 ‰	von	445
b) 5¾ ‰	von	123,45
c) 145 ‰	von	78
d) 1247 ‰	von	0,89

8/3 Wenn Wasser gefriert, dehnt es sich um 9% seines Volumens aus. Wieviel dm^3 Eis ergeben a) 110 l bzw. b) 2,4 hl Wasser?

8/4 Ein Betrieb erzeugte vor drei Jahren 14600 Stück eines Gerätes in einem Jahr. Die Produktion ist a) um 115%, b) auf 115% gestiegen. Berechnen Sie die Zahl der erzeugten Geräte.

8/5 Ein Mensch hat ca. 5l Blut. Bei der Blutprobe von Autofahrern wird ein Alkoholgehalt von a) 1,2 ‰, b) 0,8 ‰ nachgewiesen. Wieviel cm^3 reiner Alkohol sind das?

8/6 Linsen enthalten 13% Wasser, 22,6% Eiweiß, 1,9% Fett und 52,8% Kohlehydrate. Berechnen Sie, wieviel Gramm dieser Bestandteile in 2kg Linsen enthalten sind.

8/7 Berechnen Sie die Bezugsgröße auf zwei Dezimalstellen:

a) 12,5 %	sind	21
b) 65 %	sind	520
c) $14^2/_3$ %	sind	157
d) 105 %	sind	474,75

8/8 Von einer Ladung Ziegel sind 252 Stück, das sind 4% der Ladung, schadhaft. Wieviele Ziegel waren bestellt?

8/9 Von einer neuen Straße sind bereits 30,5 km, das sind 52%, fertiggestellt. Welche Gesamtlänge hat das geplante Straßenstück?

8/10 Die Einwohnerzahl einer Stadt stieg in einem bestimmten Zeitraum um 3,5 ‰ auf 33534. Wie groß war die Einwohnerzahl vorher?

8/11 Der monatliche Mietzins einer Wohnung wurde um 18% erhöht, sodaß ÖS 115,20 mehr zu zahlen sind. Wie hoch ist der neue Mietzins?

8/12 Berechnen Sie den Prozentsatz auf zwei Dezimalstellen:

a) 10,5	von	84
b) 1,5	von	250
c) 13,87	von	0,23
d) 43,9	von	110

8/13 6 l Milch enthalten 5,1 l Wasser. Wieviel Prozent beträgt der Wassergehalt der Milch?

8/14 Die Entfernung Wien-München beträgt in der Luftlinie 350km, die Eisenbahnstrecke ist 471km lang. Um wieviel Prozent ist sie länger?

8/15 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a = 6cm wird ein Kreis eingeschrieben. Wieviel Prozent der Quadratfläche beträgt die Kreisfläche?

8/16 Aufgrund steigender Kosten wurde der Verkaufspreis einer Ware von ÖS 325,- auf ÖS 351,- erhöht. Wieviel Prozent beträgt die Preiserhöhung?

8/17 Im Ausverkauf kostet eine Ware statt bisher ÖS 3450,- nur mehr ÖS 2990,-. Wieviel Prozent beträgt der Preisnachlaß?

8/18 Im Vorjahr wurden bei einer Ausstellung 13085 Besucher gezählt, heuer waren es um 1125 Personen mehr. Um wieviel Prozent erhöhte sich die Besucherzahl?

8/19 Die Verkehrsunfälle gingen im Beobachtungszeitraum um 11 auf 43 zurück. Um wieviel Prozent sank die Unfallhäufigkeit?

8/20 Die Zahl der Reklamationen stieg bei einer Firma von 234 auf 265 pro Quartal. Wieviel Prozent beträgt diese Steigerung?

8/21 Im Zuge einer größeren Angebotsumschichtung werden bei einer Firma folgende Artikel nacheinander zweimal verbilligt:

Artikel I:	989,-	1. Preissenkung: 20%	2. Preissenkung: 110,-
Artikel II:	50,-	1. Preissenkung: 9,-	2. Preissenkung: 6%

Berechnen Sie die Preise der beiden Artikel nach den jeweiligen Preissenkungen sowie die fehlenden Prozentsätze.

8/22 Berechnen Sie die Zinsen für die folgenden Angaben:

a) ÖS 540,	3 Jahre,	6% p.a.
b) ÖS 2260,	15 Monate,	8% p.a.
c) ÖS 5085,	297 Tage,	7,25% p.a.
d) ÖS 981,	2.3. bis 30.10.,	4% p.a.
e) ÖS 12000,	22.4. bis 21.8.,	4,5% p.a.

8/23 Jemand zahlt nach m Monaten K_m Schilling samt p% Zinsen zurück. Berechnen Sie den Kreditbetrag:

a) $m = 4$,	$p = 6\%$,	$K_m = 15300$
b) $m = 8$,	$p = 9\%$,	$K_m = 26500$
c) $m = 9$,	$p = 8\%$,	$K_m = 34450$
d) $m = 7$,	$p = 8{,}5\%$,	$K_m = 56000$
e) $m = 16$,	$p = 7\%$,	$K_m = 100000$

8/24 Berechnen Sie das Kapital, das nach t Tagen zu p Prozent die Zinsen Z bringt:

a) t = 180,	p = 5,5%,	Z = 550
b) t = 58,	p = 6,25%,	Z = 12550
c) t = 297,	p = 5%,	Z = 190
d) t = 12,	p = 4,5%,	Z = 12345

8/25 Jemand erwartet am 15. Jänner des nächsten Jahres eine Erbschaft in der Höhe von ÖS 250.000,-. Er möchte sich heute das Geld bei einer Bank zu 12% antizipativen Zinsen ausleihen. Welchen Betrag bekommt er heute ausbezahlt?

8/26 Berechnen Sie die Zinsen per 31.3 sowie den Kontostand per 31.3. Konditionen: Rahmen S 1.000.000,-, Sollzinsen 11% p.a., Habenzinsen 0,75% p.a., Zinsenverrechnung vierteljährlich (klm/360). Anfangsstand per 31.12. – 98.000,-, Bewegungen: 12.1. + 65.000,-, 29.1. – 78.000,-, 23.2. + 210.000,-, 9.3. – 99.000,-.

8/27 Jemand erwartet am 1. Jänner des nächsten Jahres eine Erbschaft in der Höhe von 1 Million Schilling. Er könnte sich heute das Geld bei einer Bank zu 10,25% antizipativen Zinsen ausleihen oder bei einem anderen Geldinstitut zu 12,25% dekursiv. Welche Variante soll er wählen, wenn er heute einen möglichst hohen Betrag ausbezahlt bekommen möchte?

8/28 Eine Rechnung enthält folgenden Vermerk: “Zahlbar innerhalb von 12 Tagen abzüglich 2% Skonto oder innerhalb von 40 Tagen netto.“ Die Rechnung lautet auf S 11.111,-. Wie hoch wird dieser Lieferantenkredit effektiv verzinst?

8/29 Ein Kreditinstitut bietet folgende Konditionen: Verzinsung 11,75% p.a. (antizipativ), Bereitstellungsprovision: 0,4% sofort fällig, Spesen: S 180,- bei Kreditrückzahlung. Wie hoch ist die Effektivverzinsung, wenn ein Darlehen über S 140.000,- für 15 Monate aufgenommen wird?

8/30 Berechnen Sie den Wert des Kapitals K_n nach n Jahren zu p Prozent Zinseszins:

a) $K_0 = 27000$, p = 4,5% p.a., n = 3

b) $K_0 = 33000$, p = 5% p.a., n = 4

c) $K_0 = 74000$, p = 7% p.a., n = 6

d) $K_0 = 89000$, p = 6,25% p.a., n = 13

8/31 Berechnen Sie den Wert des Kapitals K_n zu p Prozent, wenn K_m bekannt ist:

a) $K_3 = 12000$, p = 5,5% p.a., $K_5 = ?$

b) $K_6 = 18500$, p = 7,5% p.a., $K_{12} = ?$

c) $K_1 = 8000$, p = 6% p.a., $K_3 = ?$

d) $K_{12} = 456$, p = 2% p.a., $K_5 = ?$

8/32 Berechnen Sie den Zinssatz p, indem aus dem Kapital K_0 das Kapital K_n wird:

a) $K_0 = 3450$, $K_5 = 6250$

b) $K_0 = 1234$, $K_4 = 1423$

c) $K_0 = 5432$, $K_{12} = 8233$

d) $K_0 = 98999$, $K_1 = 111000$

e) $K_0 = 100$, $K_{100} = 100000$

8/33 Berechnen Sie den zu p_j entsprechenden Zinssatz p_k:

a) $p_2 = 6\%$, $p_1 = ?$

b) $p_4 = 2\%$, $p_{12} = ?$

c) $p_1 = 8{,}25\%$, $p_3 = ?$

d) $p_{12} = 0{,}65\%$, $p_2 = ?$

8/34 Jemand, der Ihnen in 3 Jahren ÖS 60000,- schuldet, bietet Ihnen folgende Rückzahlungsvarianten an: Variante I: ÖS 10000,- sofort, ÖS 20000,- nach einem Jahr, ÖS 30000,- nach vier Jahren; Variante II: ÖS 20000,- sofort, ÖS 20000,- nach zwei Jahren, ÖS 20000,- nach fünf Jahren. Sie haben die Möglichkeit, das Geld zu 8% p.a. anzulegen. Welcher Variante werden Sie zustimmen?

8/35 Jemand, der Ihnen in 3 Jahren ÖS 100000,- schuldet, bietet Ihnen folgende Rückzahlungsvarianten an: Variante I: ÖS 30000,- sofort, ÖS 20000,- nach einem Jahr, ÖS 50000,- nach vier Jahren; Variante II: ÖS 30000,- sofort, ÖS 30000,- nach zwei Jahren, ÖS 40000,- nach fünf Jahren. Sie haben die Möglichkeit, das Geld zu 6% p.a. anzulegen. Welcher Variante werden Sie zustimmen?

8/36 Auf ein Sparbuch mit ÖS 3000,- werden nach 3 Jahren weitere ÖS 10000,- eingezahlt. Wie hoch ist das Guthaben nach 8 Jahren, wenn
a) die Verzinsung während der gesamten Zeit 3% p.a. beträgt,
b) die Verzinsung 3 Jahre lang 3% p.a., ab dann 3,5% p.a. beträgt,
c) die Verzinsung 6 Jahre lang 3% p.a., ab dann 3,5% p.a. beträgt?

8/37 Ein Kapital wird 2 Jahre lang mit 8% p.a., weitere 3 Jahre lang mit nur 6% p.a. verzinst. Welcher gleichbleibende Zinsfuß erbringt bei vierjähriger Verzinsung das gleiche Endkapital?

8/38 Eine Schuld von ÖS 600000,-, die zu 6% p.a. verzinst wird, wird in drei Raten getilgt, die nach 4, 8 und 12 Jahren fällig sind. Die erste Rate beträgt ÖS 250000,- die zweite ÖS 175000,-. Wie hoch ist die dritte Rate?

8/39 Eine Schuld von ÖS 80000,- soll durch zwei gleich große Raten nach 3 bzw. 5 Jahren getilgt werden. Wie hoch muß eine Rate sein, wenn der Zinssatz 8% p.a. beträgt?

8/40 Bei welchem Zinssatz wächst ein Kapital von ÖS 5000,- in 3 Jahren 6 Monaten auf ÖS 6200,-?

8/41 Versuchen Sie durch Probieren zu ermitteln, in welcher Zeit ein Kapital zu 4% p.a. von ÖS 10000,- auf ÖS 12000,- anwächst.

8/42 Versuchen Sie durch Probieren zu ermitteln, nach wievielen Jahren sich ein Kapital zu $p = 10\%$ p.a. verdoppelt haben wird.