7. VEKTORRECHNUNG, ANALYTISCHE GEOMETRIE

7.1. Vektoren

(a) Definition

Schiebt man einen Punkt P_1 im Koordinatensystem in eine andere Lage P_2, so ist diese Schiebung durch Angabe des Urpunktes P_1 und des Bildpunktes P_2 eindeutig festgelegt. Dieses geordnete Punktepaar bestimmt die orientierte (gerichtete) Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$, einen Pfeil von P_1 nach P_2. Pfeile, die durch dieselbe Schiebung entstehen, sind gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert.

> Eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile des Raumes heißt ein **Vektor** des Raumes.

> Ein Vektor des Raumes ist die Klasse aller zu einem gegebenen Pfeil parallelgleicher Pfeile.

Vektoren sind gleich, wenn sie dieselbe Klasse von Pfeilen darstellen. Vektoren werden mit deutschen Kleinbuchstaben bezeichnet, oder es wird das Pfeilsymbol über den Buchstaben geschrieben ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$).

Wählt man im Raum (oder in der Ebene) einen festen Punkt O (Ursprung), so ist jeder von O verschiedene Punkt P des Raumes (der Ebene) durch den Pfeil $\overrightarrow{OP}$ eindeutig festgelegt. Der Pfeil $\overrightarrow{OP}$ wird als Ortsvektor des Punktes P bezüglich des Ursprunges O bezeichnet.

Interpretiert man die Änderung der Koordinaten vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 als die Koordinaten des Vektors, so lassen sich diese als Differenz der Koordinaten der Punkte angeben.

> Die Koordinaten eines Vektors sind: $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Es gilt also die Merkregel: „Spitze minus Schaft“. Die Koordinaten eines Ortsvektors sind somit die Koordinaten der Spitze des Vektors.

Den Abstand der Punkte P_1 und P_2 bezeichnet man als den Betrag des Vektors.

Der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Durch Ergänzen der Koordinate a_z sind die obigen Aussagen über Vektoren der Ebene auf den Raum erweiterbar.

Vektoren im Raum: $\quad \vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

(b) Rechenoperationen mit Vektoren

Vektoren werden addiert bzw. subtrahiert, indem die jeweiligen Koordinaten addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

Graphisch ist die Addition von Vektoren als eine aufeinanderfolgende Verschiebung eines Punktes zu verstehen. Die Subtraktion ist dann eine Verschiebung in die entgegengesetzte Richtung des Vektors. Das Ergebnis der Addition bzw. der Subtraktion ist wieder ein Vektor.

Vektoren werden mit einer reellen Zahl multipliziert, indem die jeweiligen Koordinaten mit dieser Zahl multipliziert werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix} \qquad t \in R$$

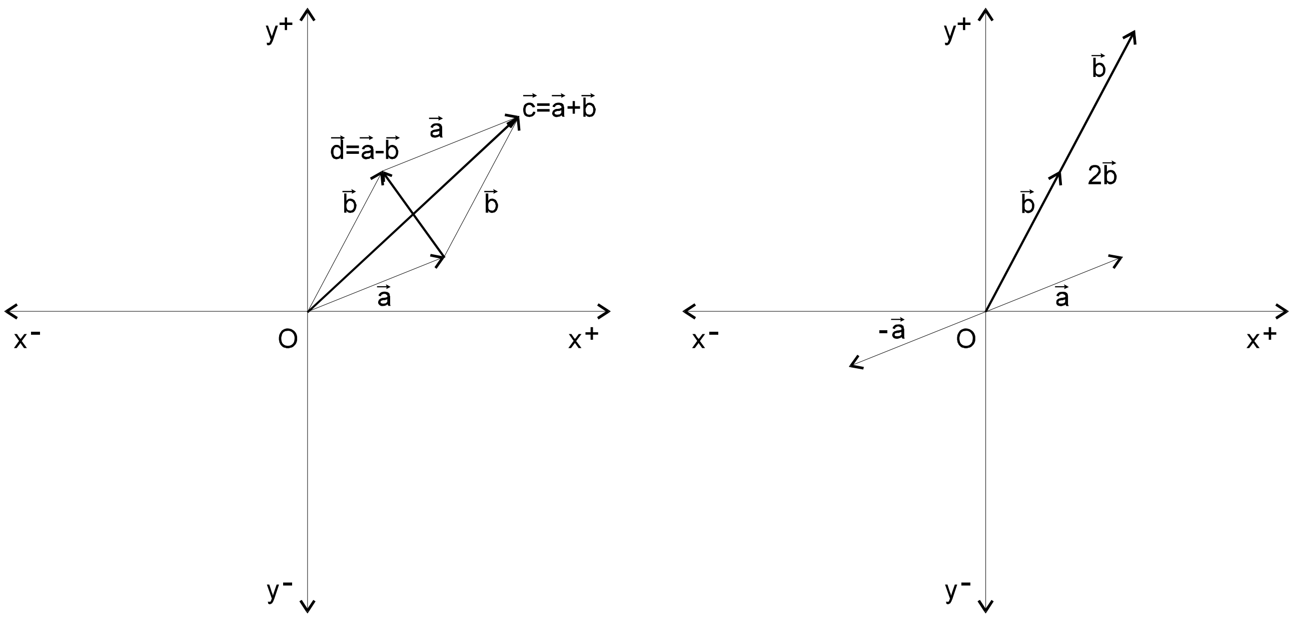
Die Multiplikation ist graphisch als wiederholte Verschiebung eines Punktes zu verstehen. Ein negativer Faktor bewirkt eine Richtungsänderung des Vektors in die entgegengesetzte Richtung. Das Ergebnis der Multiplikation mit einer Zahl ist wieder ein Vektor.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie die Summe und die Differenz von* $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3+2\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\ \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3-2\\4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie das fünfache des Vektors* $\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

$$5\cdot\vec{c}=5\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-3)\\5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\25\end{pmatrix}$$



Die graphische Addition erfolgt nach der Parallelogrammregel. Man verschiebt den Schaft des einen Vektors in die Spitze des anderen Vektors; die Summe der beiden Vektoren ist dann die Diagonale des entstehenden Parallelogramms vom Schaft des ersten zur Spitze des zweiten Vektors. Auch die Subtraktion ist so durchführbar; schiebt man die Spitze des einen Vektors in die Spitze des anderen, so ist der Differenzvektor die Diagonale des entstehenden Parallelogramms von Schaft des ersten zum Schaft des zweiten Vektors.

Vektoren und deren Vielfaches sind zueinander parallel, abhängig vom Vorzeichen haben sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung (Orientierung).

(c) Spezielle Vektoren

Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

Der Nullvektor ist das neutrale Element bezüglich der Addition von Vektoren.

Ein Vektor mit dem Betrag 1 heißt **Einheitsvektor**. Einen zu $\vec{a}$ gehörenden Einheitsvektor $\vec{a}_0$ erhält man, indem man die Koordinaten des Vektors durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörenden Einheitsvektor.*

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{5} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene bzw. $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Raum

heißen **Basisvektoren** des kartesischen Koordinatensystems.

Die Basisvektoren führen - vom Ursprung aus aufgetragen - zu den Einheitspunkten auf den Koordinatnenachsen.

Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ Vektoren und $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ reelle Zahlen, dann heißt ein Vektor der Form $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3 + ... + t_n\vec{a}_n$ eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_i$ $(1 \le i \le n)$.

Jeder Vektor läßt sich daher als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

***Beispiel**:* *Der Vektor von $P_1(2|1)$ nach $P_2(6|3)$ ist durch Basisvektoren darzustellen.*

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

(d) Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ heißt **linear abhängig**, wenn sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen läßt. Vektoren, die nicht linear abhängig sind, heißen **linear unabhängig**.

Vektoren sind also linear abhängig, wenn gilt: $\vec{a}_n = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3 + \ldots + t_{n-1}\vec{a}_{n-1}$

Vektoren ($\neq \vec{o}$) heißen **kollinear**, wenn jeder Vektor ein reelles Vielfaches eines beliebigen anderen Vektors des System ist.

Vektoren sind also kollinear, wenn für je zwei Vektoren gilt: $\vec{b} = t_1 \cdot \vec{a},\ \vec{c} = t_2 \cdot \vec{a},\ \ldots$

***Beispiel**:* *Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$ kollinear sind.*

$$\vec{b} = t \cdot \vec{a}, \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$5 = 2 \cdot t,\ t = 2{,}5$$

$$15 = 6 \cdot t,\ t = 2{,}5$$

Die Vektoren sind also kollinear.

Zwei oder mehrere Vektoren heißen also kollinear, wenn sie zu ein und derselben Geraden parallel sind.

Vektoren $(\neq \vec{o})$ heißen **komplanar**, wenn sich jeder Vektor eindeutig als Linear-kombination zweier Vektoren des Systems darstellen läßt.

Vektoren sind komplanar, wenn für je drei Vektoren gilt: $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}, \ldots$

***Beispiel**:* *Untersuchen Sie, ob die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *komplanar sind.*

$$\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I\!: 1 = 2t - 3s,\ II\!: -1 = 2t - 5s,\ III\!: -1 = -t + s$$

$$t = 2,\ s = 1$$

$$-1 = -2 + 1 \text{ w.A.}$$

Die Vektoren sind komplanar.

Die oben genannten Sätze lassen sich auch folgendermaßen formulieren:

Zwei Vektoren sind genau dann kollinear, wenn sie linear abhängig sind.

Drei oder mehr als drei Vektoren heißen komplanar, wenn sie zu ein und derselben Ebene im Raum parallel sind.

Der Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear und zu jedem Paar von Vektoren komplanar.

7.2. Multiplikation von Vektoren

(a) Das skalare Produkt

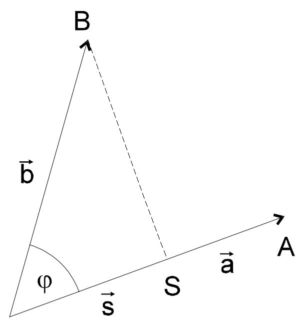
Das skalare Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot a_y$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren liefert also eine reelle Zahl als Ergebnis, ein sogenanntes Skalar.

Sonderfälle: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ $\qquad$ $\vec{a}\cdot\vec{o}=0$

Betrachtet man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die vektorielle Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$, so kann man folgende Zusammenhänge feststellen:



$A(a_x|a_y)$, $B(b_x|b_y)$, $S(s_x|s_y)$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix},\ \vec{s}=\begin{pmatrix}s_x\\s_y\end{pmatrix} \qquad |\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2,\ |\vec{b}|^2=b_x^2+b_y^2,\ |\vec{s}|^2=s_x^2+s_y^2$$

$$\overline{SB}^2=|b|^2-|s|^2=b_x^2+b_y^2-s_x^2-s_y^2$$

$$\overline{SB}^2=\overline{AB}^2-\overline{SA}^2=(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2-(a_x-s_x)^2-(a_y-s_y)^2$$

Setzt man die Ausdrücke gleich, so folgt:

$$b_x^2+b_y^2-s_x^2-s_y^2=b_x^2-2a_xb_y+a_x^2+b_y^2-2a_yb_y+a_y^2-a_x^2+2a_xs_x-s_x^2-a_y^2+2a_ys_y-s_y^2$$

Nach dem Zusammenfassen ergibt sich:

$$a_xb_x+a_yb_y=a_xs_x+a_ys_y$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich dem skalaren Produkt eines Vektors und der vektoriellen Projektion des anderen Vektors auf diesen Vektor.

Haben zwei Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ die gleiche Projektion auf einen Vektor $\vec{a}$, so ist das skalare Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}_1$ gleich dem skalaren Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}_2$.

Führt man die vorige Berechnung für die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ durch, so ergibt sich:

Das skalare Produkt ist:	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{s}_a = \vec{b}\cdot\vec{s}_b$	$\vec{s}_a, \vec{s}_b$ vektorielle Projektionen

Ergibt sich bei der Berechnung des skalaren Produkts ein negativer Wert, so ist die Projektion mit dem Vektor, auf den projiziert wird, entgegengesetzt orientiert.

Berechnet man das Produkt der Längen eines Vektors und der Projektion auf ihn, ergibt sich:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{s}| = \pm\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\cdot\sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \pm\sqrt{a_x^2 s_x^2 + a_x^2 s_y^2 + a_y^2 s_x^2 + a_y^2 s_y^2} = \pm\sqrt{(a_x s_x + a_y s_y)^2 + (a_y s_x - a_x s_y)^2}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{s}$ auf einer Geraden liegen, gilt für die Koordinaten der Strahlensatz:

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{s_x}{s_y} \text{ und } a_x s_y - a_y s_x = 0$$

Damit ergibt sich für das oben errechnete Produkt der Längen:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{s}| = \pm\sqrt{(a_x s_x + a_y s_y)^2} = a_x s_x + a_y s_y = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist das Produkt der Längen eines Vektors und der Länge der vektoriellen Projektion des anderen Vektors auf diesen Vektor, versehen mit einem Vorzeichen abhängig von der Richtung der Projektion.

Das skalare Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist, oder wenn die Länge der Projektion gleich Null ist. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die beiden Vektoren aufeinander normal stehen.

Orthogonalitätsbedingung: Das skalare Produkt zweier Vektoren ist genau dann gleich Null, wenn die beiden Vektoren aufeinander normal stehen: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0$

(b) Das vektorielle Produkt

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren des Raumes, so heißt der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ das **vektorielle Produkt** (das Kreuzprodukt) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ -(a_x b_z - b_x a_z) \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

Man spricht daher auch „a kreuz b“. Das Ergebnis dieser vektoriellen Multiplikation ist wieder ein Vektor.

Das vektorielle Produkt ist auch in der Determinantenschreibweise darstellbar:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \right)$$

Die Berechung ist daher in der Praxis einfach; man streicht jeweils eine Koordinatenzeile der beiden Vektoren und bildet die Differenz der Kreuzprodukte der verbleibenden Koordinaten, die zweite Differenz ist mit einem Minus zu versehen.

Wie leicht zu überprüfen ist, gilt für das vektorielle Produkt:

Alternatives Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Sind zwei Vektoren parallel, so ist das vektorielle Produkt der Nullvektor:

$$a_x = t \cdot b_x,\ a_y = t \cdot b_y,\ a_z = t \cdot b_z \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$$

Bildet man das skalare Produkt eines der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit dem vektoriellen Produkt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dieser Vektoren, so ist das Ergebnis gleich Null:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \qquad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Das vektorielle Produkt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht normal auf die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ bilden dabei ein sogenanntes Rechtssystem.

Der Betrag des vektoriellen Produkts beträgt: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(a_y b_z - b_y a_z)^2 + (a_x b_z - b_x a_z)^2 + (a_x b_y - b_x a_y)^2}$

Betrachtet man den Flächeninhalt eines Parallelogramms, das durch zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannt wird, so gilt: $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ bzw. $A^2 = a^2 \cdot h_a^2$

Die Höhe h_a ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz mit $\vec{s}_a$ als Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $h_a^2 = b^2 - s_a^2$

Somit gilt für den Flächeninhalt: $A^2 = a^2 \cdot (b^2 - s_a^2) = a^2 b^2 - a^2 s_a^2 = a^2 b^2 - (a \cdot s_a)^2$

In der vektoriellen Schreibweise ergibt sich also: $A^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Berechnet man diesen Flächeninhalt mit den entsprechenden Koordinaten im Raum, so folgt:

$$A^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 = \ldots = (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2$$

> Der Flächeninhalt des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des vektoriellen Produkts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

(c) Normalvektoren

> Ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{o}$, der auf einen gegebenen Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$ normal steht, heißt **Normalvektor** zu $\vec{a}$.

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{n}$ gilt die Orthogonalitätsbedingung: $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$

> Der Normalvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ in der Ebene lautet: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

Im Raum können jedem Vektor unendlich viele Normalvektoren zugeordnet werden. Legt man diese Normalvektoren in eine Ebene, so ergibt sich eine sogenannte Normalebene. Jedem Vektorpaar läßt sich im Raum ein Normalvektor zuordnen. Es ist dies der Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

> Der Normalvektor im Raum zu einem Vektorpaar $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

7.3. Analytische Geometrie

Analytische Geometrie nennt man denjenigen Teil der Mathematik, in dem Punkte, Geraden, Ebenen und andere geometrische Gebilde durch Zahlen und die zwischen diesen Gebilden bestehenden Beziehungen durch Gleichungen dargestellt werden. Man führt also die Aufgaben der Geometrie auf Aufgaben der Algebra zurück.

Im folgenden Abschnitt beschäftigt sich vor allem mit der Anwendung der Vektorrechnung innerhalb der analytischen Geometrie. Die bereits bekannte Geradengleichung steht am Beginn dieser Ausführungen, um eine Vorstellung vom rechnerischen Umgang mit Vektoren zu erhalten.

(a) Gleichung der Geraden

Durch zwei Punkte ist eine Gerade eindeutig festgelegt. Will man einen Punkt der Geraden erreichen, so muß man sich vom Ursprung zu einem bekannten Punkt P und dann weiter in Richtung eines zweiten bekannten Punktes Q (oder entgegengesetzt) bewegen. Dies ist bereits die vektorielle Vorgangsweise zur Festlegung der Geradengleichung. Der Ortsvektor $\vec{p}$ führt zum Punkt P, der Richtungsvektor $\vec{a}$ vom Punkt P zum Punkt Q. Multipliziert mit einem reellen Parameter t, gibt $t \cdot \vec{a}$ die Richtung zum Erreichen aller weiteren Punkte der Geraden an.

Parameterdarstellung der Geraden:	$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$

In Koordinatenform bedeutet dies folgendes:

Koordinatenform:	$\begin{aligned} x &= p_x + t \cdot a_x \\ y &= p_y + t \cdot a_y \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &= p_x + t \cdot a_x \\ y &= p_y + t \cdot a_y \\ z &= p_z + t \cdot a_z \end{aligned}$

***Beispiel**:* *Erstellen Sie die Geradengleichung durch P(-5|-1) und Q(-1|9).*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9+1 \\ -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{n}$ ein Normalvektor einer Geraden, so steht er auf jeden Richtungsvektor der Geraden normal. Mit der Orthogonalitätsbedingung des skalaren Produkts läßt sich damit eine Normalvektorform der Geraden festlegen.

Normalvektorform:	$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$	$\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{p}$

***Beispiel**:* *Erstellen Sie die Geradengleichung durch P(-5|-1) und* $\vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=23$$

Schreibt man die Geradengleichung in Parameterform in ihrer Koordinatenform an, so erhält man ein Gleichungssystem mit dem Parameter t. In der ebenen Darstellung mit zwei Gleichungen läßt sich dieser Parameter eliminieren und man erhält nach Umformen die bekannte Geradengleichung y = kx+d. In räumlicher Darstellung erhält man drei Gleichungen; der Parameter läßt sich aus je zwei Gleichungen eliminieren und man erhält zwei Gleichungen der Form ax+by+cz = d. Eine Gerade im Raum ist durch zwei Gleichungen bestimmt; wir werden im Abschnitt über Ebenen sehen, daß es sich um die Schnittgerade zweier Ebenen handelt.

***Beispiel**:* *Machen Sie die Geradengleichung g:* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ *parameterfrei.*

$$I\colon x=3+2t,\ II\colon y=7+4t$$
$$(-2)\cdot I\colon -2x=-6-4t$$
$$g\colon -2x+y=1$$

***Beispiel**:* *Machen Sie die Geradengleichung g:* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ *parameterfrei.*

$$I\colon x=-3-2t,\ II\colon y=7+t,\ III\colon z=4+5t$$
$$I+2\cdot II\colon x+2y=11,\ -5\cdot II+III\colon -5y+z=-31$$
$$g\colon (x+2y=11)\cap(-5y+z=-31)$$

Die Lageuntersuchung zweier Geraden zueinander erfolgt nach dem Gleichsetzungsverfahren.

***Beispiel**:* *Schneiden Sie die Geraden g:* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ *und h:* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$I\!: 4 + 7t = -5 + 2s$$

$$II\!: -2 - 6t = -1 + 5s$$

$$6 \cdot I + 7 \cdot II\!: 10 = -37 + 47s$$

$$s = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S(-3|4)$$

(b) Gleichung der Ebene

Im Raum spannen zwei von einem Punkt P ausgehende Vektoren eine Ebene ε auf. Damit ergibt sich wie bei der Geradengleichung eine Parameterdarstellung.

Parameterdarstellung der Geraden:	$\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Koordinatenform:	$x = p_x + s \cdot a_x + t \cdot b_x$ $y = p_y + s \cdot a_y + t \cdot b_y$ $z = p_z + s \cdot a_z + t \cdot b_z$

***Beispiel**:* *Erstellen Sie die Ebenengleichung durch die Punkte P(1|–1|0), Q(2|–7|4) und R(6|–3|–1).*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -7+1 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -3+1 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{n}$ ein Normalvektor der Ebene, so steht er auf alle Vektoren der Ebene normal. Mit der Orthogonalitätsbedingung des skalaren Produkts läßt sich damit wieder eine Normalvektorform der Ebenengleichung aufstellen.

Normalvektorform:	$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$	$\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{p}$

Schreibt man die Ebenengleichung in ihrer Koordinatenform an, so erhält man ein Gleichungssystem mit den Parametern s und t. Aus jeweils zwei Zeilen läßt sich dann ein Parameter eliminieren, den verbleibenden Parameter kann man aus den beiden sich ergebenden Gleichungen eliminieren. Damit erhält man eine Ebenengleichung der Form ax+by+cz = d.

***Beispiel**: Machen Sie die Ebenengleichung* $\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-6\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$ *parameterfrei.*

$$I\colon\ x=1+s+5t,\ II\colon\ y=-1-6s-2t,\ III\colon\ z=4s-t$$

$$iV=I+5\cdot III\colon\ x+5z=1+21s, V=II-2\cdot III\colon\ y-2z=-1-14s$$

$$2\cdot IV+3\cdot V=2x+3y+4z=-1$$

$$\varepsilon\colon\ 2x+3y+4z=-1$$

Will man zwei Ebenen schneiden, so ergibt sich in parameterfreier Form ein Gleichungssystem zweier Gleichungen mit drei Variablen. Setzt man für eine Variable (z.B. für z) einen freien Parameter t, so kann man die anderen Variablen durch diesen Parameter ausdrücken. Es ergibt sich damit gleichzeitig eine Parameterdarstellung der Lösung; das ist im Normalfall eine Gerade im Raum.

***Beispiel**: Schneiden Sie die Ebenen* $\varepsilon_1\colon\ 2x+3y+4z=-1$ *und* $\varepsilon_2\colon\ x-6y-13z=7$.

$$I\colon\ 2x+3y=-1-4t,\ II\colon\ x-6y=7+13t$$

$$I-2\cdot II\colon\ 15y=-15-30t$$

$$y=-1-2t,\ x=1+t,\ z=t$$

$$g\colon\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Als Sonderfälle können die Ebenen parallel oder ident sein. Das Gleichungssystem führt dann zu einer falschen oder einer allgemeinen wahren Aussage.

Das Schneiden dreier Ebenen führt zu einem Gleichungssystem dreier Gleichungen in drei Variablen. Es können vier unterschiedliche Fälle eintreten, nämlich ein Schnittpunkt, eine Schnittgerade, idente Ebenen oder disjunkte Ebenen.

(c) Lagebeziehung Gerade - Ebene

Da eine Gerade im Raum durch zwei Gleichungen gegeben ist, führt das Schneiden einer Geraden mit einer Ebene zu einem Gleichungssystem dreier Gleichungen in drei Variablen. Es können drei unterschiedliche Fälle eintreten, nämlich ein Schnittpunkt mit der Ebene, ein paralleler Verlauf der Geraden zur Ebene oder das Liegen der Geraden in der Ebene.

Beispiel: *Schneiden Sie g:* $\begin{matrix} x+4y-5z=21 \\ x-6y-8z=-3 \end{matrix}$ *mit der Ebene* $\varepsilon\text{: } 2x+3y+4z=-1$.

$$g \cap \varepsilon = \{S\},\ S(-1|3|-2)$$

Beispiel: *Schneiden Sie g:* $\begin{matrix} 3x+10y+9z=50 \\ 5x-9y+z=-10 \end{matrix}$ *mit der Ebene* $2x+3y+4z=-1$.

$$IV = 5 \cdot I - 3 \cdot II\text{: } 77y+42z=280$$
$$V = 2 \cdot I - 3 \cdot III\text{: } 11y+6z=103$$
$$IV - 7 \cdot V\text{: } 0=-441$$
$$g \cap \varepsilon = \{\ \}$$

Beispiel: *Schneiden Sie g:* $\begin{matrix} 8x+9y+8z=-15 \\ 3x+3y+2z=-7 \end{matrix}$ *mit der Ebene* $2x+3y+4z=-1$.

$$IV = 3 \cdot I - 8 \cdot II\text{: } 3y+8z=11$$
$$V = I - 4 \cdot II\text{: } -3y--8z=-11$$
$$IV + V\text{: } 0=0$$
$$g \cap \varepsilon = \{g\}$$

(d) Abstand Punkt - Gerade/Ebene

Der kürzeste Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g in der Ebene bzw. von einer Ebene ε im Raum ist der Normalabstand d. Mit der Orthogonalitätsbedingung läßt sich damit dieser Abstand d berechnen.

Normalabstand:	$\vec{n}_0$ Einheitsnormalvektor	$d_Q = \lvert\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{q})\rvert$

In der Koordinatenschreibweise bedeutet dies:

Normalabstand von g: $d_Q = \left|\dfrac{n_x \cdot q_x + n_y \cdot q_y + c}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\right|$, von ε: $d_Q = \left|\dfrac{n_x \cdot q_x + n_y \cdot q_y + n_z \cdot q_z + d}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}\right|$

Den Normalvektor kann man aufgrund der Definition der Normalvektorform der Geraden und der Ebene direkt aus der Gleichung ablesen.

Normalvektor von g: $ax + by + c = 0,\ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ von ε: $ax + by + cz + d = 0,\ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q(2|4) von g: $3x - 4y = 5$.*

$$d_Q = \left|\frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{-15}{5}\right| = 3$$

Analog erhält man den Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g im Raum mit Hilfe des vektoriellen Produkts.

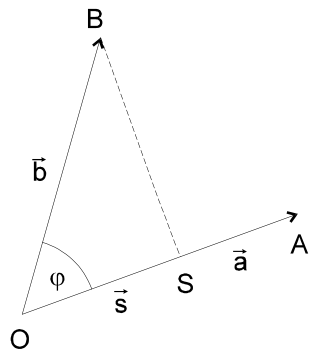
Normalabstand Punkt - Gerade im Raum	$d_Q = \lvert(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{a}_0\rvert$

Hierbei wird wieder der Einheitsrichtungsvektor der Geraden für das vektorielle Produkt verwendet.

***Beispiel**: Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q(-1|3|-2) von* g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$d_Q = \left| \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-3 \\ 1+2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{13} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{13} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ -13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10}$$

(e) Winkel zwischen Geraden



Im nebenstehenden rechtwinkligen Dreieck OSB gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OB}} = \frac{|\vec{s}|}{|\vec{b}|}$

Nach dem skalaren Produkt gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{s}|$ und $|\vec{s}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

Daraus folgt: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Diese Formel ist auch im Raum gültig, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen.

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

***Beispiel**: Berechnen Sie den Winkel zwischen* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{-14+30}{\sqrt{85} \cdot \sqrt{29}} = 0{,}3223; \ \varphi = 71{,}2^\circ$$

Für zwei Geraden mit den Anstiegen k_1 und k_2 gilt für die Berechnung des Winkels:

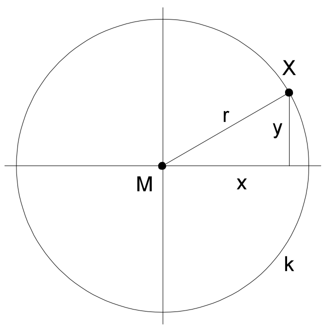
Winkel zwischen zwei Geraden mit k_1 und k_2: $\tan(\varphi) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

7.4. Analytische Behandlung der Kegelschnitte

Im folgenden Abschnitt sollen die sogenannten Kegelschnitte rechnerisch behandelt werden. Als Kegelschnitte werden jene geometrischen Figuren bezeichnet, die beim Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen. Man kann zwischen sieben Kegelschnitten unterscheiden, nämlich Punkt, Gerade, Dreieck, Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Die ersten drei, Punkt, Gerade und Dreieck, wurden in den bisherigen Abschnitten ausführlich behandelt; im folgenden beschränken wir uns auf die krummlinigen Kegelschnitte.

(a) Kreis



Ein Kreis k ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem Punkt M, (Mittelpunkt) den gleichen Abstand r (Radius) haben: $k = \left\{ X \in \varepsilon \mid \overline{XM} = r \right\}$

Die Koordinaten eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, bilden mit dem Radius ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der pythagoräische Lehrsatz gilt.

Gleichung des Kreises mit M(0|0)	$k\colon x^2 + y^2 = r^2$

Ist der Mittelpunkt M(u|v) aus dem Ursprung verschoben, so gilt die obige Formel, wenn man die Koordinaten des Mittelpunkts jeweils von den Koordinaten des Punktes X(x|y) abzieht.

Gleichung des Kreises mit M(u|v)	$k\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

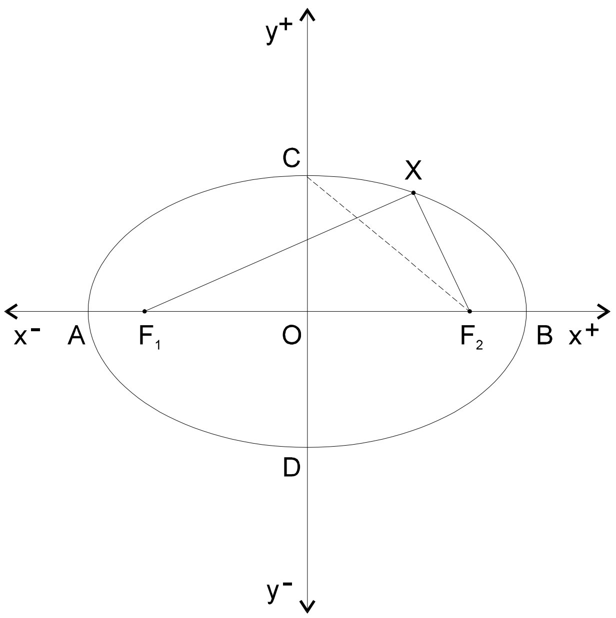
Von den möglichen Lagen einer Geraden zum Kreis (Passante, Tangente, Sekante) ist nur für die Tangente eine allgemeine Gleichung interessant.

Gleichung der Tangente in $T(x_1 \mid y_1)$	$t\colon (x_1-u)(x-u) + (y_1-v)(y-v) = r^2$

Es läßt sich jedoch für eine Gerade eine sogenannte Berührbedingung herleiten, die Auskunft über die Lage einer Geraden g zu einem Kreis k gibt.

Berührbedingung für g: $y = kx + d$ und k: $M(u\|v),r$	$(u \cdot k - v + d)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)$

(b) Ellipse



Die Ellipse ist die Menge aller Punkte X der Ebene, für die die Summe der Abstände l_1 und l_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2, den Brennpunkten, konstant 2a ist.

Ellipse: $$ell = \left\{X \in \varepsilon \mid \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a\right\}$$

Die Punkte A und B sind die Hauptscheitel, C und D sind die Nebenscheitel. F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, die Strecken OF_1 und OF_2 sind die Brennweite e (lineare Exzentrität). Die Strecke AB ist die Hauptachse mit der Länge 2a, CD ist die Nebenachse mit der Länge 2b.

Es gelten folgende Zusammenhänge: $a^2 = b^2 + e^2$

Gleichung der Ellipse:	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Die Lage der obigen Ellipse bezeichnet man als Ellipse in 1. Hauptlage. Eine Ellipse in 2. Hauptlage ist um 90 Grad gedreht. Dieser Abschnitt beschäftigt sich nur mit Ellipsen in 1. Hauptlage.

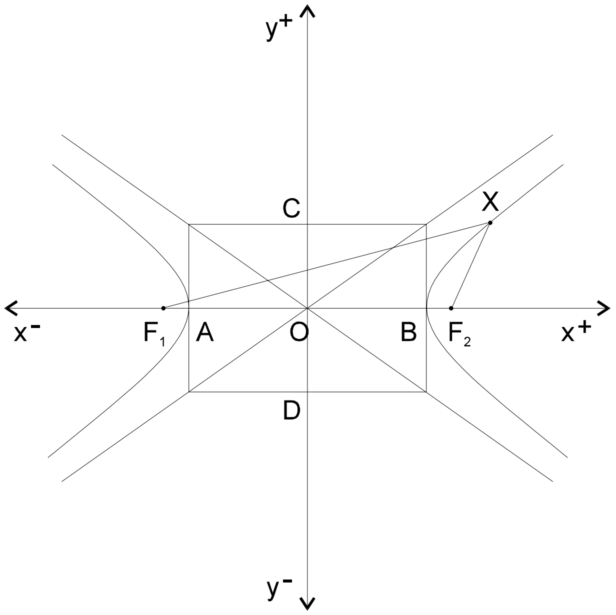
Fläche der Ellipse:	$A = a \cdot b \cdot \pi$

Auch bei der Ellipse betrachten wir die Tangentengleichung und die Berührbedingung.

Tangentengleichung im Punkt $T(x_1\|y_1)$	$t\colon b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$

Berührbedingung für $g\colon y = kx + d$ und ell: a, b	$a^2k^2 + b^2 = d^2$

(c) Hyperbel



Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte X der Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände l_1 und l_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2, den Brennpunkten, konstant 2a ist.

Hyperbel: $\text{hyp} = \left\{X \in \varepsilon \,\middle|\, \left|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}\right| = 2a\right\}$

Die Punkte A und B sind die Hauptscheitel, C und D sind die Nebenscheitel. F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, die Strecken OF_1 und OF_2 sind die Brennweite e (lineare Exzentrität). Die Strecke AB ist die Hauptachse mit der Länge 2a, CD ist die Nebenachse mit der Länge 2b.

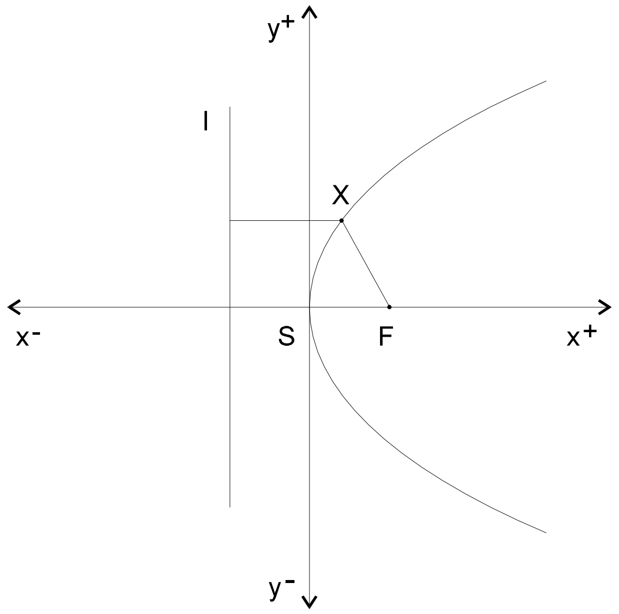
Es gelten folgende Zusammenhänge: $e^2 = a^2 + b^2$

Gleichung der Hyperbel:	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Die Lage der obigen Hyperbel bezeichnet man als Hyperbel in 1. Hauptlage. Eine Hyperbel in 2. Hauptlage ist um 90 Grad gedreht. Dieser Abschnitt beschäftigt sich nur mit Hyperbeln in 1. Hauptlage.

Tangentengleichung im Punkt $T(x_1\|y_1)$	$t\colon b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$
Berührbedingung für $g\colon y = kx + d$ und hyp: a, b	$a^2k^2 - b^2 = d^2$

(d) Parabel



Die Parabel ist die Menge aller Punkte X der Ebene, die von einer festen Linie l, der Leitlinie, und einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, gleichen Abstand haben.

Parabel: $\text{par} = \left\{ X \in \varepsilon \mid \overline{Xl} = \overline{XF} \right\}$

Den Punkt S(0|0) bezeichnet man als Scheitel, F als Brennpunkt. Der Abstand zwischen der Leitlinie l und dem Brennpunkt ist der Parameter p. Die Strecke OF ist die Brennweite e, die Gerade g(S,F) ist die Parabelachse.

Gleichung der Parabel in 1. Hauptlage	$y^2 = 2px$

Tangentengleichung im Punkt $T(x_1 \mid y_1)$	t: $y_1 y = p(x_1 + x)$
Berührbedingung für g: $y = kx + d$ und par: p	$p = 2kd$

Die Parabel in 2. Hauptlage soll aufgrund des häufigen Auftretens diesmal auch angeführt werden.

Gleichung der Parabel in 2. Hauptlage	$x^2 = 2py$

Betrachtet man zwei Kegelschnitte, so ist der folgende Begriff von Bedeutung.

Zwei Kegelschnitte heißen **konfokal**, wenn sie gemeinsame Brennpunkte haben.

Anhang: Übungsbeispiele zum 7. Kapitel

7/1 Stellen Sie die Vektoren zwischen folgenden Punkten auf:

a) A(3|2), B(7|4)

b) C(–1|3), D(1|3)

c) E(–4|–7), F(2|–3)

d) G(2|–1|0), H(–3|2|11)

7/2 Berechnen Sie die Länge der Vektoren aus Beispiel 7/1.

7/3 Bilden Sie die Summe und die Differenz der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) P(1|2|3), Q(3|–2|1), R(2|1|–3)

d) P(–1|3|6|2), Q(7|3|2|–5), R(0|6|–3|–1)

7/4 Bestimmen Sie das Vierfache sowie ein Drittel der Vektoren aus Beispiel 7/3.

7/5 Bstimmen Sie graphisch den Summen- und den Differenzvektor der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7/6 Berechnen Sie die Einheitsvektoren der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7/7 Stellen Sie die folgenden Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren dar:

a) P(1|5), Q(4|–3)

b) R(2|–6), S(9|9)

c) T(4|–4|4), U(7|8|0)

d) V(11|13|17), W(–19|–23|–29)

7/8 Überprüfen Sie, ob folgende Vektoren linear abhängig sind:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j}$

c) $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

d) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

7/9 Der Vektor $\vec{s} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ soll in Richtung der folgenden Vektoren zerlegt werden:

a) $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

b) $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

d) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

7/10 Berechnen Sie das skalare Produkt der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

7/11 Versuchen Sie eine Formel zur Berechnung des Projektionsvektors aufzustellen. Führen Sie dies praktisch anhand der Vektoren aus Beispiel 7/10 durch.

7/12 Versuchen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren aufzustellen.

7/13 Berechnen Sie das vektorielle Produkt der folgenden Vektoren:

a) P(1|2|3), Q(3|–2|1), R(2|1|–3)

b) U(7|8|0), V(11|13|17), W(–19|–23|–29)

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

7/14 Zeigen Sie anhand der Vektoren aus Beispiel 7/13, daß das vektorielle Produkt zweier Vektoren auf diese Vektoren normal steht.

7/15 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch folgende Vektoren aufgespannt wird:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

7/16 Stellen Sie die Normalvektoren zu folgenden Vektoren auf:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7/17 Erstellen Sie die Geradengleichung durch die folgenden Punkte:

a) P(1|5), Q(4|–3)

b) R(2|–6), S(9|9)

c) T(4|–4|4), U(7|8|0)

d) V(11|13|17), W(–19|–23|–29)

7/18 Gegeben ist das Viereck A(–3|0), B(4|–1), C(3|3) und D(–1|4). Stellen Sie die Gleichungen der Trägergeraden der Seiten und der Diagonalen auf.

7/19 Stellen Sie fest, ob die folgenden Punkte auf einer Geraden liegen:

a) A(2|3), B(10|7), C(–6|–1)

b) A(3|4|–2), B(–1|–3|5), C(–5|–10|11)

7/20 Machen Sie die folgenden Geraden parameterfrei:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

7/21 Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der folgenden Geraden:

a) g: $7x - 5y = 3$

b) g: $3x + 4y = 5$

c) g: $y + 3 = 0$

d) g: $x - 5 = 0$

e) g: $(3x - y - 8z = 3) \cap (2x + 5y + 6z = 2)$

7/22 Schneiden Sie die folgenden Geraden:

a) $g[A(-1|2), B(2|3)]$, $h[C(4|-5), D(5|4)]$

b) $g[A(5|1), B(1|-3)]$, $h[C(1|-1), D(3|-4)]$

c) $g[A(2|-15|10), B(3|-21|16)]$, $h[C(9|-1|-4), B(14|-3|-5)]$

d) $g[A(1|3|-12), B(3|3|2)]$, $h[C(5|-1|-11), B(-1|7|-1)]$

7/23 Stellen Sie die Gleichungen der Ebenen durch die folgenden Punkte auf:

a) P(1|2|3), Q(3|–2|1), R(2|1|–3)

b) U(7|8|0), V(11|13|17), W(–19|–23|–29)

c) A(3|4|–2), B(–1|–3|5), C(–5|–10|11)

7/24 Machen Sie die Ebenen aus Beispiel 7/23 parameterfrei.

7/25 Schneiden Sie die folgenden Ebenen:

a) $\varepsilon_1: x - 6y - 8z = -3,\ \varepsilon_2: x + 4y - 5z = -1$

b) $\varepsilon_1: 3x + y + 2z = -3,\ \varepsilon_2: 2x + 3y - z = -2$

c) $\varepsilon_1: 3x - 2y + 4z = 11,\ \varepsilon_2: 2x - y - 3z = -9,\ \varepsilon_3: -x + 3y + 2z = 11$

d) $\varepsilon_1: 2x - 4y + 5z = 10,\ \varepsilon_2: -2x - 22y + 21z = 16,\ \varepsilon_3: 4x + 5y - 3z = 7$

e) $\varepsilon_1: 2x + 3y - z = 3,\ \varepsilon_2: 2y + 5z = 2,\ \varepsilon_3: 6x + 5y - 13z = 10$

7/26 Bestimmen Sie den Abstand der Punkte von der Geraden g[A(–4|8),B(2|0)]:

a) P(5|6), Q(1|–7)

b) R(–6|–1), S(8|–3)

7/27 Berechnen Sie die Längen der Höhen im Dreieck A(–4|6), B(5|–6) und C(7|8).

7/28 Ermitteln Sie den Normalabstand der beiden parallelen Geraden $g: 3x - 4y + 8 = 0$ und $h: 3x - 4y - 5 = 0$.

7/29 Berechnen Sie den Abstand der Punkte von der Geraden g[A(4|–3|1),B(3|4|2)]:

a) P(–3|–1|7), Q(4|4|–2)

b) R(1|–2|4), S(–4|–2|–2)

7/30 Berechnen Sie den Winkel zwischen folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

7/31 Stellen Sie die Gleichung der folgenden Kreise auf:

a) k: M(0|0), r = 2

b) k: M(7|1), r = 5

c) k: M(0|2), r = 10

d) k: M(–1|0), r = 1

7/32 Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Radius folgender Kreise:

a) k: $x^2 + 2x + y^2 + 14y + 1 = 0$

b) k: $x^2 - 8x + y^2 - 2y - 149 = 0$

7/33 Schneiden Sie folgende Kreise und Geraden:

a) k: $x^2 + 2x + y^2 + 14y + 1 = 0$, g: $x + 2y = -1$

b) k: $x^2 - 8x + y^2 - 2y - 149 = 0$, g[A(0|–3),B(4|–3)]

7/34 Stellen Sie in den Schnittpunkten aus Beispiel 7/33 die Tangenten an den Kreis auf.

7/35 Errichten Sie vom Punkt P aus die Tangenten an die folgenden Kreise:

a) k: $x^2 + y^2 = 10$, P(6|8)

b) k: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$, P(8|6)

7/36 Stellen Sie die Gleichungen der Ellipsen auf:

a) a = 10, b = 5

b) b = 8, e = 6

c) a = 5, e = 3

d) P(3,6|4), Q(–4,8|3)

7/37 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Geraden und der Ellipsen:

a) ell: $4x^2 + 25y^2 = 100$, g: $2x + 3y = 50$

b) ell: $9x^2 + 4y^2 = 36$, g: $4x + 5y = 20$

7/38 Errichten Sie vom Punkt P aus die Tangenten an die folgenden Ellipsen:

a) ell: $x^2 + 2y^2 = 54$, P(18|–9)

b) ell: $2x^2 + 3y^2 = 210$, P(15|5)

7/39 Stellen Sie die Gleichungen der Hyperbeln auf:

a) a = 10, b = 5

b) b = 25, e = 38

c) a = 30, e = 42

d) P(4|–3), Q(6|6)

7/40 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Geraden und der Hyperbeln:

a) hyp: $x^2 - 2y^2 = 7$, g: $x - y = -2$

b) hyp: $x^2 - y^2 = 15$, g: $3x - y = 10$

7/41 Errichten Sie vom Punkt P aus die Tangenten an die folgenden Hyperbeln:

a) hyp: $4x^2 - 3y^2 = 96$, P(8|8)

b) hyp: $3x^2 - y^2 = 39$, P(2|1,5)

7/42 Stellen Sie die Gleichungen der Parabeln in 1. und 2. Hauptlage auf:

a) p = 2

b) P(2|2), Q(3|–4)

7/43 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Geraden und der Parabeln:

a) par: $y^2 = 4x$, g: $2x - 5y = -12$

b) par: $4y^2 = x$, g: $x - 2y = 6$

7/44 Errichten Sie vom Punkt P aus die Tangenten an die folgenden Parabeln:

a) par: $y^2 = 3x$, P(–6|–1,5)

b) par: $y^2 = -4x$, P(2|–1)