6. TRIGONOMETRIE

Die Trigonometrie (griech. Dreiecksmessung) beschäftigt sich mit der Berechnung ebener Dreiecke unter Einbeziehung der Zusammenhänge zwischen den Seitenlängen und den Winkeln. Grundlage aller Berechnungen ist das rechtwinklige Dreieck, da alle anderen Dreiecke durch die Höhen in rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden können.

6.1. Winkelmessung

(a) Gradmaß (Altgrad)

Die Verwendung vom Gradmaß zur Winkelmessung ist die älteste Methode der Winkelmessung. Ein Vollkreis wird in 360 gleiche Teile unterteilt, jeder Teil wird ein Grad (1°) genannt. Jedes Grad kann in 60 Minuten (1° = 60'), jede Minute in 60 Sekunden (1' = 60'') unterteilt werden. Diese Teilung wird sexagesimale Teilung genannt.

Gradmaß:	Vollwinkel 360 Grad	1° = 60' und 1' = 60''

In der Praxis wird meist mit Dezimalgraden gerechnet. Zur Umrechnung in Dezimalgrade werden zuerst die Sekunden durch 60 dividiert, dann die Minuten zugezählt, wieder durch 60 dividiert und letztendlich die Grade addiert.

Beispiel: *Rechnen Sie 23° 15' 33'' in Dezimalgrade um.*

$$\left[\left(33:60+15\right):60+23\right]=23{,}259167^\circ$$

Die Umrechnung in die sexagesimale Darstellung erfolgt entsprechend umgekehrt.

Beispiel: *Rechnen Sie 34,78956° sexagesimal um.*

$$\left(34{,}78956-34\right)\cdot 60=47{,}3736$$

$$\left(47{,}3736-47\right)\cdot 60=22{,}416$$

$$34{,}78956=34^\circ 47' 22{,}42''$$

(b) Neugrad

Bei der Einteilung in Neugrad wird ein Vollwinkel in 400 gleiche Teile geteilt; ein Teil wird ein Gon (1^g) genannt. Ein Gon kann weiter in 100 Neuminuten ($1^g = 100^c$), eine Neuminute wiederum in 100 Neusekunden ($1^c = 100^{cc}$) unterteilt werden. Diese Teilung wird auch zentesimale Teilung genannt und im Vermessungswesen verwendet.

Neugrad:	Vollwinkel 400 gon	$1^g = 100^c$ und $1^c = 100^{cc}$

Zur Umrechnung vom Gradmaß in Neugrad und umgekehrt braucht man nur die Vollwinkel zu vergleichen.

$360° = 400^g$	$1° \cong 1{,}1111^g = 11^g\ 11^c\ 11^{cc}$	$1^g = 0{,}9° = 54'$

(c) Bogenmaß

Die Maßzahl eines Winkels im Bogenmaß ist das Verhältnis der Bogenlänge, die der Winkel aus einem beliebigen Kreis (um seinen Scheitel als Mittelpunkt) ausschneidet, zur Länge des Radius. Wählt man zweckmäßigerweise den Einheitskreis (r = 1), so ist die Länge des Bogens die Maßzahl für die Größe des Winkels. Man bezeichnet den Bogen eines beliebigen Winkels α mit arc α (lat. arcus, der Bogen). Es gilt:

$\text{arc}\ 360° = 2\pi$	$\text{arc}\ 1° = 0{,}0174533...$	$\text{arc}\,\alpha = \frac{2\pi\alpha}{360}$

Als Maßeinheit für den Winkel im Bogenmaß ist ein Radiant (1 rad) festgelegt. Dies entspricht folgendem Winkel im Gradmaß:

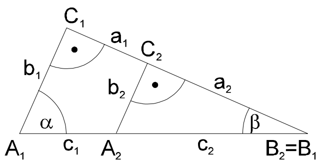
$\text{arc}\,\alpha = \frac{2\pi\alpha}{360}$	$\frac{2\pi\alpha}{360} = 1\ \text{rad}$	$\alpha = 57{,}29578°$

Da das Bogenmaß als einziges Winkelmaß keine künstliche Teilung ist, sondern direkt aus den auftretenden Längen abgeleitet werden kann, ist es in der Mathematik von besonderer Bedeutung.

6.2. Winkelfunktionen

(a) Definition

Durch Angabe zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ist nach dem Pythagoräischem Lehrsatz auch die dritte Seite eindeutig bestimmt. Sind aber alle Seiten bekannt, so sind auch alle Winkel bestimmt. Zwei rechtwinklige Dreiecke, die auch in ihren spitzen Winkeln übereinstimmen, sind ähnliche Dreiecke. Nach dem Strahlensatz ist das Verhältnis entsprechender Seiten in solchen Dreiecken dasselbe. Ändert sich einer der spitzen Winkel, so ändert sich auch das Verhältnis. Man kann also das Verhältnis der Seiten zueinander als Funktion des Winkels ansehen.



Im nebenstehenden Dreieck gilt: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Nach Umformung erhält man folgende drei Verhältnisse:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2},\ \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2},\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Ändert man nun den Winkel α, so ändern sich die Seitenlängen und damit die oben angeführten Verhältnisse. Man bezeichnet diese Verhältnisse daher als Winkelfunktionen Sinus (sin), Kosinus (cos) und Tangens (tan) eines Winkels.

Im rechtwinkligen Dreieck sind die Winkelfunktionen als Verhältnisse der Seiten definiert:

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ Kosinus: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

Aufgrund dieser Definition sind die Winkelfunktionen vorerst auf die Funktionswerte $\alpha \in]0°;90°[$ beschränkt.

Um Mißverständnisse bei anderer Beschriftung zu vermeiden, ist es zweckmäßig, eine Verallgemeinerung der obigen Schreibweise einzuführen. Bezeichnet man die Kathete im rechtwinkligen Dreieck, die einem Winkel gegenüber liegt, als Gegenkathete und die Seite, die am Winkel anliegt, als Ankathete, so lassen sich die Winkelfunktionen folgendermaßen formulieren:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Durch diese Schreibweise ist nun möglich, auch für den zweiten spitzen Winkel β die Winkelfunktionen anzuschreiben:

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Vergleicht man dies mit dem Ergebnis für den Winkel α, so kann man Zusammenhänge feststellen:

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \cos(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\beta)} = \cot(\beta)$$

Den Kehrwert der Tangensfunktion bezeichnet man als Kotangensfunktion (cot). Bezieht man zusätzlich noch ein, daß $\beta = 90° - \alpha$ gilt, lassen sich diese Zusammenhänge folgendermaßen anschreiben:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha) \qquad \tan(\alpha) = \cot(90 - \alpha)}$$

Zusätzlich läßt sich die Tangensfunktion auch über die Sinus- und Cosinusfunktion darstellen:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \ \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

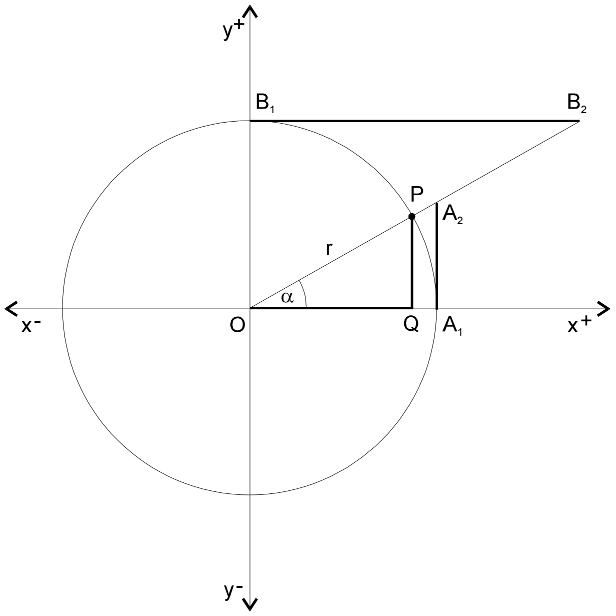
Formt man weiters den Satz des Pythagoras durch Division durch c^2 um, ergibt sich eine weitere bedeutende Beziehung zwischen den Winkelfunktionen:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2 \qquad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \qquad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Die Schreibweise $\sin^2(\alpha)$ steht für $[\sin(\alpha)]^2$. Durch diese Beziehungen läßt sich jede Winkelfunktion durch jede beliebige andere ausdrücken.

(b) Darstellung am Einheitskreis

Zeichnet man einen Punkt im Koordinatensystem ein und verbindet man den Punkt mit dem Ursprung, so erhält man eine Strecke, die einen Winkel mit der x-Achse einschließt. Eine Änderung des Winkels entspricht nun einer Drehung der Strecke um den Ursprung. Auf diese Weise beschreibt der Punkt eine Kreisbahn. In dem von der Abszisse x, der Ordinate y und dem Abstand r des Punktes vom Ursprung (dem Radius des Kreises) gebildeten rechtwinkligen Dreieck OQP gelten folgende Beziehungen:



Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{y}{r}$

Kosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{r}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x}$

Wählt man r = 1, so erhält man den sogenannten Einheitskreis. Die obigen Ausdrücke stellen sich dann vereinfacht dar:

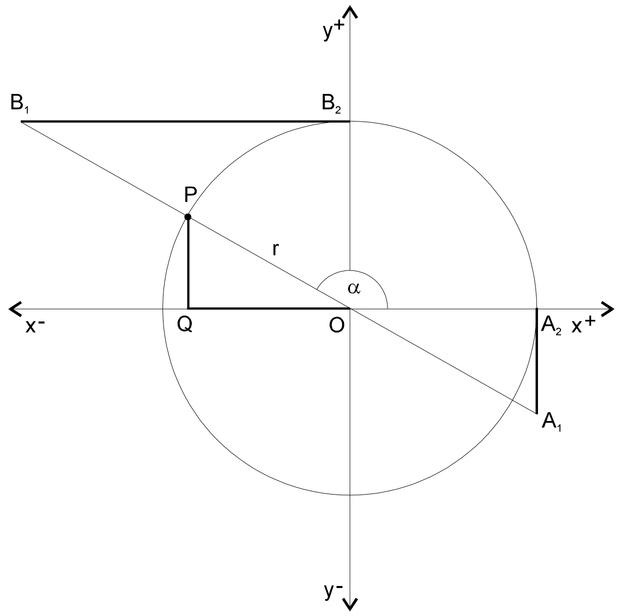
$$\sin(\alpha) = y\,,\ \cos(\alpha) = x$$

Betrachtet man weiters die beiden ähnlichen Dreiecke OQP und OA_1A_2 und wendet den Strahlensatz an, so ergibt sich:

$\overline{OQ} : \overline{OA_1} = \overline{QP} : \overline{A_1A_2}$ $\qquad \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{QP} \cdot \overline{OA_1}}{\overline{OQ}}$ und für $\overline{OA_1} = r = 1$ $\qquad \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x} = \tan(\alpha)$

Ebenso kann man für B_1B_2 verfahren und erhält: $\overline{B_1B_2} = \cot(\alpha)$

Es lassen sich also die Werte für die Winkelfunktionen am Einheitskreis direkt ablesen. Die Ermittelung dieser Werte war früher nur mittels Tabellen für diverse Winkel möglich, die modernere Mathematik stellt Formeln für die Berechnung der Winkelfunktionen zur Verfügung (unendliche Reihen, siehe Kapitel Exponentialfunktion). Auch der Taschenrechner arbeitet nach diesen Formeln, weswegen die Berechnung der Funktionswerte zuweilen etwas länger dauert.



Die Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis ermöglicht eine Ausweitung des Bereichs für den Winkel α. Berücksichtigt man die Vorzeichen der Abszissenwerte x und Ordinatenwerte y, so kann die Strecke OP einen Vollkreis beschreiben und die bisherigen Definitionen für die Winkelfunktionen behalten Gültigkeit. Der positive Winkel wird dabei immer gegen die Uhrzeigerrichtung gemessen. Negative Winkel werden daher im Uhrzeigersinn gemessen und sind durch die Ergänzung auf 360°, den Vollwinkel, auch posiv als positiver Winkel anschreibbar.

Somit ergeben sich aber aufgrund der Vorzeichen der Werte von x und y auch Vorzeichen für die Winkelfunktionen abhängig von der Winkelgröße.

	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin(\alpha)$	+	+	–	–
$\cos(\alpha)$	+	–	–	+
$\tan(\alpha)$	+	–	+	–

Für die Sonderfälle $\alpha = 0° = 360°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ und $\alpha = 270°$ sind aufgrund des Nenners (=0) nicht alle Winkelfunktionen immer definiert.

	0°= 360°	90°	180°	270°
$\sin(\alpha)$	0	+1	0	–1
$\cos(\alpha)$	+1	0	–1	0
$\tan(\alpha)$	0	nicht definiert	0	nicht definiert

(c) Periodizität der Winkelfunktionen

Interpretiert man einen Winkel größer als 360° als komplette Umdrehungen am Einheitskreis und einem Restwinkel, so kann man auch für diese Winkel die Funktionswerte für die Winkelfunktionen bilden. Somit wiederholen sich die Funktionswerte für unterschiedliche Winkel immer wieder; man sagt, die trigonometrischen Funktionen sind periodisch.

Für die Sinus- und die Kosinusfunktion wiederholen sich die Funktionswerte immer nach weiteren 360°.

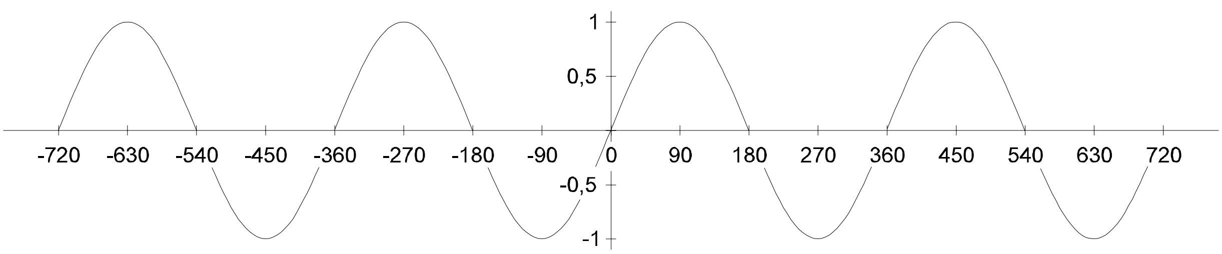
$$\boxed{\sin(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \cos(\alpha) \qquad \text{für } n \in Z}$$

Für die Tangens- und die Kotangensfunktion ist die Periode 180°, da sich bei Änderung des Winkels um 180° beide Vorzeichen von x und y ändern und so der Funktionswert nach der Verhältnisberechnung derselbe ist.

$$\boxed{\tan(\alpha + n\cdot 180^\circ) = \tan(\alpha) \qquad \cot(\alpha + n\cdot 180^\circ) = \cot(\alpha) \qquad \text{für } n \in Z}$$

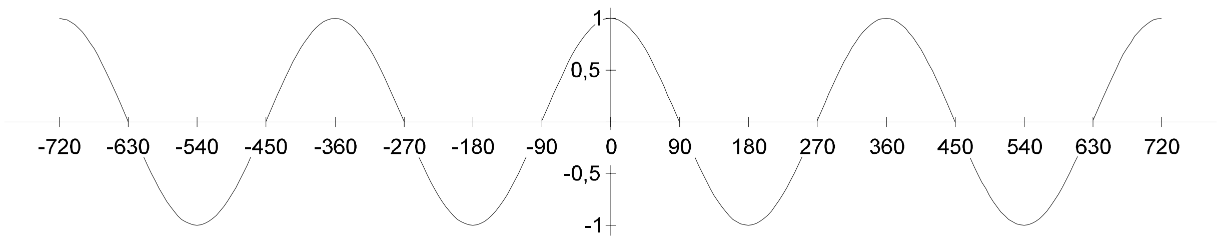
Die Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion sehen daher folgendermaßen aus:

Sinusfunktion $y = \sin(x)$:



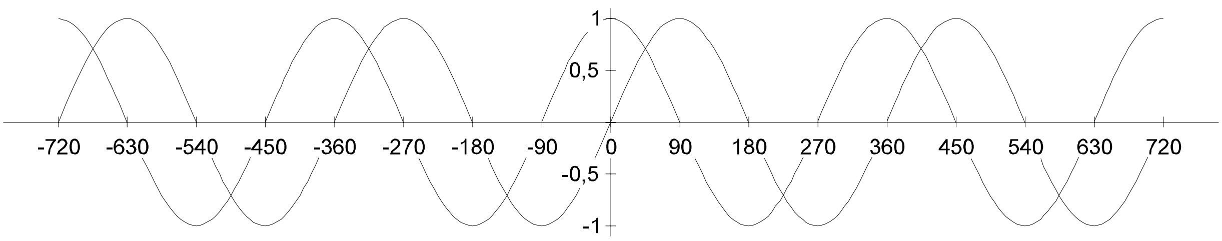
In der Graphik ist auf der waagrechten Achse der Wert des Winkels, auf der senkrechten Achse der Funktionswert der Sinusfunktion des jeweiligen Winkels aufgetragen. Das Kurvenstück zwischen α = 0° und α = 360° wiederholt sich im Graphen der Funktion periodisch.

Kosinusfunktion $y = \cos(x)$:

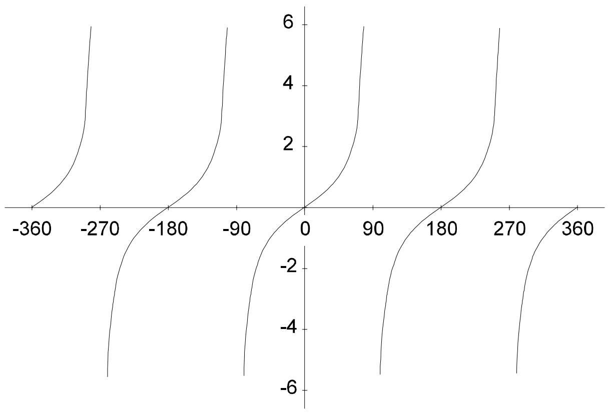


Legt man beide Funktionen in ein Koordinatensystem, so kann man feststellen, daß die Kurvenformen ident sind, jedoch um 90° zueinander verschoben. Man spricht auch von einer Phasenverschiebung um 90°.

Sinusfunktion und Kosinusfunktion:



Tangensfunktion $y = \tan(x)$:



Das Kurvenstück zwischen α = 90° und α = 270° wiederholt sich im Graphen der Funktion periodisch. Bei α = 90° und periodisch alle 180° hat die Funktion eine Sprungstelle. Aufgrund der Division durch Null ist dort der Funktionswert nicht definiert.

(d) Beziehungen zwischen Winkelfunktionen

Umrechnung in andere Winkelfunktionen

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\sin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
$\cos(\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$\tan(\alpha)$

Zurückführung auf Funktionswerte spitzer Winkel

	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin(\alpha)$	$\sin(180°-\alpha)$	$-\sin(\alpha-180°)$	$-\sin(360°-\alpha)$
$\cos(\alpha)$	$-\cos(180°-\alpha)$	$-\cos(\alpha-180°)$	$\cos(360°-\alpha)$
$\tan(\alpha)$	$-\tan(180°-\alpha)$	$\tan(\alpha-180°)$	$-\tan(360°-\alpha)$

Unterscheidung um Vielfache von 90°

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$90° \pm \alpha$	$+\cos(\alpha)$	$\mp\sin(\alpha)$	$\mp\cot(\alpha)$
$180° \pm \alpha$	$\mp\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\pm\tan(\alpha)$
$270° \pm \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$\pm\sin(\alpha)$	$\mp\cot(\alpha)$
$360° \pm \alpha$	$\pm\sin(\alpha)$	$+\cos(\alpha)$	$\pm\tan(\alpha)$

Periodizität

$k \in Z$	$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$	$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$	$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 180°)$

Funktionswerte negativer Winkel

	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Summensätze

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

Ermittlung des Winkels

Ist der Funktionswert einer Winkelfunktion bekannt und soll der zugehörige Winkel ermittelt werden, so benötigt man die Umkehrfunktion zur jeweiligen Winkelfunktion. Diese Umkehrfunktionen werden Arkusfunktionen genannt und heißen entsprechend Arkussinus (arcsin), Arkuskosinus (arccos), Arkustangens (arctan) und Arkuskotangens (arccot). Aufgrund der Periodizität sowie der anderen oben genannten Zusammenhänge ist das Ergebnis nicht eindeutig. Schließlich gibt es unendlich viele Winkel, die denselben Funktionswert liefern.

Der Taschenrechner bietet ebenfalls die Möglichkeit zur Berechnung des Winkels bei bekanntem Funktionwert - meist durch die Tasten „2nd“, „INV“ oder $(\ )^{-1}$. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß der Taschenrechner nur einen Winkel als Ergebnis liefert, nämlich immer den spitzen Winkel ($-90° \leq \alpha \leq +90°$).

6.3. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Durch die bisherigen Definitionen sind alle Mittel gegeben, um rechtwinklige Dreiecke vollständig berechnen zu können. Wir können hierbei zwischen folgenden fünf Grundaufgaben unterscheiden.

Grundaufgabe I: Gegeben sind die beiden Katheten a und b.

Lösung: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$, $\beta = 90° - \alpha$

Grundaufgabe II: Gegeben sind die Hypotenuse c und eine Kathete a.

Lösung: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$, $\beta = 90° - \alpha$

Grundaufgabe III: Gegeben sind ein Winkel α und seine Gegenkathete a.

Lösung: $\beta = 90° - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin(\alpha)}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Grundaufgabe IV: Gegeben sind ein Winkel α und seine Ankathete b.

Lösung: $\beta = 90° - \alpha$, $c = \frac{b}{\cos(\alpha)}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Grundaufgabe V: Gegeben sind ein Winkel α und die Hypotenuse c.

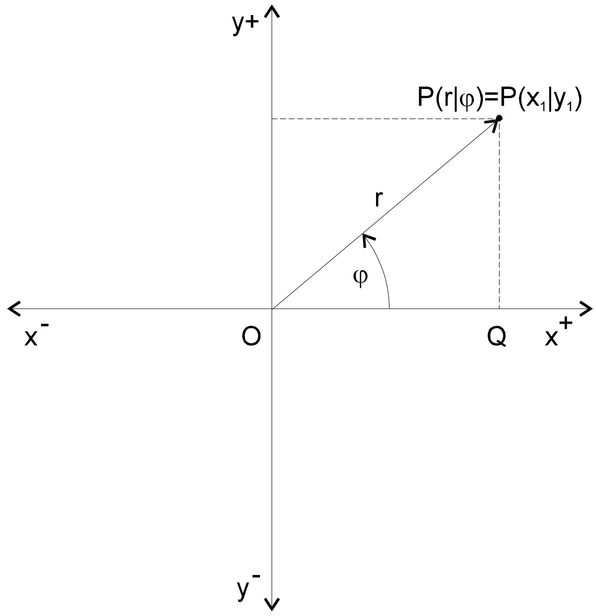
Lösung: $\beta = 90° - \alpha$, $a = c \cdot \sin(\alpha)$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

In den oben genannten Grundaufgaben können natürlich der Winkel α und die jeweilige Kathete gegen den anderen Winkel und die andere Kathete ausgetauscht werden.

Aus Gründen der Genauigkeit sind zur Berechnung der fehlenden Bestimmungsstücke nach Möglichkeit nur die gegebenen Bestimmungsstücke zu verwenden. Wird dennoch mit errechneten Werten weiter gerechnet, so sind diese Werte ungerundet zu verwenden und erst am Ende aller Berechnungen ist zu runden.

6.4. Polarkoordinaten

Bereits im Abschnitt über komplexe Zahlen wurde die Möglichkeit angedeutet, einen Punkt im Koordinatensystem nicht durch seinen Abstand zu den beiden Achsen, sondern durch den Abstand von Ursprung r und den Winkel φ zwischen der Strecke OP und der x-Achse zu beschreiben. Die trigonometrischen Funktionen stellen die Mittel zur Berechnung dieser Koordinaten zur Verfügung.



Betrachtet man das rechtwinkelige Dreieck OQP, dann gelten folgende Zusammenhänge:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y_1}{x_1} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

Weiters gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{x_1}{r} \qquad x_1 = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y_1}{r} \qquad y_1 = r \cdot \sin(\varphi)$$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

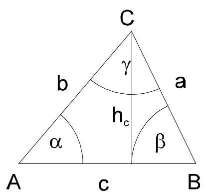
Polarkoordinaten P(r | φ)	$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

Kartesische Koordinaten P(x_1 | y_1)	$x_1 = r \cdot \cos(\varphi)$	$y_1 = r \cdot \sin(\varphi)$

6.5. Berechnung des allgemeinen Dreiecks

(a) Sinussatz



Zeichnet man im allgemeinen Dreieck die Höhen auf die Seite c ein, so teilt diese Höhe das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Dann ergibt sich:

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$ und $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$ $\qquad$ $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$ und $h_c = a \cdot \sin(\beta)$

Es gilt also: $h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$

Verfährt man ebenso mit den anderen Höhen, so folgt:

$$h_b = c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma)$$

$$h_a = b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta)$$

Die rechten Seiten kann man als Proportionen anschreiben:

$$\begin{aligned} a : \sin(\alpha) &= b : \sin(\beta) \\ b : \sin(\beta) &= c : \sin(\gamma) \\ c : \sin(\gamma) &= a : \sin(\alpha) \end{aligned}$$

bzw. nach weiterer Umformung

$$\begin{aligned} a : b &= \sin(\alpha) : \sin(\beta) \\ b : c &= \sin(\beta) : \sin(\gamma) \\ c : a &= \sin(\gamma) : \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Dies läßt sich aber auch als fortlaufende Proportion anschreiben: $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$

Sinussatz: Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel: $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$

Die folgende Schreibweise hat sich für die praktische Berechnung als zweckmäßig erwiesen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

und daher die drei Gleichungen

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

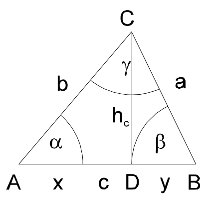
$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

Um ein allgemeines Dreieck bestimmen zu können sind also zumindest drei Bestimmungsstücke notwendig. Ist in einem allgemeinen Dreieck eine Seite und ihr gegenüberliegender Winkel bekannt, so läßt sich unabhängig vom dritten Bestimmungsstück das Dreieck auf jeden Fall mit dem Sinussatz vollständig berechnen.

(b) Kosinussatz

Die durch den Fußpunkt D der Höhe h_c gebildeten Abschnitte der Seite c sollen AD = x und DB = y heißen. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich dann:



$a^2 = h_c^2 + y^2$ und $b^2 = h_c^2 + x^2$ und daraus $h_c^2 = b^2 - x^2$

also weiters $a^2 = b^2 - x^2 + y^2$

und wegen $y = c - x$ folgt $a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Im Dreieck ADC gilt zusätzlich $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$ und daher $x = b \cdot \cos(\alpha)$

Damit ergibt sich letztendlich $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

Berechnet man entsprechend für die anderen Seiten b und c, so erhält man:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Kosinussatz: Das Quadrat über der Länge einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seitenlängen und dem Kosinuswert des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Sind zwei Seiten und ihr eingeschlossener Winkel bekannt, so läßt sich mit dem Kosinussatz eine weitere Seite bestimmen. Im speziellen ist es nur mit dem Kosinussatz möglich, bei drei bekannten Seitenlängen einen Winkel des Dreiecks zu bestimmen.

Für den Sonderfall γ = 90° liefert der Sinussatz die bereits bekannten Regeln für rechtwinklige Dreiecke, der Kosinussatz führt zum berühmten pythagoräischen Lehrsatz.

(c) Grundaufgaben für allgemeine Dreiecke

Man kann prinzipiell zwischen drei Grundaufgaben unterscheiden, abhängig von den gegebenen Bestimmungsstücken.

Grundaufgabe I: Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel
Grundaufgabe II: Gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel
Grundaufgabe III: Gegeben sind drei Seiten (SSS)

Aufgabe I und II können jedoch noch in jeweils zwei Unterfälle geteilt werden:

Grundaufgabe Ia: Gegeben sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (WSW)
Grundaufgabe Ib: Gegeben sind eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel (SWW)
Grundaufgabe IIa: Gegeben sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel (SSW)
Grundaufgabe IIb: Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS)

***Beispiel** Grundaufgabe Ia (WSW):* $\alpha = 22{,}62°;\ c = 53;\ \beta = 30{,}51°$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 126{,}87$$

Sinussatz: $$b = \frac{c \cdot sin(\beta)}{sin(\gamma)} = 33{,}63\ ;\ a = \frac{c \cdot sin(\alpha)}{sin(\gamma)} = 25{,}48$$

***Beispiel** Grundaufgabe Ib (SWW):* $c = 39{,}12;\ \alpha = 14{,}25°;\ \gamma = 143{,}13°$

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 22{,}62$$

Sinussatz: $$a = \frac{c \cdot sin(\alpha)}{sin(\gamma)} = 16{,}05\ ;\ b = \frac{c \cdot sin(\beta)}{sin(\gamma)} = 25{,}08$$

Diese beiden Fälle sind aufgrund der Berechnung des dritten Winkel über die Winkelsumme stets eindeutig.

Sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, so kann es bei diesem Fall vorkommen, daß sich zwei Lösungen ergeben, da der zweite gegenüberliegende Winkel stumpf sein kann. Prinzipiell gilt, daß ein stumpfer Winkel immer der längsten Seite im Dreieck gegenüberliegt. Mehrdeutig kann die Lösung also nur dann sein, wenn der gegenüberliegende Winkel zur kürzeren Seite gegeben ist.

Zur Ermittlung der beiden Lösungen für den zweiten gegenüberliegenden Winkel nutzt man folgende Beziehung der Sinusfunktion: $\sin(\alpha) = \sin(180°-\alpha)$ und daher $\alpha_2 = 180°-\alpha_1$

Der dritte Winkel errechnet sich dann als Ergänzung auf die Winkelsumme 180°.

***Beispiel** Grundaufgabe IIa (SSW):* $a = 195;\ b = 280;\ \alpha = 36{,}9°$

Sinussatz: $$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = 0{,}862$$

α liegt der kürzeren Seite gegenüber, daher $$\beta_1 = 59{,}56;\ \beta_2 = 180 - \beta_1 = 120{,}44$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta);\ \gamma_1 = 83{,}54;\ \gamma_2 = 22{,}66$$

$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)};\ c_1 = 322{,}71;\ c_2 = 125{,}11$$

***Beispiel** Grundaufgabe IIb (SWS):* $a = 14{,}3;\ \gamma = 82{,}11°;\ b = 26$

Kosinussatz: $$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)} = 27{,}9$$

Sinussatz: $$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c};\ \alpha = 30{,}51$$

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 67{,}38$$

Auch in diesem Fall könnte es scheinbar zu zwei Lösungen aufgrund der Mehrdeutigkeit der Umkehrfunktion (hier arcsin) kommen. Dies läßt sich jedoch vermeiden, wenn man mit dem Sinussatz zuerst jenen fehlenden Winkel berechnet, der der kleineren Seite gegenüberliegt; dieser Winkel muß nämlich ein spitzer Winkel sein.

***Beispiel** Grundaufgabe III (SSS):* $a = 145;\ b = 296;\ c = 325$

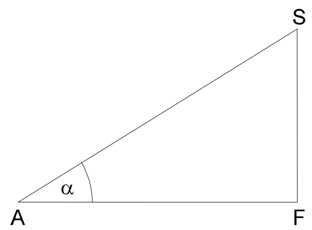
Kosinussatz: $$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \alpha = 26{,}48$$

Sinussatz: $$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a};\ \beta = 65{,}53$$

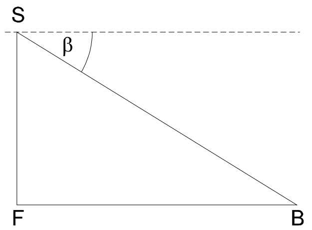
$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 87{,}99$$

(d) Begriffe für Vermessungsaufgaben

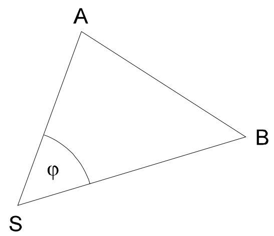
Trigonometrische Berechnungen finden unter anderem im Vermessungswesen ihre Anwendung. Die auftretenden Winkel haben in diesem Zusammenhang unterschiedliche Bezeichnungen, abhängig davon, wo sie gemessen werden. Im folgenden werden die wichtigsten Bezeichnungen erklärt.



Höhenwinkel:
Blickt man von einem Punkt A zu einem Punkt S hinauf, so bezeichnet man den Winkel zwischen AS und der Horizontalen durch A als Höhenwinkel (α).



Tiefenwinkel:
Blickt man von einem Punkt S zu einem Punkt B hinunter, so bezeichnet man den Winkel zwischen SB und der Horizontalen durch S als Tiefenwinkel (β).



Sehwinkel:
Den Winkel, unter dem man eine Strecke AB von einem Punkt S aus sieht, bezeichnet man als Sehwinkel (φ).

Wird ein Winkel in horizontaler Richtung gemessen, so bezeichnet man ihn als **Horizontalwinkel**. Die Schenkel des Winkels liegen also in einer horizontalen Ebene.

Wird ein Winkel in vertikaler Richtung gemessen, so bezeichnet man ihn als **Vertikalwinkel**. Die Schenkel des Winkels liegen also in einer vertikalen Ebene.

Anhang: Übungsbeispiele zum 6. Kapitel

6/1 Geben Sie folgende Winkel jeweils in sexagesimaler Teilung, Dezimalgraden, Neugraden und im Bogenmaß an:

a) $43°12'14''$

b) $38{,}1962°$

c) 21,4419 gon

d) $\frac{\pi}{12}$ rad

6/2 Berechnen Sie aus der Angabe die Funktionswerte für die fehlenden anderen Winkelfunktionen:

a) $\sin(\alpha) = 0{,}8$

b) $\cos(\beta) = -\frac{12}{13}$

c) $\tan(\delta) = \sqrt{6}$

d) $\cot(\varepsilon) = 1{,}05$

6/3 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

b) $\frac{\cot(\mu)}{\cos(180 - \mu)}$

c) $\cos(\lambda) \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\lambda)}$

d) $1 - \frac{\sin(\nu)}{1 + \cot^2(\nu)}$

e) $[\sin(\sigma)\cos(\sigma)][\tan(\sigma) + \cot(\sigma)]$

f) $\frac{\tan(\tau)\cot(\tau) - \sin^2(\tau)}{\cos^2(\tau) - \tan(\tau)\cot(\tau)}$

6/4 Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke der folgenden rechtwinkligen Dreiecke:

a) $a = 32{,}25\,m$ $b = 27{,}11\,m$

b) $a = 19{,}12\,cm$ $c = 53{,}34\,cm$

c) $a = 29{,}6\,cm$ $\alpha = 36{,}5°$

d) $b = 25{,}4\,m$ $\alpha = 67{,}6°$

e) $c = 31{,}29\,km$ $\alpha = 48{,}12°$

6/5 Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke der folgenden gleichschenkligen Dreiecke:

a) $a = 8{,}3$ $c = 4{,}5$

b) $a = 196{,}3$ $\alpha = 47{,}32°$

c) $c = 16{,}8$ $h_c = 9{,}7$

d) $h_a = 12{,}3$ $\alpha = 50{,}7°$

e) $b = 39$ $\gamma = 40{,}4°$

6/6 Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke der folgenden Figuren:

a) Trapez: $a = 47$; $b = 37$; $\alpha = 67°$; $\beta = 18{,}5°$

b) Rhombus: $a = 178$; $e = 320$

c) Rechteck: $d = 265$; $\omega = 63{,}25°$

d) Deltoid: $a = 52{,}6$; $e = 83{,}7$; $\alpha = 124{,}2°$

6/7 Der Fuß einer 3 m langen Leiter, die gegen eine Wand gelehnt ist, ist von der Wand 0,5 m entfernt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein?

6/8 Der Wiener Rathausturm wirft auf den vor ihm liegenden Platz einen 136,6 m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen schließen zu diesem Zeitpunkt mit dem Boden einen Winkel von 36,27° ein. Wie hoch ist der Rathausturm?

6/9 Ein Beobachter sieht die Spitze eines Turmes in der Entfernung b = 45 m unter einem doppelt so großen Winkel wie in einer Entfernung a = 120 m. Berechnen Sie die Höhe des Turmes!

6/10 Jemand legt auf einer Straße 7 km zurück und überwindet dabei eine Höhendifferenz von 1350 m. Berechnen Sie den Neigungswinkel dieser Straße.

6/11 Berechnen Sie die Längen der Hypothenusenabschnitte p,q und der Höhe h sowie alle Winkel im rechtwinkeligen Dreieck mit c = 5 und a = 3.

6/12 Wie weit muß ein Zug bergauf fahren, um 150 m Höhe zu gewinnen, wenn das Gleis mit der Horizontalen einen Winkel von 5,2 Grad einschließt?

6/13 Unter welchen Winkeln schneiden einander die Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen a = 10 und b = 5 ?

6/14 Berechnen Sie den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Würfelfläche bzw. mit einer Würfelkante einschließt.

6/15 Berechnen Sie die Polarkoordinaten der folgenden kartesischen Punkte :

a) A(1|2)

b) B(–3|4)

c) C(–2|–5)

d) D(7|–6)

6/16 Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der folgenden Polarpunkte:

a) A(3|60°)

b) B(4,5|122°)

c) C(0,3|194°)

d) D(5,1|329°)

6/17 Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke der folgenden allgemeinen Dreiecke:

a) $a = 56{,}2$	$b = 39{,}1$	$\alpha = 121°$
b) $a = 158{,}88$	$\alpha = 52{,}29°$	$\beta = 79{,}12°$
c) $b = 75{,}73$	$c = 51{,}86$	$\beta = 112{,}82°$
d) $b = 48{,}54$	$\alpha = 23{,}42°$	$\beta = 79{,}12°$
e) $a = 205$	$b = 252{,}76$	$c = 189{,}68$

6/18 Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke der folgenden allgemeinen Dreiecke:

a) $a = 193{,}86$	$b = 142{,}33$	$\gamma = 39°$
b) $a = 200{,}67$	$c = 205{,}98$	$\beta = 53{,}74°$
c) $b = 57{,}63$	$c = 37{,}26$	$\alpha = 48{,}19°$
d) $a = 32{,}12$	$b = 13{,}17$	$c = 39{,}37$
e) $c = 4$	$\alpha = 17°$	$\beta = 162°$

6/19 Um die Höhe eines Turmes mit dem Fußpunkt C und der Spitze D zu bestimmen, hat man auf dem waagrechten Platz vor dem Turm eine Standlinie AB mit der Länge c = 90 m abgesteckt. Man mißt die Winkel CAB = 81,72°, CBA = 46,77°und CAD = 47,83°. Wie hoch ist der Turm?

6/20 Von der Spitze eines Berges wurden die Tiefenwinkel α = 32° und β = 39° nach der Spitze und dem Fußpunkt eines Turmes von der Höhe h = 60m gemessen. Ermitteln Sie die Höhe des Berges.

6/21 Eine gerade Straße steigt unter einem Winkel von 15° an. Von einem Punkt A dieser Straße sieht man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel 27°, von dem 80 m näher beim Turm liegenden Punkt B unter dem Winkel 39°. Wie hoch ist der Turm?

6/22 An den beiden Enden eines waagrechten Platzes stehen zwei Gebäude. Von der 73 m hohen Spitze des größeren Gebäudes sieht man die Spitze des kleineren Gebäudes unter dem Tiefenwinkel 16,95º, den Fuß des kleineren Gebäudes unter dem Tiefenwinkel 29,70º. Wie hoch ist das kleinere Gebäude und wie weit sind die beiden von einander entfernt?

6/23 Der Antennenmast eines Fernsehturmes hat die Höhe h = 75m. Von einem Geländepunkt P (in der gleichen Höhe wie der Fußpunkt des Turmes) werden Spitze und Fußpunkt des Antennenmastes unter den Höhenwinkeln $\alpha = 24°$ und $\beta = 17°$ gesehen. Ermitteln Sie die Höhe des Fernsehturmes mit Antennenmast sowie die Entfernung des Punktes P vom Fußpunkt des Turmes.

6/24 Eine Rennstrecke führt durch die Punkte A,B,C und D. Man mißt $\overline{AB} = 2\,km$, $\overline{BC} = 7\,km$, $\overline{AD} = 5\,km$, $DAB = 30°$ und $ABC = 130°$. Wie weit sind C und D voneinander entfernt?

6/25 Ein Ballon B schwebt über einem See, in dem sein Spiegelbild B' gesehen wird. Wie groß ist seine Höhe über dem See, wenn er von einem Turm am Ufer des Sees mit der Höhe $h = 28{,}32$ m unter dem Höhenwinkel $\varepsilon = 55{,}27°$ und sein Spiegel-bild unter dem Tiefenwinkel $\delta = 58{,}14°$ zu sehen ist?

6/26 Ein Flugzeug startet mit einer Eigengeschwindigkeit von 350 km/h mit Kurs N24°O. Es weht ein Südwind mit 50 km/h. Berechnen Sie die wahre Geschwindigkeit des Flugzeugs.

6/27 Von der Spitze eines 62 m hohen Hügels sieht man den Geländepunkt A unter dem Tiefenwinkel 24,13° und nach Schwenken des Fernrohres um den Horizontalwinkel 76,23° den Geländepunkt B unter dem Tiefenwinkel 29,56°. Ermitteln Sie die Entfernung der beiden Geländepunkte.