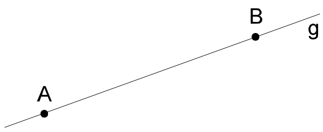
5. PLANIMETRIE, STEREOMETRIE

5.1. Planimetrie

Die Planimetrie oder auch ebene Geometrie beschäftigt sich mit den in einer Ebene liegenden geometrischen Figuren. Im folgenden Abschnitt sollen die wichtigsten Begriffe der ebenen Geometrie sowie die rechnerischen Zusammenhänge erklärt werden.

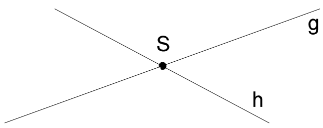
(a) Grundlagen

Alle geometrischen Gebilde kann man als Punktmengen auffassen. Punkte werden mit Großbuchstaben bezeichnet.

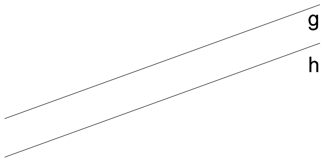


Gerade: Durch zwei verschiedene Punkte A, B gibt es genau eine Gerade g(A,B). Jede Gerade ist eine unendliche Punktmenge. Geraden werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

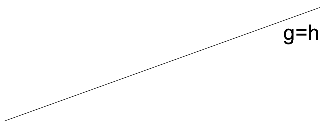
Gegenseitige Lage zweier Geraden



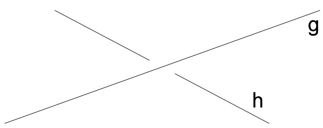
Zwei Geraden können einander in einem Punkt schneiden: $g \cap h = \{S\}$. Der Punkt S heißt **Schnittpunkt**.



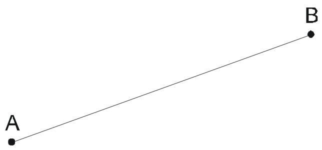
Zwei Geraden können zueinander **parallel** sein, sie sind disjunkt: $g \cap h = \{\ \}$, $g \parallel h$.



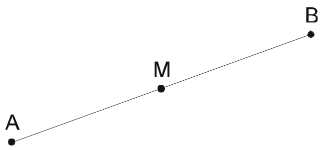
Zwei Geraden können **identisch** sein: $g \cap h = g$, $g = h$.



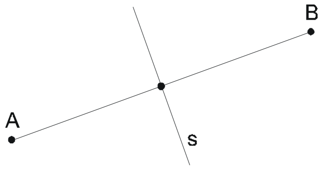
Zwei Geraden können **windschief** sein (nur im dreidimensionalen Raum): $g \cap h = \{\ \}$, $g \nparallel h$



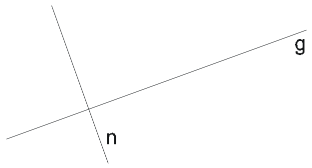
Strecke: Die Verbindung zweier Punkte A, B nennt man Strecke. Die Länge der Strecke bezeichnet man mit $\overline{AB}$.



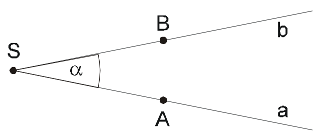
Mittelpunkt: Der Mittelpunkt einer Strecke AB ist jener Punkt, der auf der Strecke AB liegt und von A gleich weit entfernt ist wie von B.



Streckensymmetrale: Die Streckensymmetrale ist die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten A, B jeweils gleichen Abstand haben.

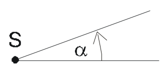


Senkrechte (Normale): Eine Senkrechte ist eine Gerade n, die eine Gerade g im rechten Winkel (90°) schneidet. Auch die Streckensymmetrale steht normal auf AB. Symbolisch: $n \perp g$

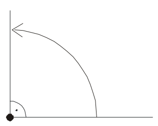


Winkel: Zwei Strecken SA und SB, die von einem gemeinsamen Punkt S ausgehen, schließen miteinander einen Winkel $\alpha = \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle ASB$ ein. Der Punkt S heißt Scheitel, die Strecken a, b nennt man Schenkel bzw. Strahlen (Halbgeraden). Winkel werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

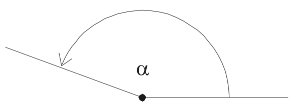
Es gibt folgende Winkelarten:



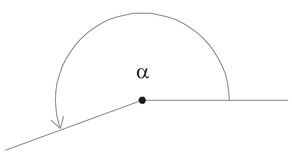
Spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$ Nullwinkel: $\alpha = 0°$



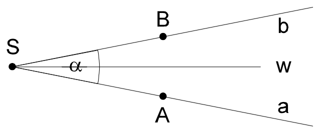
Rechter Winkel: $\alpha = 90°$



Stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$ Gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$

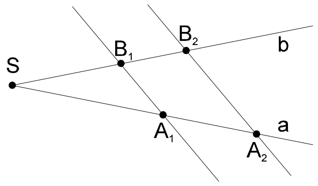


Überstumpfer Winkel: $180° < \alpha < 360°$ Vollwinkel: $\alpha = 360°$



Winkelsymmetrale: Die Winkelsymmetrale ist die Menge aller Punkte, die von zwei Geraden jeweils gleichen Abstand haben.

Strahlensatz - Teilung einer Strecke



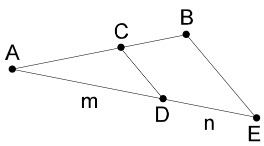
1. Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so sind die Verhältnisse entsprechender Strecken auf den Strahlen gleich.

Auf die Abbildung bezogen heißt das: $\overline{SA_1}:\overline{SA_2} = \overline{SB_1}:\overline{SB_2}$

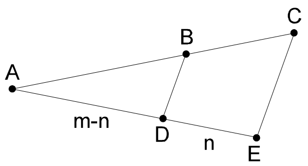
2. Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Paralleln wie die entsprechenden Strahlenabschnitte.

Auf die Abbildung bezogen heißt das: $\overline{SA_1}:\overline{SA_2} = \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}$

Diese zwei Sätze kann man nützen, wenn man eine Strecke in einem bestimmten Verhältnis teilen will.

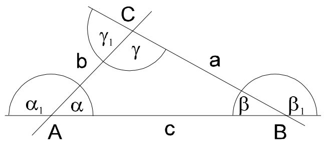


Innere Teilung: Eine Strecke AB ist im Verhältnis m : n innen zu teilen. Auf einem weiteren Strahl durch A werden von A aus m gleiche Strecken bis D und n weitere gleiche Strecken von D bis E abgetragen. Zieht man eine Parallele durch D zur Geraden BE, so schneidet diese Parallele die Strecke AB im Punkt C. Es gilt dann laut Strahlensatz $\overline{AC}:\overline{CB} = m:n$.



Äußere Teilung: Eine Strecke AB ist im Verhältnis m:n außen zu teilen. Auf einem weiteren Strahl durch A werden von A aus m–n gleiche Strecken bis D und n gleiche Strecken von D bis E abgetragen. Zieht man eine Parallele durch E zur Geraden BD, so schneidet diese Parallele die Verlängerung der Strecke AB im Punkt C. Es gilt dann laut Strahlensatz $\overline{AC}:\overline{BC} = m:n$.

(b) Dreiecke



Allgemeines Dreieck: Ein Dreieck entsteht im allgemeinen durch die Schnittpunkte dreier Geraden. Man bezeichnet α, β und γ als Innenwinkel und α_1, β_1 und γ_1 als Außenwinkel.

Die Summe der Innenwinkel beträgt 180°:	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Die Summe eines Innen- und eines Außenwinkels ist jeweils 180°: $\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = 180°$

Die Summe der Außenwinkel ist daher 360°: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$

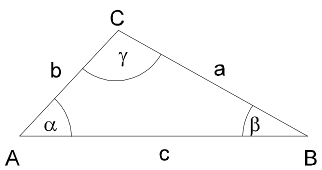
Ein Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma,\ \beta_1 = \alpha + \gamma,\ \gamma_1 = \alpha + \beta$$

Die Summe zweier Seiten ist immer größer als die dritte Seite (Dreiecksungleichung):		
$a + b > c$	$a + c > b$	$b + c > a$

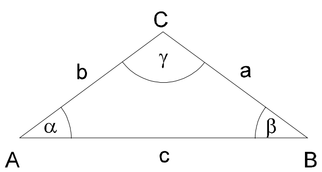
Der gößeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Man kann die Arten von Dreiecken nach der Länge der Seiten und nach der Größe der vorkommenden Winkel einteilen.



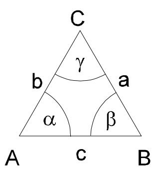
ungleichseitiges Dreieck: $a \neq b \neq c$

(allgemeines Dreieck) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$



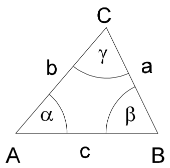
gleichschenkliges Dreieck: a, b ... Schenkel, c ... Basis

$a = b \neq c$, $\alpha = \beta \neq \gamma$

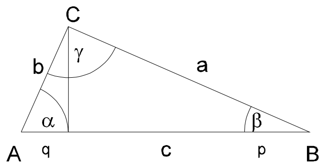


gleichseitiges Dreick: $a = b = c$

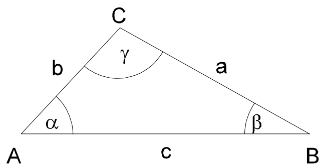
$\alpha = \beta = \gamma = 60°$



spitzwinkliges Dreieck: $\alpha < 90°, \beta < 90°, \gamma < 90°$



rechtwinkliges Dreieck: a, b ... Katheten, c ... Hypotenuse
p, q ... Hypotenusenabschnitte
$\alpha < 90°, \beta < 90°, \gamma = 90°$



stumpfwinkliges Dreieck: $\alpha < 90°, \beta < 90°, 90° < \gamma < 180°$

In allen angeführten Dreiecken gibt es folgende besondere Linien und Punkte:

Höhen, Höhenschnittpunkt: Die Linie, die normal auf eine Seite eines Dreiecks steht und durch den nicht auf dieser Seite liegenden Eckpunkt geht, nennt man die Höhe auf diese Seite (h_a, h_b, h_c). Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander im Höhenschnittpunkt H.

Seitensymmetrale, Umkreismittelpunkt: Errichtet man auf allen Seiten die Streckensymmetrale (Seitensymmetrale), so schneiden diese Symmetralen einander in einem Punkt. Da dieser Punkt aufgrund der Konstruktion von allen Eckpunkten gleiche Entfernung hat, ist dies der Umkreismittelpunkt U.

Schwerelinien, Schwerpunkt: Die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt einer Dreiecksseite und dem nicht auf dieser Seite liegenden Eckpunkt nennt man Schwerelinie. Die Schwerelinien schneiden einander im sogenannten Schwerpunkt S. Dieser Punkt teilt jede Schwerelinie im Verhältnis 2:1.

Winkelsymmetralen, Inkreismittelpunkt: Die Winkelsymmetralen zwischen jeweils zwei Schenkel eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Da dieser Punkt aufgrund der Konstruktion von allen Dreiecksseiten gleiche Entfernung hat, ist dies der Inkreismittelpunkt I.

Der Höhenschnittpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Schwerpunkt liegen in jedem Dreieck auf einer Geraden, der sogenannten **Eulerschen Geraden**. Der Schwerpunkt und der Inkreismittelpunkt liegen stets innerhalb des Dreiecks; der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt liegen beim spitzwinkligen Dreieck innerhalb, beim stumpfwinkligen Dreieck jedoch außerhalb des Dreiecks.

Dreiecksberechnungen

Satzgruppe des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse (**Pythagoräischer Lehrsatz**).

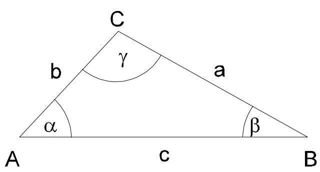
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über einer Kathete gleich dem Flächenihalt des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitts (**Kathetensatz**).

$$h^2 = p \cdot q$$

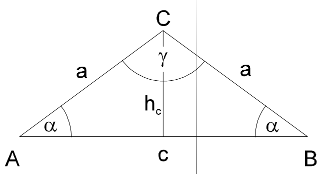
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten (**Höhensatz**).



Berechnung des ungleichseitigen Dreiecks:

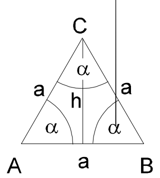
$$U = a + b + c\,,\ s = \frac{U}{2} = \frac{a+b+c}{2} \qquad A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Heronsche Flächenformel: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



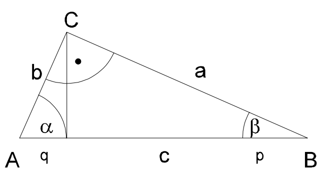
Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks:

$$U = 2a + c\,,\ h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \qquad A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$



Berechnung des gleichseitigen Dreiecks:

$$U = 3a\,,\ h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$



Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks:

$$U = a + b + c\,,\ c = p + q\,,\ h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2} \qquad A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$$

Ähnliche Dreiecke - Kongruente Dreiecke

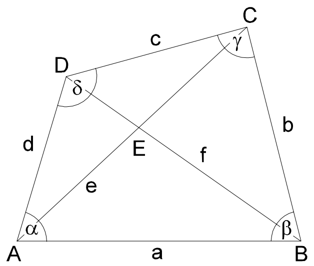
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie allen Winkeln übereinstimmen.

Ähnliche Dreiecke haben also gleiche Form, sie unterscheiden sich nur durch ihre Größe und Lage. Ähnliche Dreicke können also so zueinander zum Liegen gebracht werden, daß entsprechende Seiten zueinander parallel sind. Zwischen ähnlichen Dreiecken gilt daher der Strahlensatz.

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Bestimmungsstücken übereinstimmen.

Kongruente Dreiecke haben also die gleiche Form und Größe, sie unterscheiden sich nur durch ihre Lage.

(c) Vierecke

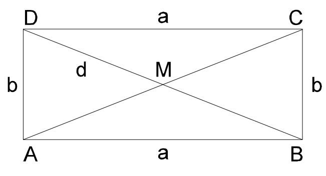


allgemeines Viereck:

Die Summe der Innenwinkel beträgt 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Jede Diagonale (e, f) teilt das Viereck in zwei Dreiecke.

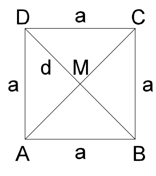
Einteilung und Berechnung der Vierecke



Rechteck: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$, $a \perp b$

$U = 2a + 2b = 2(a+b)$ $\quad A = a \cdot b$

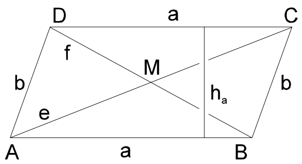
$d^2 = a^2 + b^2$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$



Quadrat: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$, $a \perp a$

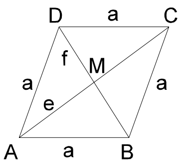
$U = 4a$ $\quad A = a \cdot a = a^2$

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ $\quad d = a \cdot \sqrt{2}$



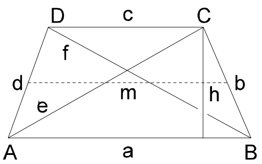
Parallelogramm: $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$

$U = 2a + 2b = 2(a + b)$ $\quad A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$



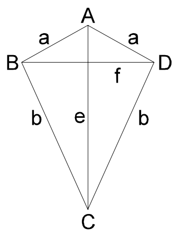
Rhombus (Raute): $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, $e \perp f$

$U = 4a$, $e^2 + f^2 = 4a^2$ $\quad A = \dfrac{e \cdot f}{2}$



Trapez: $a \parallel c$, $a \parallel m$

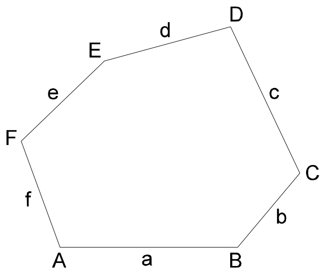
$U = a + b + c + d$, $m = \dfrac{a + c}{2}$ $\quad A = m \cdot h = \dfrac{(a + c) \cdot h}{2}$



Deltoid (Drachenviereck): $\alpha \neq \gamma$, $\beta = \delta$, $e \perp f$

$U = 2a + 2b = 2(a + b)$ $\quad A = \dfrac{e \cdot f}{2}$

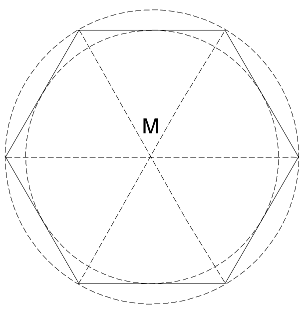
(d) Vielecke (Polygone)



Allgemeines Vieleck: n ... Anzahl der Seiten

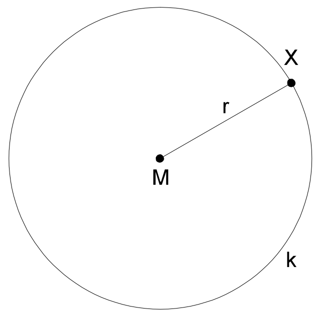
Es gibt $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$ Diagonalen; das Vieleck läßt sich durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen in (n – 2) Dreiecke zerlegen.

Die Summe der Innenwinkel beträgt $180° \cdot (n - 2)$.



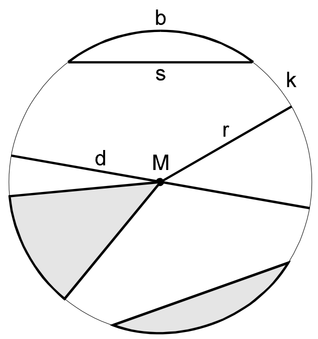
Regelmäßige Vielecke: Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind. Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umschreiben und ein Kreis einschreiben. Jeder Innenwinkel beträgt $180° \cdot \dfrac{(n - 2)}{2}$. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind regelmäßige Vielecke.

(e) Kreis, Kreisteile

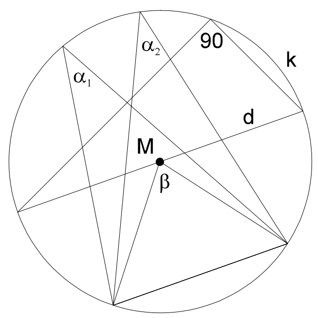


Ein Kreis k ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem Punkt M, (Mittelpunkt) den gleichen Abstand r (Radius) haben: $k = \left\{ X \in \varepsilon \mid \overline{XM} = r \right\}$

Die Verbindung zweier Punkte des Kreises durch eine Strecke bezeichnet man als Sehne s. Verläuft diese Sehne durch den Mittelpunkt M, so erhält man einen Durchmesser d des Kreises mit d = 2r. Die Verbindung zweier Punkte des Kreises entlang der Kreislinie bezeichnet man als Bogen.



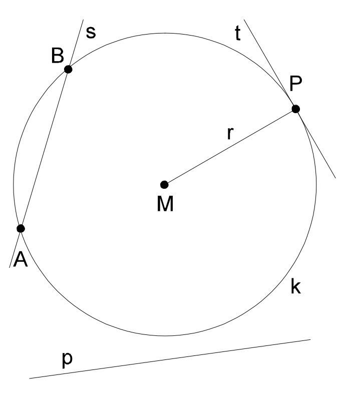
Die Fläche, die durch einen Bogen und zwei Radien des Kreises begrenzt wird, nennt man Sektor oder Kreisausschnitt; die Fläche, die durch einen Bogen und eine Sehne begrenzt wird, heißt Segment oder Kreisabschnitt.



Der Winkel, der zwischen den Radien eines Sekors gemessen wird, ist der sogenannte Zentriwinkel. Der Winkel, unter dem man eine Sehne (bzw. einen Bogen) von einem Punkt des Kreises sieht, ist der Peripheriewinkel. Peripheriewinkel, die zu derselben Sehne (demselben Bogen) gehören, sind gleich groß: $\alpha_1 = \alpha_2$. Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel: $\beta = 2\alpha$.

Satz von Thales

Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisdurchmesser beträgt 90°.



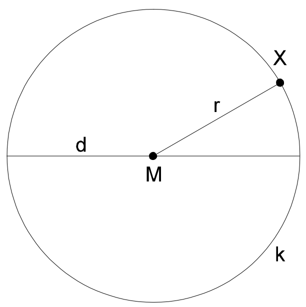
Kreis und Gerade

Passante: Die Passante hat mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam.

Tangente: Die Tangente hat mit dem Kreis einen Punkt P (Berührungspunkt) gemeinsam. Jede Tangente steht normal auf den Berührradius.

Sekante: Die Sekante schneidet den Kreis in zwei Punkten A, B ($A \neq B$).

Kreisberechnungen

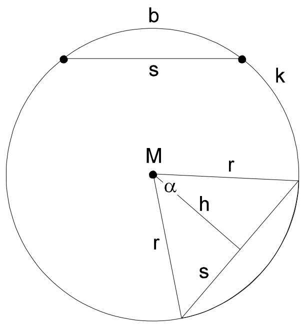


Kreis:

Das Verhältnis des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser ist konstant und beträgt π = 3,14159265359...

$U = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$

$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$



Kreisbogen:

$b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$

α ... Zentriwinkel im Gradmaß

Kreissektor:

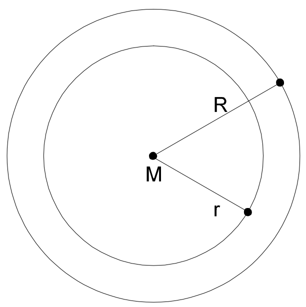
$U = 2r + b = 2r + \frac{r\pi\alpha}{180}$

$A = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$

Kreissegment:

$U = s + b,\ \ s = 2\sqrt{h(2r - h)}$

$A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{s \cdot h}{2}$



Kreisring:

R ... äußerer Radius

r ... innerer Radius

$U = 2 \cdot R\pi + 2 \cdot r\pi = 2\pi(R + r)$

$A = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$

5.2. Stereometrie

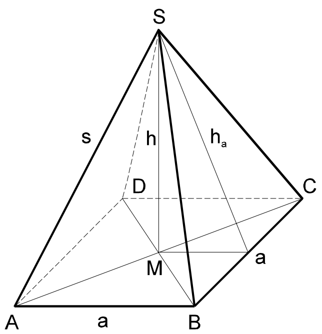
Stereometrie nennt man die elementare Geometrie des dreidimensionalen (reellen euklidischen) Raumes. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Körper und ihre Berechnung aufgeführt.

(a) Pyramiden

Eine Pyramide besitzt ein Polygon (n-Eck) als Grundfläche. Die Mantelfläche besteht aus n Dreiecken, welche in der Spitze S zusammenlaufen. Die Seiten der Grundfläche heißen Grundkanten, die Verbindungsstrecken zwischen Spitze und den Ecken der Grundfläche heißen Seitenkanten. Der Normalabstand zwischen Spitze und Grundfläche ist die Höhe h. Eine Pyramide heißt gerade, wenn der Fußpunkt der Höhe im Mittelpunkt der Grundfläche liegt, andernfalls ist sie schief. Eine regelmäßige Pyramide ist eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

Die Oberfläche einer Pyramide ist die Summe der Flächeninhalte der Grundfläche und der Mantelfläche: $O = G + M$

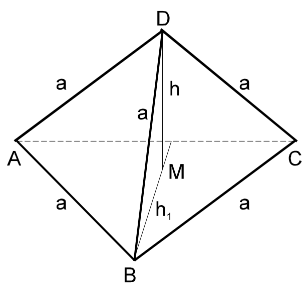
Für das Volumen einer Pyramide gilt immer die Formel: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Quadratische Pyramide: Die Grundfläche ist ein Quadrat.

$$h_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} \qquad s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h_a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$

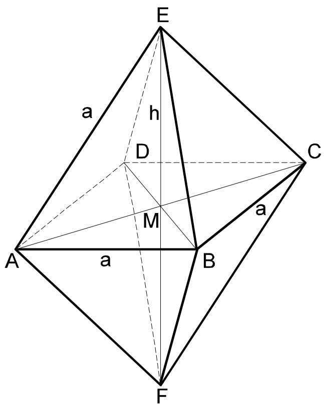
$$O = G + M = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = a^2 + 2ah_a \qquad V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$



Regelmäßiges Tetraeder:

$$h_1 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}, \ \overline{MC} = \frac{2}{3} \cdot h_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \qquad h = \sqrt{a^2 - \overline{MC}^2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

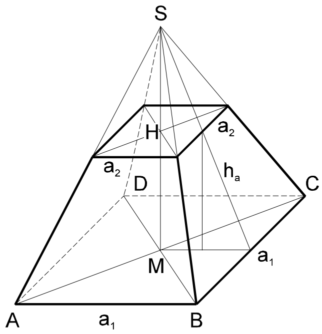
$$O = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3} \qquad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$



Regelmäßiges Oktaeder:

$$h = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \overline{EF} = 2h = a \cdot \sqrt{2}$$

$$O = 8 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \qquad V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$



Quadratischer Pyramidenstumpf:

$$\overline{MH} = h,\ h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} \qquad M = 2(a_1 + a_2) \cdot h$$

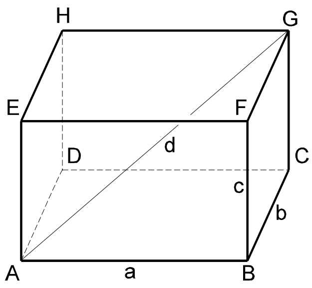
$$O = G_1 + G_2 + M = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 + a_2)h \qquad V = \frac{1}{3} \cdot (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \cdot h$$

(b) Prismen

Ein Prisma besitzt zwei in parallelen Ebenen gelegene kongruente n-Ecke als Grund- und Deckfläche. Die Mantelfläche besteht aus n Parallelogrammen. Gemeinsame Strecken von zwei Teilflächen heißen Kanten. Die Seitenkanten sind parallel und gleich lang. Gemeinsame Punkte von je drei Teilflächen heißen Ecken. Der Normalabstand zwischen Grund- und Deckfläche ist die Höhe h. Ein Prisma heißt gerade, wenn alle Seitenkanten zur Grundfläche normal stehen, andernfalls ist es schief. Ein regelmäßiges Prisma ist ein gerades Prisma, welches als Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck besitzt.

Die Oberfläche eines Prismas ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche, Deckfläche und Mantelfläche: $O = 2G + M$

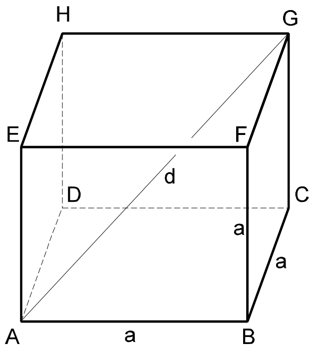
Für das Volumen eines Prismas gilt immer die Formel: $V = G \cdot h$



Quader:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$O = 2(ab + ac + bc)$ $\qquad V = a \cdot b \cdot c$



Würfel:

$d = a \cdot \sqrt{3}$

$O = 6 \cdot a^2$ $\qquad V = a^3$

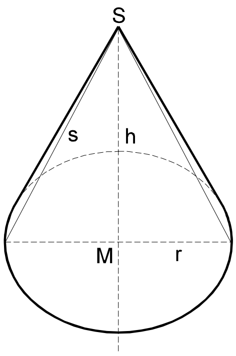
(c) Kegel

Ein Kegel besitzt einen Kreis als Grundfläche. Die Mantelfläche ist eine einfach gekrümmte Fläche, da sich die Kante eines Lineals nur in einer Richtung anlegen läßt, sodaß sie ganz in der Mantelfläche liegt. Das angelegte Lineal berührt die Mantelfläche längs einer Mantellinie, einer sogenannten Erzeugenden s. Die Mantellinien schneiden einander in der Spitze S des Kegels. Der Normalabstand zwischen Spitze und Grundfläche ist die Höhe h. Ein Kegel heißt gerade, wenn der Fußpunkt der Höhe im Mittelpunkt M der Grundfläche liegt, andernfalls ist er schief.

Die Oberfläche eines Kegels ist die Summe der Flächeninhalte der Grundfläche und Mantelfläche: $O = G + M$

Für das Volumen eines Kegels gilt die Formel: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Verbindung des Mittelpunkts der Grundfläche mit der Spitze ist die Drehachse eines geraden Drehkegels. Ein Achsenschnitt liefert als Schnittfläche ein gleichschenkliges Dreieck. Die eben aufgerollte Mantelfläche ergibt einen Kreisausschnitt (Sektor) mit der Erzeugenden s als Radius.



Drehkegel:

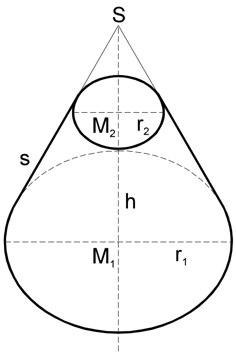
$s^2 = r^2 + h^2$ $\qquad M = r\pi s$

$O = G + M = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s)$ $\qquad V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi h$

Gleichseitiger Drehkegel: $\qquad s = 2r$

$h = r \cdot \sqrt{3}$ $\qquad M = 2r^2\pi$

$O = 3r^2\pi$ $\qquad V = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}$



Kegelstumpf:

$s^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2$ $\qquad M = (r_1 + r_2)\pi s$

$O = G_1 + G_2 + M = r_1^2\pi + r_2^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s$ $\qquad V = \frac{1}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h$

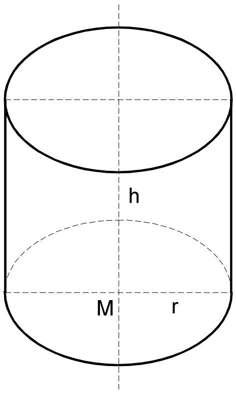
(d) Zylinder

Ein Zylinder besitzt zwei flächengleiche Kreise als Grund- und Deckfläche. Die Mantelfläche ist eine einfach gekrümmte Fläche, da sich die Kante eines Lineals nur in einer Richtung anlegen läßt, sodaß sie ganz in der Mantelfläche liegt. Das angelegte Lineal berührt die Mantelfläche längs einer Mantellinie, einer Erzeugenden s. Die eben aufgerollte Mantelfläche ist ein Rechteck. Der Normalabstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt Höhe h. Ein Zylinder heißt gerade, wenn alle Mantellinien zur Grundfläche normal stehen, andernfalls ist er schief.

Die Oberfläche eines Zylinders ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche, Deckfläche und Mantelfläche: $\qquad O = 2G + M$

Für das Volumen gilt die Formel: $\qquad V = G \cdot h$

Die Verbindung der Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche ist die Drehachse eines geraden Drehzylinders. Ein Achsenschnitt liefert als Schnittfläche ein Rechteck.

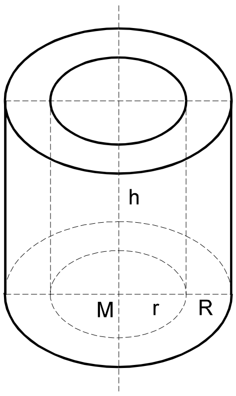


Drehzylinder:

$M = 2r\pi h,\ O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r+h)$ $\qquad V = r^2\pi h$

Gleichseitiger Zylinder: $\qquad h = 2r$

$M = 4r^2\pi,\ O = 6r^2\pi$ $\qquad V = 2r^3\pi$



Hohlzylinder:

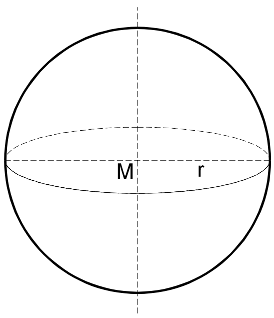
R ... äußerer Radius $\qquad$ r ... innerer Radius

$M = 2\pi(R+r)h$

$O = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi(R+r)h = 2\pi(R+r)(R-r+h)$ $\qquad V = \pi(R^2 - r^2)h$

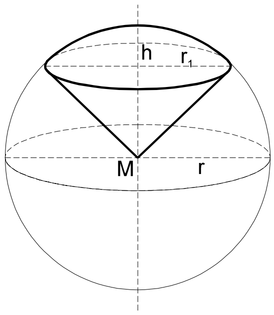
(e) Kugel, Kugelteile

Eine Kugel entsteht, wenn ein Kreis um einen seiner Durchmesser gedreht wird. Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom Kugelmittelpunkt M den gleichen Abstand r (Kugelradius). Die Kugeloberfläche ist doppelt gekrümmt; sie kann nicht wie ein Zylinder- oder Kegelmantel in einer Ebene ausgebreitet werden.



Kugel:

$O = 4r^2\pi = d^2\pi$ $\qquad V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}$



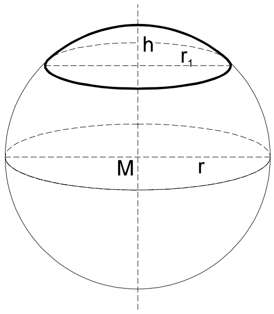
Kugelsektor (Kugelausschnitt): $r_1^2 = 2rh - h^2$

Kugelkappe: $A = 2r\pi h$

Kegelmantel: $M = r_1\pi r$

$O = A + M = 2r\pi h + r_1\pi r$

$V = \frac{2r^2\pi h}{3}$



Kugelsegment (Kugelabschnitt):

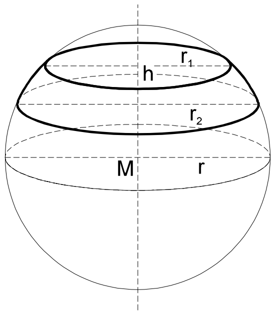
$r_1^2 = 2rh - h^2$

Kugelkappe: $A = 2r\pi h$

Grundfläche: $K = r_1^2\pi$

$O = A + K = 2r\pi h + r_1^2\pi$

$V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3} = \frac{\pi h(3r_1^2 + h^2)}{6}$

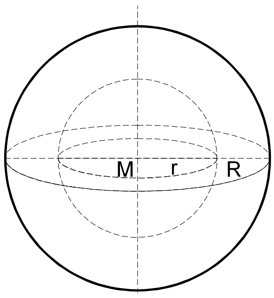


Kugelschicht und Kugelzone:

Kugelzone: $A = 2r\pi h$

$O = G_1 + G_2 + A = r_1^2\pi + r_2^2\pi + 2r\pi h$

$V = \frac{\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^3)}{6}$



Hohlkugel:

R ... äußerer Radius

r ... innerer Radius

$O = 4R^2\pi$

$V = \frac{4\pi(R^3 - r^3)}{3} = \frac{\pi(D^3 - d^3)}{6}$