4. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN, GLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES

4.1. Quadratische Gleichungen

(a) Definition

***Beispiel**:* *Das Produkt zweier aufeinanderfolgender gerader Zahlen beträgt 2808. Wie lauten die beiden Zahlen?*

$G = N_g$, 1. Zahl: x, 2. Zahl: x + 2

$$x \cdot (x+2) = 2808$$
$$x^2 + 2x - 2808 = 0$$

Dieses Beispiel führt zu einer Gleichung, in der die höchste Potenz der Variablen nicht wie bisher 1 ist, sondern 2. Man spricht von einer Gleichung zweiten Grades, einer quadratischen Gleichung.

Unter der Normalform einer quadratischen Gleichung in einer Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ mit p, q $\in$ R

Die Variable unterliegt also keinem linearen Zusammenhang, sondern es besteht eine quadratische Abhängigkeit.

(b) Lösungsformel für $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

Mit den bislang bekannten Methoden zum Gleichungslösen ist diese Gleichung nicht lösbar. Um zu einer Lösung zu gelangen formt man die Gleichung derart um, daß die linke Seite der Gleichung zu einem Quadrat eines Binoms - wie (a+b)² - ergänzt wird. Damit die neue Gleichung eine äquivalente zur ursprünglichen bleibt, muß diese Ergänzung auch auf der rechten Seite der Gleichung durchgeführt werden.

Diese Vorgangsweise bezeichnet man als **Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat**. Zieht man nun auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel, so erhält man eine Gleichung, in der die Variable linear vorkommt. Beim Wurzelziehen muß natürlich die Doppeldeutigkeit (z.B. $4^2 = (-4)^2$) beachtet werden.

Normalform der quadratischen Gleichung $$x^2 + px + q = 0$$

Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat $$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Binomschreibweise $$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Wurzelziehen (± wegen Doppeldeutigkeit) $$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lösungen $$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Schreibweise der Lösung zeigt bereits, daß es zwei Werte für x gibt, die die Gleichung erfüllen.

Lösungen $$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Oft werden die beiden Lösungen als x_1 und x_2 bezeichnet.

Lösungen $$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel:

$$x^2 + 2x - 2808 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-2808)}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 53$$

$$x_1 = -54, x_2 = 52$$

Wie man unschwer erkennen kann, hängen die Lösungen und sogar die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung selbst stark vom Wert unter der Wurzel ab. Der Ausdruck unter der Wurzel wird daher als die **Diskriminante** (Trennungsgröße) bezeichnet.

Diskriminante	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$

Wir können nun folgende Fälle unterscheiden:

Die Diskriminante ist größer als Null.	$D > 0$

Man erhält zwei reelle Lösungen: $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}, x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$

Die quadratische Gleichung wird durch zwei Werte x_1 und x_2 erfüllt.

Beispiel:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 5}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 2$$

$$x_1 = 1, x_2 = 5$$

Die Diskriminante ist gleich Null.	$D = 0$

Man erhält eine reelle Lösung: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$

Ist die Diskriminante gleich Null, so spricht man von einer Doppellösung, da $x_1 = x_2$.

Beispiel:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 25}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm 0$$

$$x_1 = x_2 = 5$$

Die Diskriminante ist kleiner als Null.	$D < 0$

Man erhält keine reelle Lösung: $L = \{\ \}$

Die linke Seite der Gleichung $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D$ ist für jedes $x \in R$ positiv, die rechte Seite ist negativ. Somit hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine Lösung.

Beispiel:

$$x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 8}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{23}{4}}$$

$$L = \{\ \}$$

Eine quadratische Gleichung	$x^2 + px + q = 0$	mit $p, q \in R$
und der Diskriminate	$D = \frac{p^2}{4} - q$	hat

zwei reelle Zahlen als Lösung, wenn $D > 0$
eine reelle Zahl als Lösung, wenn $D = 0$
keine reelle Zahl als Lösung, wenn $D < 0$.

Falls $D > 0$ gilt : $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ hat die Lösungen $\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

(c) Sonderfälle

Sonderfälle bei der Lösung quadratischer Gleichungen treten dann auf, wenn einer der Koeffizienten p oder q der Normalform $x^2 + px + q = 0$ gleich Null ist. Dies ändert die Form der quadratischen Gleichung und natürlich auch der Lösungsformel; diese Änderungen führen jedoch zu einer Vereinfachung der Lösung der Gleichung.

$q = 0$	$x^2 + px = 0$	$x \cdot (x + p) = 0$

Wenn das konstante Glied q gleich Null ist, reduziert sich die allgemeine quadratische Gleichung auf die Form $x^2 + px = 0$. Diese Gleichung läßt sich natürlich mit der bekannten Lösungsformel wie bisher lösen. Leichter ist es, die Variable herauszuheben und damit die Gleichung $x \cdot (x + p) = 0$ zu lösen. Es ist zwar nicht möglich, nun durch x zu dividieren (die Variable könnte ja Null sein), allerdings kann man folgende Regel anwenden:

> Ein Produkt von zwei oder mehreren Faktoren ist genau dann Null, wenn zumindest einer der Faktoren Null ist.

Das Produkt $x \cdot (x + p) = 0$ ist also dann Null, wenn $x = 0$ oder $x + p = 0$. Dies führt zu zwei Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

Beispiel:

$$x^2 - 4x = 0$$
$$x \cdot (x - 4) = 0$$
$$(x = 0) \vee (x - 4 = 0)$$
$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$p = 0$	$x^2 + q = 0$	$x^2 = -q$

Ist der Koeffizient p gleich Null, so reduziert sich die allgemeine quadratische Gleichung auf $x^2 + q = 0$. Durch Umformen erhält man $x^2 = -q$. Nach dem Wurzelziehen unter Beachtung der Doppeldeutigkeit erhält man die beiden Lösungen $x_1 = -\sqrt{-q}$ und $x_2 = +\sqrt{-q}$. Die Gleichung ist also nur dann lösbar, wenn $q < 0$.

Beispiel:

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x_1 = -3, x_2 = 3$$

Die Gleichung $x^2 + q = 0$ bezeichnet man auch als rein quadratische Gleichung in Normalform.

(d) Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$

Die bisherigen quadratischen Gleichungen waren alle in der Form $x^2 + px + q = 0$, der Koeffizient für x^2 war also stets 1. Für diese Normalform gilt die hergeleitete Lösungsformel. Im folgenden soll diese Normalform noch verallgemeinert werden; ist der Koeffizient für x^2 nicht 1, so erhält man die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Unter einer allgemeinen quadratischen Gleichung in einer Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ mit $a, b, c \in R, a \neq 0$

Diese Gleichung läßt sich durch Division durch a auf die bekannte Normalform bringen.

Umformung $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Für diese Gleichung gilt die Lösungsformel mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Setzt man mit diesen Werten allgemein in der Lösungsformel ein, so erhält man

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Diskriminante D sieht daher wie folgt aus: $D = b^2 - 4ac$

Wie bei der Normalform können wir folgende Fälle für die Lösung unterscheiden:

Die allgemeine quadratische Gleichung		$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ mit mit $a, b, c \in R, a \neq 0$
und der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$		hat die folgenden Lösungen, wenn
D > 0:	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
D = 0:		$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
D < 0:		keine reelle Lösung L = { }

Beispiel:

$$10x^2 - 107x - 156 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-107) \pm \sqrt{(-107)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-156)}}{2 \cdot 10}$$

$$x_{1,2} = \frac{107 \pm \sqrt{11449 + 6240}}{20} = \frac{107 \pm 133}{20}$$

$$x_1 = -\frac{13}{10}, x_2 = 12$$

(e) Zerlegung in Linearfaktoren - Satz von Vieta

Betrachtet man die Summe und das Produkt der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so kann man einen interessanten Zusammenhang zwischen den Lösungen erkennen:

Summe:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) = -p$$

Produkt:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) = \frac{p^2}{4} - D = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q$$

Die Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann Lösung einer quadratischen Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$, wenn gilt:
Die Summe der Lösungen ist $\mathbf{x_1 + x_2 = -p}$ und das Produkt der Lösungen ist $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = q}$.

Für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gelten analoge Formeln:

$ax^2 + bx + c = 0$: $\qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Ersetzt man in der quadratischen Gleichung p und q durch die entsprechenden Ausdrücke $-(x_1 + x_2)$ und $x_1 \cdot x_2$, so erhält man eine andere Darstellung der Gleichung in Abhängigkeit von ihren Lösungen x_1 und x_2:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - x \cdot x_1 - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hat die quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so läßt sich der Gleichungsterm als Produkt zweier Linearfaktoren anschreiben:
$x^2 + px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$ **Satz von VIETA**

Da in den beiden Klammern der Aufspaltung die Variable linear auftritt, bezeichnet man diese Klammern als Linearfaktoren.

Für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gilt analog: $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

Beispiel: *Zerlegen Sie $x^2 + 6x - 7$ in Linearfaktoren.*

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+7}$$
$$x_1 = -7, x_2 = 1$$

Überprüfung p, q

$$x_1 + x_2 = -7 + 1 = -6$$
$$x_1 \cdot x_2 = -7$$

Linearfaktoren

$$x^2 + 6x - 7 = (x+7)\cdot(x-1)$$

***Beispiel**:* *Die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind $x_1 = -7$ und $x_2 = 8$. Ermitteln Sie die quadratische Gleichung.*

$$-(x_1 + x_2) = p$$
$$-(-7+8) = -1$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$
$$(-7)\cdot 8 = -56$$

Gleichungsterm

$$x^2 - x - 56 = 0$$

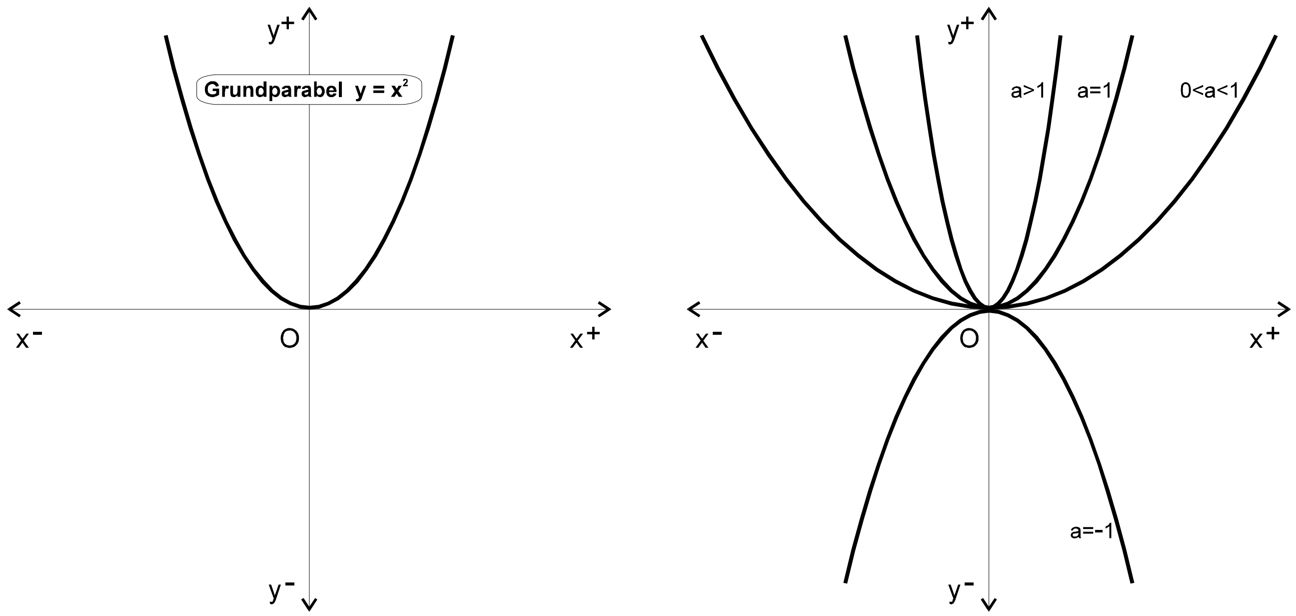
(f) Graphische Darstellung

Unter einer quadratischen Funktion versteht man eine Funktion der Gestalt:		
f: R → R	**$x \to ax^2 + bx + c$**	$a, b, c \in R, a \neq 0$

Will man den Graphen dieser Funktion untersuchen, so ist es sinnvoll, mit der reinquadratischen Funktion $y = ax^2$ zu beginnen. Ist der Koeffizient a = 1, so erhält man die sogenannte Grundparabel.

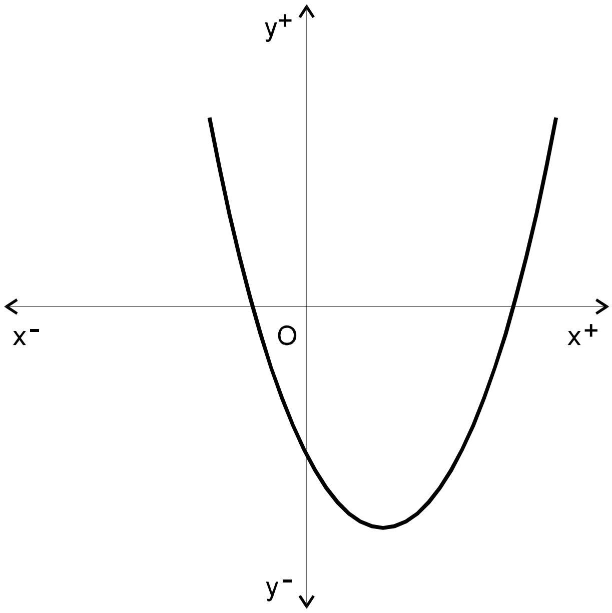
Die Funktion	**$y = x^2$**	bezeichnet man als Grundparabel.

Der Graph der Funktion $y = ax^2$ geht aus der Grundparabel durch Dehnung (a>1) oder Stauchung (0<a<1) in Richtung der y-Achse hervor. Ist der Koeffizient a darüberhinaus negativ, so erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.



Alle Funktionen der Gestalt $y = ax^2$ verlaufen durch den Ursprung; dieser Punkt, der entweder der tiefste oder der höchste der Funktion ist, wird der Scheitel der Parabel genannt. Weiters ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse (Symmetrieachse); man spricht von einer sogenannten geraden Funktion, da nur gerade Hochzahlen bei der Variablen in der Funktionsgleichung auftreten.

Betrachtet man nun weiter den Graph der allgemeinen quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$, so bewirkt die Konstante c eine Verschiebung in y-Richtung, das Glied bx bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung.



Der Graph dieser Funktion schneidet die x-Achse in zwei Punkten, den Nullstellen. Der y-Wert ist in diesen Punkten gleich Null. Will man die x-Werte der Nullstellen berechnen, so erhält man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, die mit der bekannten Formel zu lösen ist. Damit ist die Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung auch graphisch interpretierbar. Schneidet die zugehörige Funktion die x-Achse in zwei Nullstellen, so entspricht dies den beiden Lösungen. Sitzt der Graph der Funktion mit dem Scheitel auf der x-Achse auf, so gibt es nur eine Lösung. Befindet sich der Graph der Funktion komplett ober- oder unterhalb der x-Achse, so gibt es keine Lösung.

Der Scheitel der Funktion ist nun ebenfalls aus dem Ursprung verschoben. Will man die Koordinaten dieses Punktes berechnen, formt man die Funktionsgleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat um.

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right)$$

Das Quadrat in der Klammer ist immer größer oder gleich Null, es kann als minimalen Wert also nur Null annehmen. Zu diesem Quadrat wird immer ein von der Variablen unabhängiger Zahlenwert zu- bzw. abgezählt. Ist das Quadrat in der Klammer also Null, ergibt sich auf jeden Fall ein Extrempunkt, entweder der tiefste oder der höchste Punkt; das entspricht dem Scheitelpunkt.

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \qquad S\left(-\frac{b}{2a} \middle| \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$$

Abhängig vom Wert von a ist der Scheitel nun der tiefste Punkt (a>0) oder der höchste Punkt (a<0) der Funktion.

4.2. Anwendung quadratischer Gleichungen

Aus dem 2. Kapitel sind bereits die Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion in linearer Form bekannt.

$E = p \cdot x$	$K = k_v \cdot x + K_f$	$G = E - K = (p - k_v) \cdot x - K_f$

Besteht zwischen dem Verkaufspreis p eines Produkts und der abgesetzten Menge x zusätzlich ein linearer Zusammenhang (Angebot - Nachfrage), so ergeben sich für die Erlös- und Gewinnfunktion quadratische Gleichungsterme.

Betrachtet man die Graphen dieser Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion, so ergeben sich Schnittpunkte der Funktionen, die wieder interpretierbar sind.

Die quadratische Gewinnfunktion schneidet die x-Achse in zwei Punkten, den sogenannten **Gewinnschwellen**. Zwischen den Gewinnschwellen liegt der Produktionsbereich, für den die Produktion Gewinn macht, wird weniger oder mehr produziert, so macht man Verluste. Die lineare Kostenfunktion schneidet die quadratische Erlösfunktion in zwei Schnittpunkten, deren x-Koordinaten gleich denen der Gewinnschwellen sind.

Beispiel: *Zwischen dem Verkaufspreis p einer Ware und der abgesetzten Menge x besteht ein linearer Zusammenhang, der durch die Gleichung $x = 340 - 4p$ beschrieben werden kann. Die Gesamtkostenfunktion lautet $K(x) = 25x + 2000$. Ermitteln Sie rechnerisch die Gewinnschwellen und den Maximalgewinn. Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion, der Kostenfunktion und der Gewinnfunktion!*

Ermittlen der Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$

$$x = 340 - 4p \Rightarrow p = -\frac{x}{4} + 85$$

$$E = \left(-\frac{x}{4} + 85\right) \cdot x = -\frac{x^2}{4} + 85x$$

Ermitteln der Gewinnfunktion

$$G(x) = E - K$$

$$G = -\frac{x^2}{4} + 85x - (25x + 2000)$$

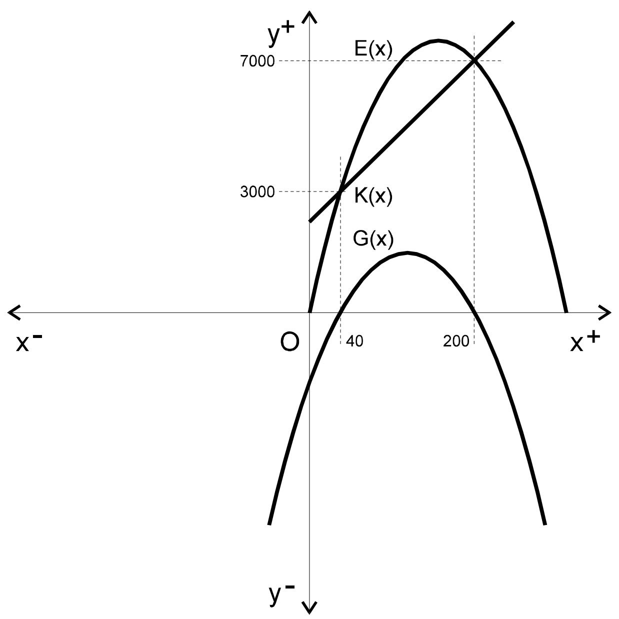
$$G = -\frac{x^2}{4} + 60x - 2000$$

Berechnung der Gewinnschwellen (G = 0)

$$-\frac{x^2}{4} + 60x - 2000 = 0$$

$$x^2 - 240x + 8000 = 0$$

$$x_1 = 40, x_2 = 200$$



Ab einer produzierten Menge von 40 Stück bis zu einer Menge von 200 Stück befindet sich der Betrieb in der Gewinnphase. Im Schnitt der Kostenfunktion mit der Erlösfunktion kann man ebenso ablesen, daß in diesen Punkten Erlös und Kosten gleich groß sind.

Wie unschwer zu erkennen ist, hat die Gewinnfunktion in ihrem Scheitel das Maximum; die x-Koordinate des Scheitels entspricht der Stückzahl, die den maximalen Gewinn liefert. Dieser Gewinn ist als y-Koordinate des Scheitels abzulesen.

Berechnung des Scheitels

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$S(120\,|\,1600)$$

Bei einer Stückzahl von 120 Stück ergibt sich der maximale Gewinn von 1600 GE.

Zu beachten ist, daß das Maximum von der Gewinnfunktion und der Erlösfunktion im allgemeinen nicht zusammenfallen, ein großer Erlös muß nicht auch einen großen Gewinn bedeuten.

4.3. Gleichungen höheren Grades

(a) Definition

Unter einer Polynomfunktion n-ten Grades versteht man eine Funktion der Gestalt:

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in R$ $(0 \leq i \leq n)$, $i, n \in N$

Die a_i werden als Koeffizienten bezeichnet, das a_0 im speziellen als das konstantes Glied. Ist n = 1, so erhält man das lineare Polynom $P_1(x) = a_1x + a_0$, also ein Binom, das der bekannten linearen Funktion entspricht. Ist n = 2, so ergibt sich das quadratische Polynom $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, das der quadratischen Funktion der vorangegangenen Abschnitte entspricht.

Möchte man für einen bestimmten Wert von x den Wert des Polnoms P(x) berechnen, dann bietet sich folgende Anschreibweise des Polynoms zur Berechnung an (**Schema von HORNER**)

$$P_n(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + a_{n-3}) \cdot x + \ldots) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

Für die praktische Berechnung bedeutet dies, daß man den Wert des Polynoms am besten in einer Tabelle berechnet.

Beispiel: *Berechnen Sie die Werte für x = –2, x = 1 und x =4 des Polynoms* $P_4(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1$

	$a_4 = 3$	$a_3 = -4$	$a_2 = 2$	$a_1 = 5$	$a_0 = -1$
x = –2	3·(–2)=–6	((–6)+(–4))·(–2)=20	(20+2)·(–2)=(–44)	((–44)+5)·(–2)=78	78+(–1)=77
x = 1	3·1=3	(3+(–4))·1=(–1)	((–1)+2)·1=1	(1+5)·1=6	6+(–1)=5
x = 4	3·4=12	(12+(–4))·4=32	(32+2)·4=136	(136+5)·4=564	564+(–1)=563

P(–2) = 77, P(1) = 5, P(4) = 563

Die Berechnung erfolgt also durch Multiplikation des Koeffizienten a_n mit x, dann wird a_{n-1} addiert. Das Ergebnis wird wieder mit x multiplizert, a_{n-2} wird addiert usw. Zum Schluß muß nur noch a_0 addiert werden.

(b) Zerlegung in Linearfaktoren - Satz von Vieta

Soll $P_n(x)$ einen bestimmten Wert annehmen, ergibt sich eine Gleichung n-ten Grades in einer Variablen (im speziellen $P_n(x) = 0$).

Gleichung n-ten Grades $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0 = 0$$

Möchte man eine Gleichung höheren Grades lösen, steht man vor dem Problem, daß es **keine allgemeine Lösungsformeln** für Polynomgleichungen für n>3 gibt, wie sie bereits von linearen und quadratischen Gleichungen bekannt sind. Es läßt sich allerdings der Satz von Vieta für quadratische Gleichungen verallgemeinern.

Sind x_1, x_2, ..., x_n die Lösungen einer Gleichung n-ten Grades, dann läßt sich die Gleichung als Produkt von n Linearfaktoren darstellen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$ **Satz von VIETA**

Ist eine Lösung x_1 der Gleichung bekannt, so ist es möglich mittels **Polynomdivision** durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ die Gleichung zu vereinfachen, da sich die zu lösende Gleichung um einen Grad vermindert.

Eine weitere Folgerung aus dem Satz von Vieta ist, daß die **Zahl der reellen Lösungen höchstens** gleich dem **Grad n** des Polynoms sein kann. Selbstverständlich sind auch hierbei Mehrfachlösungen wie bereits bei den quadratischen Gleichungen denkbar.

Der erste Schritt zur Lösung der Gleichung ist also das Auffinden einer ersten Lösung x_1. Sind die Koeffizienten a_i und diese Lösung ganzzahlig ($x_1 \in Z$), so ist diese Lösung ein **Teiler des konstanten Gliedes** a_0; ist die Lösung aus den rationalen Zahlen ($x_1 \in Z$), dann hat sie die Form $\frac{p}{q}$ ($p,q \in Z$, $q \neq 0$), wobei p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n ist. Man kann also durch Einsetzen der möglichen rationalen Lösungen in die Polynomfunktion mittels **Schema von Horner** eventuell eine Lösung der Gleichung finden.

Ist eine Lösung gefunden, wird das Polynom durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ dividiert. Ist der Grad des Polynoms immer noch größer als 2, so beginnt das Verfahren von vorne. Zweckmäßigerweise verwendet man für das Horner-Schema die bereits gefundenen möglichen Lösungen; man kann diese Menge jedoch zumindest auf die Teiler, die kleiner oder gleich dem neuen konstanten Glied sind, einschränken.

Beispiel: *Ermitteln Sie die rationalen Lösungen der Gleichung*

$$2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = 0\,.$$

Teilerbestimmung $a_0 = 12$ $\quad T(12) = \{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12\}$

$a_4 = 2$ $\quad T(2) = \{\pm 1;\pm 2\}$

Mögliche rationale Lösungen $\left\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12;\pm \frac{1}{2};\pm \frac{3}{2}\right\}$

Überprüfung mittels Horner-Schema $P(-1) = 0$

Polynomdivision $(2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12):(x+1) =$
$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

Überprüfung mittels Horner-Schema $P(2) = 0$

Polynomdivision $(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12):(x-2) =$
$2x^2 + x - 6$

Lösung der quadratischen Gleichung $(x = -2) \vee (x = \frac{3}{2})$

Lösungen $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2$

$L = \left\{-2,-1;\frac{3}{2};2\right\}$

Linearfaktordarstellung $P(x) = (x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{3}{2})\cdot(x-2)$

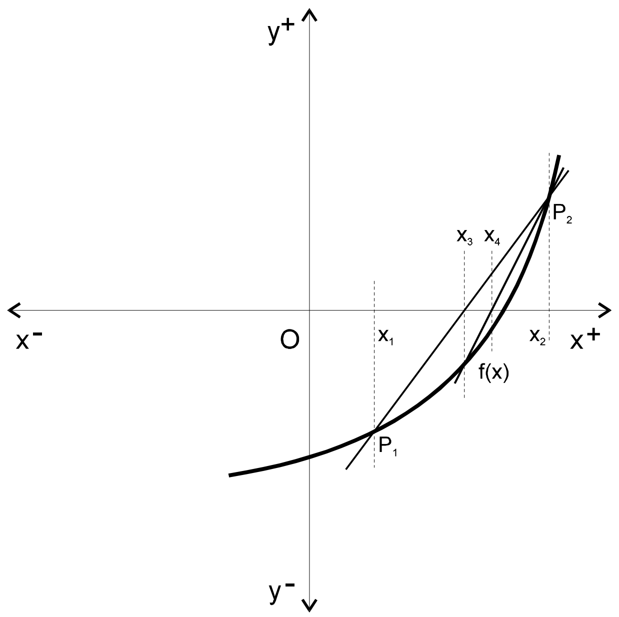
(c) Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen

Sind bei einer Gleichung keine ganzzahligen bzw. rationalen Lösungen zu finden, muß man die Lösungen von Gleichungen höheren Grades mit Näherungsverfahren ermitteln. Eines dieser Näherungsverfahren ist die sogenannte *Regula falsi* (lat. Regel vom Falschen).

Regula falsi: Kann man eine Funktion durch eine **ununterbrochen Linie** darstellen (stetige Funktion) und kennt man zwei x-Werte x_1 und x_2, deren **Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen** haben, so liegt im Intervall $[x_1, x_2]$ sicherlich eine **Nullstelle** der Funktion. Ersetzt man den Kurvenbogen zwischen den Punkten $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ durch die **Gerade $g(P_1P_2)$**, so kann man die Nullstelle dieser Geraden als **Näherungslösung** x_3 für die Nullstelle der Funktion sehen.

Setzt man mit dieser Näherung in der Funktion ein, erhält man einen Funktionswert, der näher bei Null liegt als $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$. Entspricht die Näherung noch nicht der **gewünschten Genauigkeit**, kann man das Verfahren erneut beginnen. Allerdings setzt man das Startintervall nun als $[x_1, x_3]$ oder $[x_3, x_2]$ so fest, daß die Funktionswerte der Intervallgrenzen unterschiedliches Vorzeichen haben. Allgemein läßt sich die Berechnung in folgender Formel zusammenfassen:

Regula falsi	$x_{i+2} = x_i - f(x_i)\dfrac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$	i = 1, 2, 3, ...



Sucht man also die Lösungen für eine Gleichung höheren Grades, beginnt man zweckmäßigerweise mit der Erstellung einer **Wertetabelle** und sucht ein Intervall, in dem die Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen haben.

Mit Hilfe der oben genannten Formel findet man eine Näherungslösung für die Gleichung in der gewünschten Genauigkeit. Nun ist es möglich, durch **Polynomdivision** die zu lösende Gleichung um einen Grad zu vermindern. Bei dieser Polynomdivision muß man natürlich eine gewisse **Ungenauigkeit** tolerieren, da die Lösung selbst nur eine begrenzte Genauigkeit aufweist.

Beispiel: *Ermitteln Sie die im Intervall [2,3] liegende Lösung der Gleichung $x^3 - 6x + 2 = 0$ auf zwei Dezimalen genau.*

Die Funktionswerte f(2) = –2 und f(3) = 11 der Funktion $f(x) = x^3 - 6x + 2$ haben unterschiedliches Vorzeichen, daher muß zwischen x = 2 und x = 3 eine Lösung der Gleichung liegen. Sie ist dann auf zwei Dezimalen genau, wenn sich die zweite Dezimale bei aufeinanderfolgenden Näherungswerten nicht mehr ändert.

Wiederum bietet sich die praktische Berechnung in einer Tabelle an.

i	x_i	x_{i+1}	$x_{i+1} - x_i$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+1}) - f(x_i)$	x_{i+2}
1	2	3	1	–2	11	13	2,1538
2	2,1538	3	0,8462	–0,9316	11	11,9313	2,2199
3	2,2199	3	0,7801	–0,3798	11	11,3798	2,2459
4	2,2459	3	0,7541	–0,1469	11	11,1469	2,2558
5	2,2558	3	0,7442	–0,0559	11	11,0559	2,2596

Eine Lösung der Gleichung lautet also x = 2,25.

Will man auch noch eventuell andere Lösungen der Gleichung finden, so wendet man die Polynomdivision durch den Linearfaktor (x – 2,2596) an.

Polynomdivision

$$(x^3 - 6x + 2) : (x - 2,2596) = x^2 + 2,2596x - 0,8942$$

Lösen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2,2596x - 0,8942 = 0$$
$$(x = -2,6031) \vee (x = 0,3435)$$

Lösungen der Gleichung

$$x_1 = -2,60, x_2 = 0,34, x_3 = 2,25$$

4.4. Komplexe Zahlen

(a) Definition

Beispiel:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$
$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13}$$
$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-4}$$
$$G = R, L = \{\ \}$$

Das obengenannte Beispiel hat in den reellen Zahlen keine Lösung. Es ist schließlich bekannt, daß das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist, oder anders formuliert: es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist, und genau das würde die Wurzel aus einer negativen Zahl bedeuten.

Akzeptiert man die Lösungen trotzdem und überprüft die bisher gewonnenen Aussagen über quadratische Gleichungen, stellt man überraschenderweise fest, daß die Lösungen alle bisherigen Aussagen erfüllen.

Summe $\quad x_1 + x_2 = (3 - \sqrt{-4}) + (3 + \sqrt{-4}) = 6 = -p$

Produkt $\quad x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{-4}) \cdot (3 + \sqrt{-4}) = 9 - (-4) = 13 = q$

Linearfaktorenzerlegung $\quad (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 3 + \sqrt{-4}) \cdot (x - 3 - \sqrt{-4}) = x^2 - 6x + 13$

Es läßt sich also mit den gewonnenen Lösungen nach den bekannten Rechenregeln rechnen und die bisherigen Aussagen werden ebenfalls erfüllt. Diese Tatsache legt nahe, eine neue Zahlenmenge zu definieren, die Wurzeln aus negativen Zahlen beinhaltet, aber deren Elemente die gewohnten Rechengesetze befolgen.

Da man jede Wurzel aus einer negativen Zahl auf das Wurzelziehen aus –1 reduzieren kann, genügt es zur Erweiterung der reellen Zahlen diese Wurzel zu definieren.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}, a \in R^+$$

Die Zahl, deren Quadrat gleich –1 ist, wird **imaginäre Einheit** genannt und mit dem Buchstaben **i** bezeichnet. $\quad i^2 = -1 \quad\quad i = \sqrt{-1}$

Eine Zahl der Form **b·i** bezeichnet man als **imaginäre Zahl**. $\quad b \in R$

Eine Zahl der Form **z = a + b·i** bezeichnet man als **komplexe Zahl**. $\quad a, b \in R$

Man nennt **a** den **Realteil von z (a = Re z)** und **b** den **Imaginärteil von z (b = Im z).**

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man als **C**.

Betrachtet man die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil gleich Null ist (b = 0), so erhält man die Menge der reellen Zahlen. Die reellen Zahlen sind also eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

(b) Rechenregeln für imaginäre Zahlen

Addition und Subtraktion

$bi + di = (b + d)\cdot i$	$bi - di = (b - d)\cdot i$	$b, d \in R$

Die Summe bzw. die Differenz zweier imaginärer Zahlen ist also wieder eine imaginäre Zahl.

Multiplikation

$bi \cdot di = b\cdot d \cdot i\cdot i = b\cdot d \cdot i^2 = b\cdot d \cdot (-1) = -bd$	$b, d \in R$

Das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist also eine reelle Zahl. Folgendes ist allerdings zu beachten:

$$\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-d} = \sqrt{b} \cdot i \cdot \sqrt{d} \cdot i = i^2 \cdot \sqrt{bd} = -\sqrt{bd}$$

Nicht erlaubt wäre es in diesem Beispiel, das Produkt (–b)·(–d) = bd vor dem Wurzelziehen unter einer Wurzel zusammenzufassen, da die Rechenregeln für Wurzeln nur für positive Radikanden gelten.

Division

$$bi:di = \frac{bi}{di} = \frac{b}{d} = b:d \qquad b, d \in R, d \neq 0$$

Der Quotient zweier imaginärer Zahlen ist also eine reelle Zahl.

Potenzieren

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

oder allgemein:

$$i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \qquad i^{4n} = 1$$

$$(-i)^n = i^n \text{ für } n \in N_g \qquad (-i)^n = -i^n \text{ für } n \in N_u$$

Die oben genannten Formeln gelten auch für negatives n, also allgemein für $n \in Z$.

(c) Rechenregeln für komplexe Zahlen

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ können nur dann gleich sein, wenn die reellen Bestandteile gleich sind.

$$a + bi = c + di \qquad a = c \text{ und } b = d \qquad a, b, c, d \in R$$

Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils voneinander unterscheiden, bezeichnet man als zu einander konjugiert und nennt die zur Zahl z konjugierte Zahl $\bar{z}$.

$$z = a + bi \qquad \text{konjungiert komplexe Zahlen} \qquad \bar{z} = a - bi$$

Addition und Subtraktion

Komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem die Realteile und die Imaginärteile für sich addiert bzw. subtrahiert werden.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \qquad a, b, c, d \in R \qquad (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Multiplikation

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen verfährt man wie bei der Multiplikation zweier Binome unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i \qquad a, b, c, d \in R$$

Ist b oder d gleich Null, so führt die Berechnung zu einer Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl, die obengenannten Formel hat natürlich auch dann Gültigkeit.

Division

Bei der Division einer komplexen Zahl durch eine reelle Zahl werden Realteil und Imaginärteil getrennt dividiert. Wird eine komplexe Zahl durch eine imaginäre Zahl dividiert, kann man den Bruch durch Erweitern mit einer anderen imaginären Zahl auf einen reellen Nenner bringen.

$$\frac{a+bi}{ci}=\frac{(a+bi)\cdot(-i)}{ci\cdot(-i)}=\frac{-ai-bi^2}{-ci^2}=\frac{-ai+b}{c}=\frac{b}{c}-\frac{a}{c}i \qquad a, b, c \in R,\ c \neq 0$$

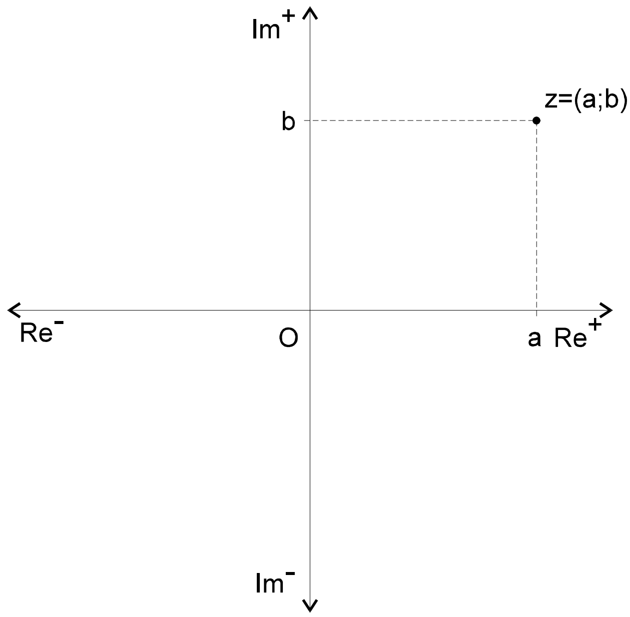
Wird durch eine komplexe Zahl dividiert, erhält man durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl einen reellen Nenner.

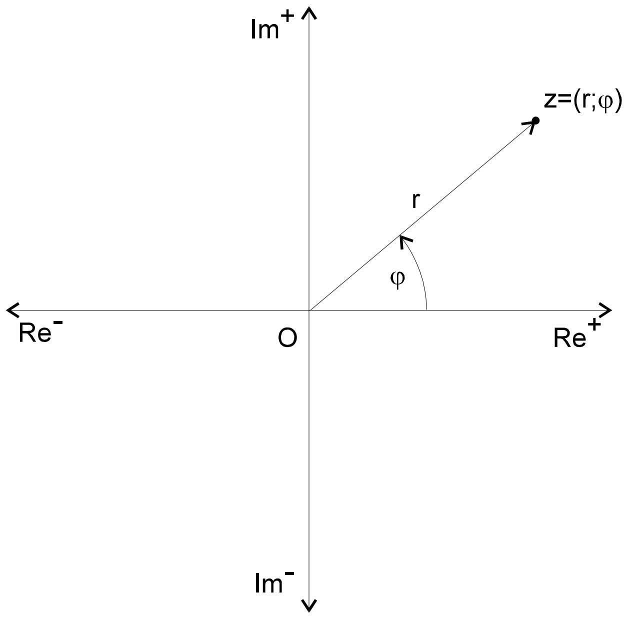
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2} \qquad a, b, c, d \in R,\ (c+di \neq 0)$$

(d) Graphische Darstellung

Da eine komplexe Zahl immer die Form z = a + bi hat, ist es möglich, sie als Zahlenpaar z = (a;b) darzustellen. Ein Zahlenpaar wiederum ist als Punkt im Koordinatensystem interpretierbar.

Trägt man den Wert von a auf der x-Achse auf, so wird diese Achse zur sogenannten reellen Achse, entsprechend wird die y-Achse zur imaginären Achse, wenn b in Richtung der y-Achse gemessen wird. Die sich so ergebende Zahlenebene für die Darstellung komplexer Zahlen wird **Gaußsche Zahlenebene** genannt.





Jeder komplexen Zahl z = a + bi ist somit eindeutig ein Punkt P(a|b) zugeordnet und umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau eine komplexe Zahl. Die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen sind in dieser graphischen Darstellung auf der x-Achse zu finden, die imaginären Zahlen entsprechend auf der y-Achse.

Eine andere Darstellungsform der komplexen Zahlen ist über den Abstand r des Punktes P(a|b) vom Ursprung und dem Winkel φ zwischen der x-Achse und der Strecke OP. Der Punkt P hat in dieser Darstellungsform die Koordinaten P(r|φ), man spricht von Polarkoordinaten in der goniometrischen Form der komplexen Zahlen.

Die komlexen Zahlen haben in vielen technischen Bereichen, im speziellen in der Elektrotechnik, Einzug gehalten und sind in den dort anfallenden Berechnungen nicht mehr wegzudenken. Viele Berechungen lassen sich in der Menge der komplexen Zahlen mit den entsprechenden Rechenverfahren leichter und schneller durchführen, selbst dann, wenn das Ergebnis wieder ein reeller Wert sein sollte.

Die hierzu nötigen geometrischen und rechnerischen Voraussetzungen - nämlich Vektorrechnung und trigonometrische Berechnungen - werden in späteren Kapiteln geklärt. Die entsprechende Verbindung zur Rechnung mit komplexen Zahlen erfolgt aber jeweils.

Die Rechenoperationen lassen sich dann auch graphisch durchführen, manche Operationen jedoch sind nur in der goniometrischen Darstellung mit Polarkoordinaten sinnvoll durchführbar.

Unter Verwendung der komplexen Zahlen läßt sich folgender Satz über Gleichungen n-ten Grades abschließend formulieren:

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom n-ten Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen genau n Lösungen, wobei mehrfache Lösungen ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt werden.

Eine quadratische Gleichung zum Beispiel mit reellen Koeffizienten ist in der Menge der komplexen Zahlen auch dann lösbar, wenn die Diskriminante negativ ist. Ihre Lösungen sind dann zwei konjugiert komplexe Zahlen. Die Sätze von Vieta gelten, wie bereits für quadratische Gleichungen überprüft wurde, auch bei komplexen Lösungen.

Anhang: Übungsbeispiele zum 4. Kapitel

4/1 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 + 2x - 63 = 0$

b) $x^2 - 8x + 15 = 0$

c) $x^2 - 11x + 10 = 0$

d) $x^2 - 40x + 111 = 0$

4/2 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 + 2x = 1$

b) $x^2 - 6x + 4 = 0$

c) $8x^2 - 6x = 1$

d) $-3x^2 + x + 24 = 0$

4/3 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $4x^2 + 44x + 121 = 0$

d) $x^2 + x = -\frac{1}{4}$

4/4 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $x^2 - 8x - 16 = 0$

c) $4x^2 + 44x - 121 = 0$

d) $x^2 + x = \frac{1}{4}$

e) $x^2 = 1156$

f) $9x^2 = -27$

4/5 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

c) $4x^2 + 44x = 4x$

d) $x^2 + x = x + 0{,}25$

4/6 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $(x+2)(2x+1)+(x-3)(2x+1)=195$

b) $(x+1)^2 = 52-(x-1)^2$

c) $(4x-1)(2x-1)+2(x+4)(x-1)=153$

d) $(2+3x)^2 = (3+x)(5x-3)+13$

4/7 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{9}{4}$

b) $\dfrac{3x-10}{x-2}-\dfrac{x-4}{x+1}=1$

c) $\dfrac{2x+2}{x-5}=\dfrac{120}{x^2-25}+\dfrac{x+17}{x+5}$

d) $\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{35}{x^2-9}$

4/8 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $(x^2-10)(x^2-3)=78$

c) $10x^4 - 21 = x^2$

d) $(x^2-5)^2 + (x^2-1)^2 = 40$

e) $x^5 + 6x^4 = 91x^3$

f) $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$

4/9 Lösen Sie folgende Textaufgaben:

a) Die Summe aus dem Quadrat einer Zahl und ihrem Dreizehnfachen ergibt 888.

b) Die Zahl 100 ist in zwei Teile zu zerlegen, sodaß deren Quadrate zusammen 5162 ergeben.

c) Es gibt zwei Zahlen, von denen die eine ebensoviel über 205 liegt, wie die andere unter 205. Ihr Produkt beträgt 34969.

d) Die Summe zweier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist um 38 kleiner als das dreifache Quadrat der um 1 verminderten kleineren Zahl.

4/10 Lösen Sie folgende Textaufgaben:

a) Zwei Elektriker stellen zusammen eine Anlage in $6\frac{2}{3}$ Tagen fertig. Wie lange müßte jeder allein arbeiten, wenn der zweite alleine 3 Tage länger als der erste braucht?

b) Durch eine Verbesserung kann ein Zug eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km eine Zeitersparung von 40 Minuten. Wieviele Stunden benötigt er für die Strecke?

c) Um einen Behälter zu füllen, braucht eine von zwei Pumpen 2 Stunden 24 Minuten mehr als die zweite. Beide gleichzeitig füllen den Behälter in 35 Minuten. Wie viele Minuten benötigt die erste allein?

d) Ein Fußgänger geht von A nach B mit 5 km/h. Er wird 1,5 Stunden nach seinem Aufbruch von einem Radfahrer überholt, der 30 Minuten später in B ankommt, dort sofort wendet und in A zu derselben Zeit ankommt wie der Fußgänger in B. Wie weit ist A von B entfernt?

4/11 Ein Betrieb erzeugt Kaffeemaschinen. Falls er sie zum Preis p pro Maschine anbietet, können pro Monat $x=1500-p$ Stück verkauft werden. Die Fertigungskosten setzen sich aus Fixkosten von 105000 GE und variablen Kosten von 60 GE pro Maschine zusammen. Bei welchem Preis ist der Gesamterlös $E(p)$ maximal? Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn $G(x)$ maximal?

4/12 Ein Ferienhaus hat 36 gleichartige Wohnungen. Der Besitzer weiß aus Erfahrung: Bietet er die Wohnungen zu einem Mietpreis von 5600 GE pro Woche an, so kann er alle Wohnungen vermieten. Verlangt er aber 6000 GE, so bleibt voraussichtlich eine Wohnung leer stehen, bei einem Preis von 6400 GE sind es zwei Wohnungen, usw. Wieviele Wohnungen müssen leer stehen, damit die Gesamteinnahmen maximal sind?

4/13 Eine Kostenfunktion hat die Gleichung $K(x) = x^2+8x+16$. Für welchen Marktpreis gibt es nur eine Menge x, für die ohne Verlust verkauft werden kann?

4/14 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$

e) $x^3 - 7{,}8x^2 + 19{,}64x - 15{,}912 = 0$

f) $x^3 - 7{,}25x^2 + 14{,}5x - 8{,}75 = 0$

4/15 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^3 + 5x - 3 = 0$

b) $x^3 - 12x^2 + 36x - 24 = 0$

c) $x^3 - 20x^2 + 96x - 40 = 0$

d) $x^4 - 5{,}1x^3 + 5{,}9x^2 - 9{,}3x + 27 = 0$

e) $x^4 - 8{,}9x^3 + 28{,}86x^2 - 40{,}464x + 20{,}736 = 0$

f) $x^4 - 12x^3 + 45x^2 - 54x + 18 = 0$

4/16 Vereinfachen Sie unter Einführung vom $i = \sqrt{-1}$:

a) $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-32x^2}$

b) $\sqrt{-48} + \sqrt{-75} - \sqrt{-27}$, $\sqrt{-12} - \sqrt{-8} + \sqrt{-24}$

4/17 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}$, $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{y}$,

b) $8i:2i$, $9:3i$, $\sqrt{-6}:\sqrt{-8}$, $4:2i$

c) $5i^2\cdot 2i^6$, $(-i)^3\cdot i^2$, $6i:i^7$, $1:(-i^3)$

d) $\dfrac{1}{i^5}+i^{-7}$, $\dfrac{ai}{\sqrt{-a^3}}$, $\dfrac{\sqrt{-3}\cdot\sqrt{12}}{i\cdot\sqrt{-a^2}}$, $\sqrt{b-a}:\sqrt{a-b}$

4/18 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $(5+3i)-(2-4i)$, $(5-4i)+(2+3i)$

b) $3\cdot(-2+6i)$, $(-2)\cdot(4-4i)$

c) $(2+3i)\cdot(4-5i)$, $(1+\sqrt{-3})\cdot(3-\sqrt{-2})$

d) $(1+i\sqrt{2})^2$, $(2-\sqrt{-9})^3$

4/19 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $(16+2i):4$, $(8+\sqrt{-2}):\sqrt{2}$

b) $(4-3i):2i$, $(2i+3):\sqrt{-3}$

c) $\dfrac{8+7i}{3+4i}$, $\dfrac{3-2i}{2-3i}$

d) $\dfrac{22}{2-7i}$, $\dfrac{(5+\sqrt{-3})(5-\sqrt{-3})}{2-i\sqrt{3}}$

4/20 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben mit den konjugiert komplexen Zahlen $z=a+bi$ und $\bar{z}=a-bi$:

a) $z+\bar{z}$

b) $z-\bar{z}$, $\bar{z}-z$

c) $z\cdot\bar{z}$

d) $z:\bar{z}$, $\bar{z}:z$