3. UNGLEICHUNGEN, UNGLEICHUNGSSYSTEME

3.1. Ungleichungen

(a) Definition

Im vorigen Kapitel wurden Terme miteinander „verglichen“, indem sie gleichgesetzt wurden. Ein andere Art, Terme zu vergleichen, ist die, einen Vergleich bezüglich der (Zahlen-)Größe der Terme durchzuführen.

Sind T_1 und T_2 Terme, so ergibt sich dann eine **Ungleichung**, wenn die Terme durch eines der folgenden Symbole miteinander verglichen werden:

$<$	diese Symbol bedeutet „kleiner als“	$T_1 < T_2$
$>$	diese Symbol bedeutet „größer als“	$T_1 > T_2$
$\leq$	dieses Symbol bedeutet „kleiner oder gleich“	$T_1 \leq T_2$
$\geq$	dieses Symbol bedeutet „größer oder gleich“	$T_1 \geq T_2$
$\neq$	dieses Symbol bedeutet „ungleich“	$T_1 \neq T_2$

Ungleichungen zwischen Zahlen sind wahre oder falsche Aussagen.

Ungleichungen mit Variablen sind Aussageformen, die erst nach Belegen der Unbekannten mit Zahlen aus einer Grundmenge zu wahren oder falschen Aussagen werden.

(b) Äquivalenzumformungen

Die Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen sind genauso durchzuführen wie bei Gleichungen; eine Änderung ergibt sich nur bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl. Dann nämlich „dreht“ sich das Ungleichheitszeichen um ($2 > 1 \mid \cdot(-1) \Rightarrow (-2) < (-1)$!).

$\forall b \in R$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 + b < T_2 + b$ $\qquad$ $T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 + b > T_2 + b$

Addition der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.

$\forall b \in R$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 - b < T_2 - b$ $\qquad$ $T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 - b > T_2 - b$

Subtraktion der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.

$\forall c \in R^{+} \setminus \{0\}$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot c < T_2 \cdot c$	$T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot c > T_2 \cdot c$
Multiplikation mit der gleichen positiven Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.	
$\forall c \in R^{-} \setminus \{0\}$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot c > T_2 \cdot c$	$T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot c < T_2 \cdot c$
Multiplikation mit der gleichen negativen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.	
$\forall c \in R^{+} \setminus \{0\}$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 \div c < T_1 \div c$	$T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 \div c > T_1 \div c$
Division durch die gleiche positive Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.	
$\forall c \in R^{-} \setminus \{0\}$: $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 \div c > T_1 \div c$	$T_1 > T_2 \Leftrightarrow T_1 \div c < T_1 \div c$
Division durch die gleiche negative Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung.	

Die angeführten Äquivalenzumformungen gelten entsprechend auch für $\leq, \geq$ und $\neq$.

Weiters sind diese Äquivalenzumformungen auch mit Termen T anstatt der Zahlen b und c durchführbar, wenn die Bedingung $T \neq 0$ sowie die Unterscheidung $T>0$ bzw. $T<0$ bei der Multiplikation und der Division berücksichtigt wird.

„Lösen einer Ungleichung" bedeutet nun, daß eine Ungleichung mittels Äquivalenzumformungen solange umgeformt wird, bis die Variable isoliert auf einer der beiden Seiten der Ungleichung steht. Man gewinnt aus der sogenannten **impliziten Ungleichung** die sogenannte **explizite Ungleichung**.

Die Lösung einer Ungleichung ist daher im Normalfall wieder eine Ungleichung.

Wie bereits bei den Gleichungen verstehen wir unter der Normalform einer linearen Ungleichung in einer Variablen eine Ungleichung der Form $ax + b < 0$ (bzw. $\leq, >, \geq, \neq$) mit $a, b \in R$; $a \neq 0$.

> Unter der allgemeinen Form (**Normalform**) einer linearen Ungleichung mit einer Variablen versteht man eine Ungleichung der Gestalt: $\mathbf{ax + b < 0}$ **($\leq, >, \geq, \neq$)** $\quad a, b \in R$; $a \neq 0$
> Man bezeichnet a als den Koeffizienten von x und b das absolute (konstante) Glied.

Jede Ungleichung, die durch Äquivalenzumformungen auf diese Form gebracht werden kann, bezeichnet man als lineare Ungleichung in einer Variablen.

Unleichungen in zwei Variablen stellen (ähnlich den Gleichungen in zwei Variablen) einen Zusammenhang (Abhängigkeit) zwischen eben diesen Variablen dar, eine Belegung einer der Variablen mit einem Zahlenwert führt die Ungleichung in eine lineare Ungleichung mit einer Variablen über, für die dann wieder eine Lösungmenge berechenbar ist.

Allgemein läßt sich dieser Ungleichungstyp folgendermaßen darstellen:

> Unter der allgemeinen Form (**Normalform**) einer linearen Ungleichung in zwei Variablen versteht man eine Ungleichung der Gestalt: **ax + by** < **c** (≤, >, ≥, ≠) a, b ∈ R \ {0}, c ∈ R
> Oft wird diese Gleichung in der expliziten Form: **y** < **kx + d** angegeben. k, d ∈ R, k ≠ 0

(c) Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge

Die Aussagen bezüglich der Grundmenge, der Definitionsmenge und der Lösungsmenge behalten auch bei Ungleichungen ihre Gültigkeit.

Es ist nur anzumerken, daß eine Ungleichung üblicherweise nicht nur durch eine einzelne Zahl als Lösung zu einer wahren Aussage wird; meistens ist die Lösungsmenge selbst mittels Ungleichungen im beschreibenden Verfahren (siehe 1. Kapitel) anzugeben.

Beispiel: *Lösen Sie die folgende Ungleichung (G = R):* $-2x + 5 < 7$

keine Einschränkung der Grundmenge *D = G*

$$-2x + 5 < 7 \quad | -5$$

Ungleichheitszeichen umdrehen $-2x < 2 \quad | \div(-2)$

$$x > \frac{2}{-2}$$

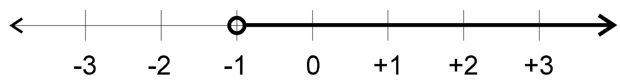
$$x > -1$$

$$L = \{x \in R \,|\, x > -1\}$$

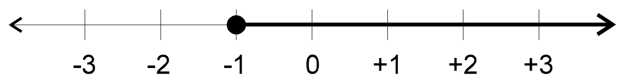
(d) Veranschaulichung auf der Zahlengeraden

Lösungen von Ungleichungen bieten sich an, auf der Zahlengeraden dargestellt zu werden. Hierbei trifft man graphisch die Unterscheidung zwischen <, > und ≤, ≥ dadurch, daß der entsprechende Randpunkt durch einen hohlen Kreis (<, >) bzw. ausgefüllten Kreis (≤, ≥) dargestellt wird.

Die Lösung des vorigen Beispiels L = $\{x \in R \mid x > -1\}$ sieht also folgendermaßen aus:



Im Gegensatz dazu stellt man M = $\{x \in R \mid x \geq -1\}$ derart dar:



(e) Intervalle

Wie die später angeführten Anwendungsbereiche von Ungleichungen zeigen, treten Ungleichungen sehr häufig auf. Im 1. Kapitel wurde das beschreibende Verfahren als eine Möglichkeit zur Mengenbeschreibung eingeführt; braucht man dieses Verfahren öfters, so ist die folgende **Intervalldarstellung** eine zweckmäßige Vereinfachung der Schreibweise.

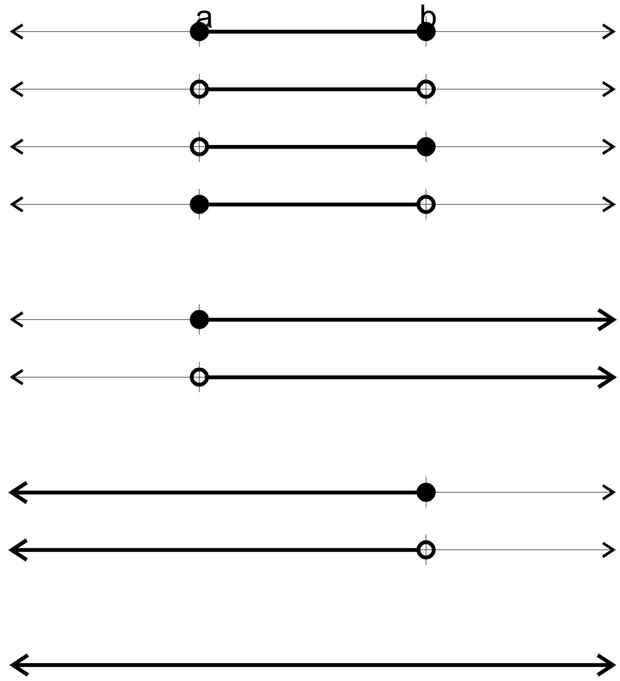
Eine Menge reeller Zahlen heißt Intervall, wenn diese Zahlen durch eine Strecke auf der Zahlengerade dargestellt werden können.

Ähnlich wie man Mengen durch Mengenklammern abgrenzt, werden die Grenzen von Intervallen in eckige Klammern geschrieben. Die Menge A = $\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 5\}$ kann daher in der Intervallschreibweise als [3;5] angeschrieben werden.

Die Unterscheidung zwischen < und ≤ (also ob der Randpunkt ein Element des Intervalls ist oder nicht) läßt sich durch die Richtung der Klammer am linken bzw. rechten Rand des Intervalls anzeigen. Das Intervall B = $\{x \in R \mid 3 < x < 5\}$ wird daher als]3;5[angeschrieben. Man bezeichnet Intervalle in Abhängigkeit von der Zugehörigkeit der Randpunkte als geschlossenes [ ], offenes] [oder halboffenes]] bzw. [[Intervall.

Bei Mengen, die in eine Richtung keine Grenze haben und die Werte für die Variable daher unendlich groß werden können (wie z.B. in der Lösung des ersten Beispiels $L = \{x \in R \mid x > -1\}$), wird dieser Randpunkt des Intervalls durch das Symbol für „unendlich" dargestellt, also das Zeichen: „ ∞".

$[a;b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossen
$]a;b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$	offen
$]a;b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$	halboffen (links)
$[a;b[= \{x \in R \mid a \leq x < b\}$	halboffen (rechts)
$[a;+\infty[= \{x \in R \mid a \leq x\}$	halboffen
$]a;+\infty[= \{x \in R \mid a < x\}$	offen
$]-\infty;b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$	halboffen
$]-\infty;b[= \{x \in R \mid x < b\}$	offen
$]-\infty;+\infty[= R$	offen



Die ersten vier Intervalle in dieser Auflistung heißen endliche Intervalle. Ihnen entspricht eine endliche Strecke auf der Zahlengeraden. Die restlichen Intervalle sind unendliche Intervalle, sie sind links oder rechts oder auf beiden Seiten unbeschränkt. Das Symbol „ ∞" ist keine Zahl! Man kann damit nicht rechnen und es entspricht ihm auch kein Punkt auf der Zahlengeraden!

Will man die Intervallschreibweise auch für Mengen verwenden, bei denen die Grundmenge nicht die reellen Zahlen sind, so muß man dies noch gesondert beim Intervall anmerken. Die folgende Menge $C = \{x \in Q \mid 3{,}5 < x \leq 8{,}3\}$ wird dann als $]3{,}5 ; 8{,}3]_Q$ angeschrieben. Solch ein Intervall läßt sich auf der Zahlengeraden nicht darstellen, da nur die reellen Zahlen die Zahlengerade lückenlos ausfüllen.

Es ist nicht notwendig - wie man vielleicht glauben mag - auch eine Intervallschreibweise für die $>$ bzw. $\geq$ Relation einzuführen, denn schließlich läßt sich jede dieser Relationen auf eine $<$ bzw. $\leq$ Relation umformen (z.B. die Lösung $L = \{x \in R \mid x > 5)$ bedeutet genauso $L = \{x \in R \mid 5 < x)$ und daher $]5;+\infty[$).

Beispiel: *Lösen Sie die folgende Ungleichung (G = R):* $\frac{4x-3}{6}+\frac{2}{5}\geq 2x-\frac{1+5x}{3}$

keine Einschränkung der Grundmenge $D = G$

$$\frac{4x-3}{6}+\frac{2}{5}\geq 2x-\frac{1+5x}{3} \quad | \cdot 30$$

$$5(4x-3)+6\cdot 2\geq 30\cdot 2x-10(1+5x)$$

$$20x-3\geq 10x-10$$

$$10x\geq -7$$

$$x\geq -\frac{7}{10}$$

$$L=\left[-\frac{7}{10},+\infty\right[$$

Bei Ungleichungen ist es nun natürlich nicht möglich, mit jedem Wert der errechneten Lösung die Probe mittels Einsetzen zu machen. Es ist aber auf jeden Fall sinnvoll, mit einem Wert der Lösungmenge in die Angabe einzusetzen; das Ergebnis dieser Probe muß eine wahre Aussage sein.

Probe z.B für x = 1 (1 $\in$ L)

$$LS:\ \frac{4-3}{6}+\frac{2}{5}=\frac{17}{30}$$

$$RS:\ 2-\frac{1+5}{3}=0$$

wahre Aussage $LS\geq RS$

3.2. Ungleichungssysteme in einer Variablen

Im Gegensatz zu Gleichungen macht es bei Ungleichungen durchwegs Sinn, lineare Ungleichungssysteme in nur einer Variablen zu betrachten. Für die Lösung eines solchen Systems ist entscheidend, ob jene Zahlen gesucht sind, die alle Ungleichungen erfüllen („und"-Verknüpfung, konjunktives System) oder ob man jene Zahlen sucht, die zumindest eine der Ungleichungen erfüllen („oder"-Verknüpfung, disjunktives System). Im ersten Fall ergibt sich die Lösungsmenge des Gesamtsystems als Durchschnittsmenge der Teillösungsmengen der einzelnen Ungleichungen, im zweiten Fall entsprechend als Vereinigungsmenge der Teillösungsmengen (ein Beispiel dafür waren bereits die Betragsgleichungen im 2. Kapitel).

Beispiel: *Ermitteln Sie die Lösung des konjunktiven Systems:*

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 1 \\ 3x + 5 &> 2 \end{aligned}$$

$$G = R,\ D = G$$

Lösen der ersten Ungleichung

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 1 \quad |+3 \\ 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Lösen der zweiten Ungleichung

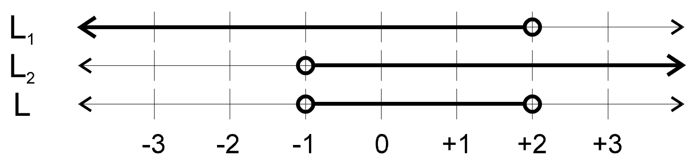
$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 2 \quad |-5 \\ 3x &> -3 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

Ermitteln der Lösungsmenge

$$L_1 = \{x \in R \mid x < 2\},\ L_2 = \{x \in R \mid x > -1\}$$

$$L = L_1 \cap L_2 = \{x \in R \mid -1 < x < 2\}$$

Veranschaulichung auf der Zahlengeraden:



Beispiel: *Ermittlen Sie die Lösung des disjunktiven Systems:*
$$7x+9 \le -12$$
$$-4x+1 < -7$$

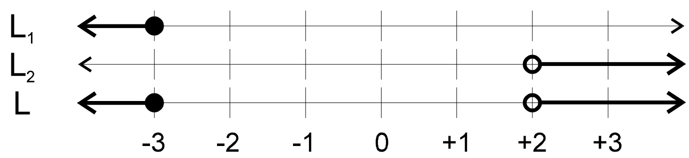
$$G = R,\ D = G$$

Lösen der ersten Ungleichung
$$7x+9 \le -12 \;|-9$$
$$7x \le -21$$
$$x \le -3$$

Lösen der zweiten Ungleichung
$$-4x+1 < -7 \;|-1$$
$$-4x < -8$$
$$x > 2$$

Ermitteln der Lösungsmenge
$$L_1 = \left\{x \in R \,|\, x \le -3\right\},\ L_2 = \left\{x \in R \,|\, x > 2\right\}$$
$$L = L_1 \cup L_2 = \left\{x \in R \,|\, (x \le -3) \vee (x > 2)\right\}$$

Veranschaulichung auf der Zahlengeraden:



Oft läßt sich die Lösungsmenge wie im letzten Beispiel nur aus zwei Lösungsbereichen angeben, die durch eine „und ($\wedge$)“- bzw. „oder ($\vee$)“-Verknüpfung verbunden sind. Die Darstellung auf der Zahlengeraden zeigt, daß das Intervall der Lösung unterbrochen ist, es gibt also gar keine andere Möglichkeit, die Lösung im beschreibenden Verfahren anzugeben.

3.3. Gebrochenrationale Ungleichungen

Gebrochenrationale Ungleichungen (Bruchungleichungen) sind ein Beispiel für die Kombination von konjunktiven und disjunktiven Ungleichungssystemen.

Am Beginn der Berechnung steht die Ermittlung der Defintionsmenge für die Ungleichung. Wie bisher sind jene Werte aus der Grundmenge auszuschließen, für die der Nenner Null ergibt.

Im nächsten Schritt, der Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner, muß jedoch nun eine Fallunterscheidung getroffen werden, ob der Nenner positiv oder negativ ist. Schließlich führt eine Multiplikation mit einer negativen Zahl zu einer Umkehrung des Ungleichheitszeichens.

Zu den beiden Fällen (Nenner $>$ 0 und Nenner $<$ 0) ergeben sich zwei Lösungsbereiche für die Ungleichung; die einzelnen Teillösungsmengen ergeben sich als Durchschnitt der Nennerbedingung (N>0 oder N<0) und dieses Lösungsbereiches (also ein konjunktives Ungleichungssystem).

Die Gesamtlösung für die Bruchungleichung ergibt sich als Vereinigungsmenge dieser beiden Teillösungsmengen (also ein disjunktives Ungleichungssystem), denn jedes Element aus jeder der beiden Teillösungsmengen erfüllt die Ungleichung.

Beispiel: *Lösen Sie die folgende Ungleichung (G = R):* $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3}$

Definitionsmenge $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D = R \setminus \{1\}$

Fallunterscheidung:

1. Fall $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} \quad | \cdot 3(x-1)$$

$$3 < 2x - 2$$

$$5 < 2x$$

$$\frac{5}{2} < x$$

1. Teillösungsmenge $(x > 1) \wedge (\frac{5}{2} < x),\ L_1 = \left\{ x \in R \,|\, x > \frac{5}{2} \right\}$

2. Fall $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} \quad | \cdot 3(x-1)$$

Ungleichheitszeichen umdrehen $3 > 2x - 2$

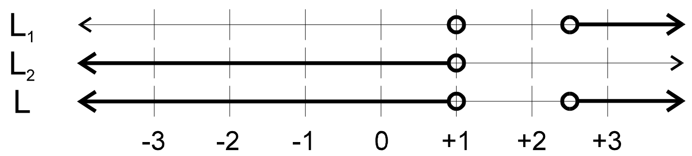
$$5 > 2x$$

$$\frac{5}{2} > x$$

2. Teillösungsmenge $(x < 1) \wedge (\frac{5}{2} > x),\ L_2 = \left\{ x \in D \,|\, x < 1 \right\}$

Gesamtlösung $L = L_1 \cup L_2 = \left\{ x \in D \,|\, (x < 1) \vee (x > 2{,}5) \right\}$

Veranschaulichung auf der Zahlengeraden:



Treten im Nenner mehrere Terme auf, so muß man für jeden dieser Terme die Werte ausschließen, für die dieser Term Null ergibt. Weiters ist es notwendig, für jeden Term eine Fallunterscheidung (T>0 oder T<0) durchzuführen und daraus Bereiche für die Variable festzulegen, für die der Nenner positiv oder negativ ist.

Ähnlich wie gebrochenrationale Ungleichungen lassen sich auch Betragsungleichungen durch Fallunterscheidungen und Ermittlung von Teillösungsmengen lösen. Die Veranschaulichung auf der Zahlengeraden kann oft hilfreich sein, die Gesamtlösung festzulegen.

3.4. Lineare Ungleichungen in zwei Variablen

Wie bereits am Beginn des Kapitels angeführt, hat eine lineare Ungleichung in zwei Variablen die Normalform **ax + by** < **c** (≤, >, ≥, ≠), a, b ∈ R \ {0}, c ∈ R.

So wie bei den Gleichungen können wir diesen Zusammenhang der beiden Variablen x und y als Funktion betrachten und uns überlegen, welche Zahlenpaare (x,y) im Koordinatensystem diese Ungleichung erfüllen. Auch hier wird es nützlich sein, die Ungleichung solange umzuformen, bis sie in der allgemeinen Form **y** < **kx + d** (≤, >, ≥, ≠), k, d ∈ R, k ≠ 0, gegeben ist.

Zu dieser Ungleichung kennen wir bereits die entsprechende **Gleichung y = kx + d**, k, d ∈ R, k ≠ 0, und ihre Darstellung als Funktion von x und y im Koordinatensystem. Der Graph dieser Funktionsgleichung ist eine **Gerade**, jedes Zahlenpaar (x,y), das die Gleichung erfüllt, stellt einen Punkt dieser Geraden dar.

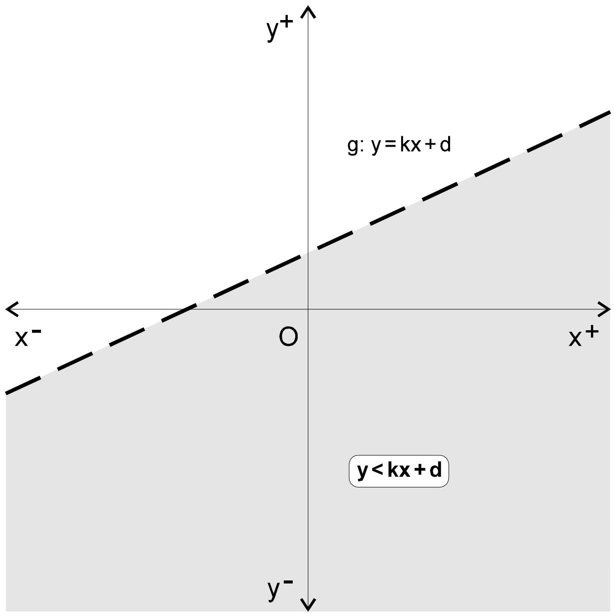
Die **Ungleichung y** < **kx + d** legt aber nun fest, daß die **y-Werte** nicht wie in der Geradengleichung gleich kx + d sein sollen, sodern **kleiner als kx + d**. Da aber die Gerade genau die Punktepaare y = kx + d darstellt, müssen die Punkte mit kleinerem y-Wert (kleiner als kx + d) **unterhalb der Geraden** liegen. Das gilt für alle Punkte unterhalb der Geraden.

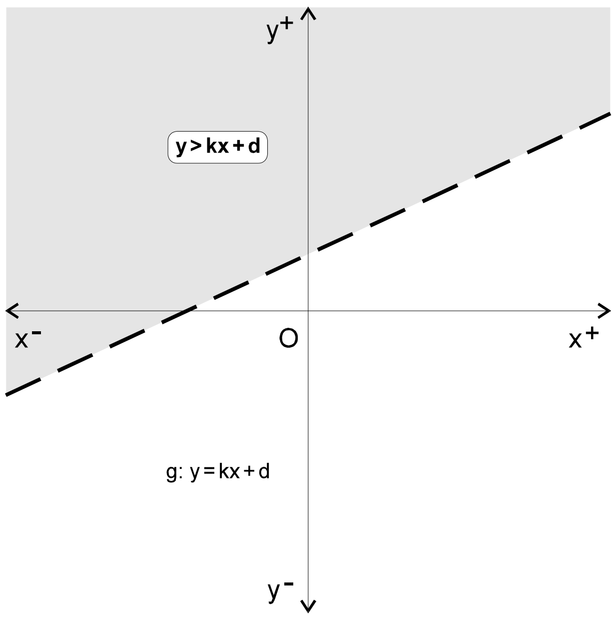
Das heißt also, daß die Ungleichung y < kx + d durch alle Punkte unterhalb der Geraden y = kx + d erfüllt wird. Die Gerade teilt damit die gesamte Koordinatenebene in zwei Teile, sogenannte **Halbebenen**. Die Gerade selbst wird in diesem Zusammenhang als **Randgerade** bezeichnet.

Ähnlich kann man sich die Fälle >, ≤, ≥, ≠ überlegen. Im Fall > liegen alle Punkte, die die Ungleichung **y** > **kx + d** erfüllen, **oberhalb** der Geraden. Bei den Fällen ≤ und ≥ erfüllt die Gerade selbst auch die Ungleichung und ist daher Teil der Lösungsfläche. Die Ungleichung y ≠ kx + d wird durch alle Punkte der Koordinateneben erfüllt, außer durch die Gerade y = kx + d selbst.

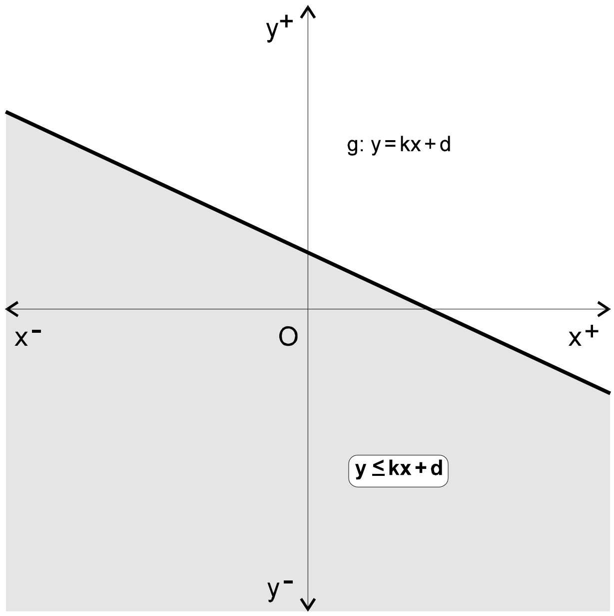
Graphisch wird die Lösungsfläche zumeist schraffiert dargestellt; gehört die Gerade zur Lösungsfläche, wird sie ununterbrochen gezeichnet, ansonsten strichliert.

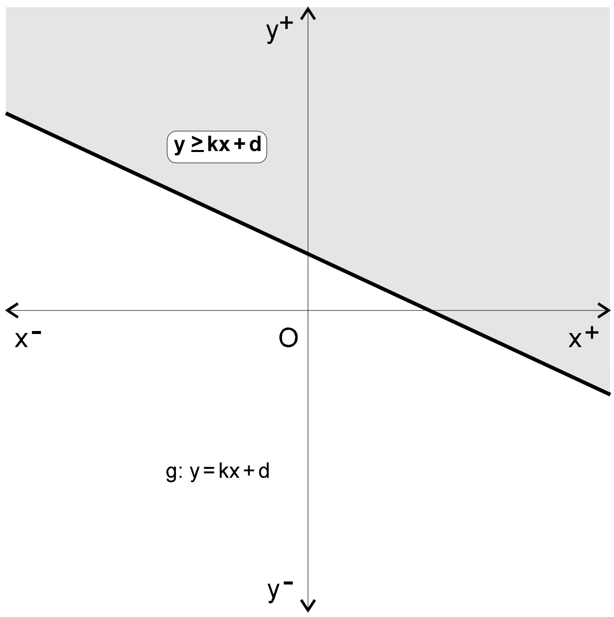
Sucht man also die graphische Lösung einer Ungleichung, so formt man die Ungleichung zuerst um, bis sie die Form y < kx + d (≤, >, ≥, ≠) hat, und zeichnet zunächst die zugehörige Geradengleichung y = kx + d. Dann entscheidet man abhängig vom Ungleichheitszeichen, welcher Teil der Koordinatenebene Lösungsfläche ist und ob die Gerade selbst dazugehört oder nicht.





Gehört die Gerade zur Lösungsfläche, so wird sie ununterbrochen gezeichnet:





Die Koordinaten jedes Punktes der Lösungsfläche erfüllen die ursprüngliche Ungleichung. Die Lösungsfläche selbst ist unbegrenzt groß, man spricht auch von einer offenen Halbebene.

3.5. Lineare Ungleichungssysteme in zwei Variablen

Ähnlich wie bei den linearen Gleichungssystemen bestehen lineare Ungleichungssysteme aus **mehreren Ungleichungen**. Da die Lösung einer Ungleichung ein Lösungsbereich und kein einzelnes Zahlenpaar ist, können lineare Ungleichssysteme durchwegs aus mehr Ungleichungen als Variablen bestehen. Das Auffinden der Zahlenpaare, die alle Ungleichungen erfüllen, erfolgt zweckmäßigerweise **graphisch**. Stellt man nämlich die einzelnen Lösungsflächen der vorkommenden Ungleichungen in einem Koordinatensystem dar, so ergibt sich im Normalfall ein Bereich, in dem die einzelnen Lösungsflächen einander überdecken. Die Koordinaten der Punkte dieses Bereichs erfüllen daher alle Ungleichungen und sind daher die Lösung des gesamten Ungleichungssystems. Die **Lösung** wird also **als Durchschnitt aller Teillösungen** ermittelt.

Beispiel: *Lösen Sie folgendes Ungleichungssystem:* *I:* $5x - 2y \geq 6$

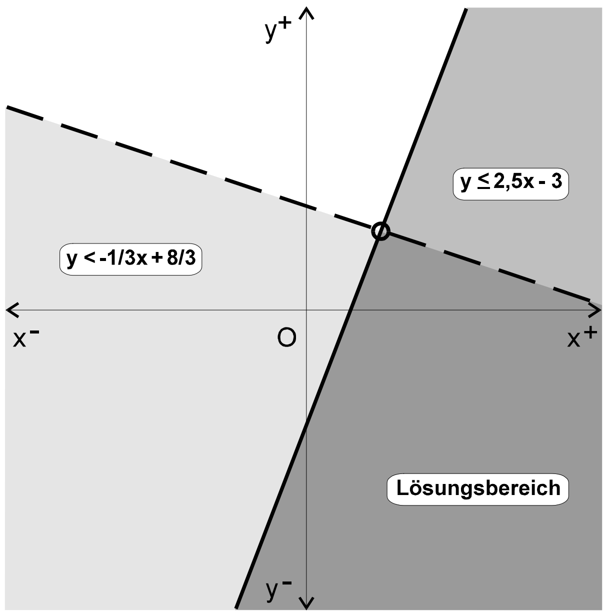
II: $x + 3y < 8$

Umformen: *I:* $y \leq \frac{5}{2}x - 3$

II: $y < -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

Randgeraden: *I:* $y = \frac{5}{2}x - 3$

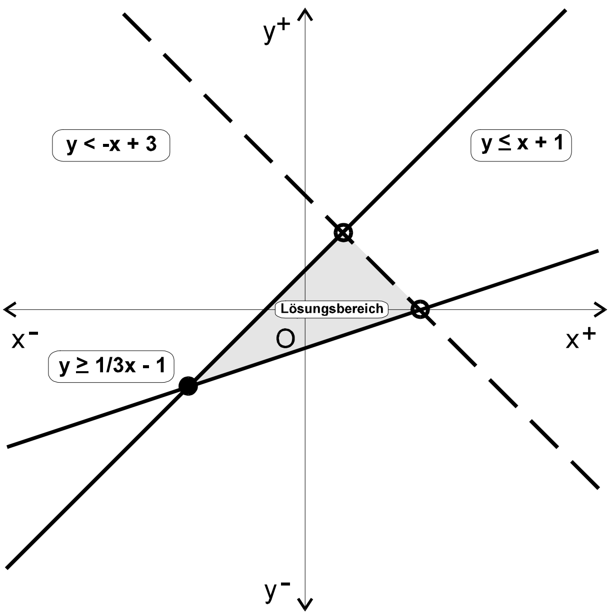
II: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$



Durch die beiden Ungleichungen ergeben sich zwei Halbebenen. Im dunkel schraffierten Bereich überschneiden sich die beiden Teillösungsbereiche der Ungleichungen. Dieser Bereich ist der Lösungsbereich des gesamten Ungleichungs-systems. Bei Ungleichung I gehört die Gerade zur Teillösungsfläche, bei Ungleichung II nicht. Die Ränder des Gesamtlösungsbereiches gehören daher entsprechend zur Gesamtlösung oder nicht. Der Schnittpunkt der beiden Randpunkte ist kein Element der Lösungsfläche, da er kein Element der Ungleichung II ist. Dies wird durch den hohlen Punkt angezeigt.

Beispiel: *Lösen Sie folgendes Ungleichungssystem:*

	I:	$x - 3y \le 3$
	II:	$x - y \ge -1$
	III:	$x + y < 3$
Umformen:	*I:*	$y \ge \frac{1}{3}x - 1$
	II:	$y \le x + 1$
	III:	$y < -x + 3$
Randgeraden:	*I:*	$y = \frac{1}{3}x - 1$
	II:	$y = x + 1$
	III:	$y = -x + 3$



Dieses Beispiel zeigt, daß durch mehrere Ungleichungen (zumindest drei) manchmal ein Lösungsbereich festgelegt wird, dem eine endliche Fläche in der Koordinatendarstellung entspricht. In diesem Fall nennt man den Lösungsbereich eine teilweise offene Dreiecksfläche, weil die Gerade bei Ungleichung III nicht Element der Teillösung dieser Ungleichung ist. Wegen der Übersichtlichkeit ist nur die Lösungsfläche schraffiert, die einzelnen Ungleichungen sind jedoch bei den zugehörigen Randgeraden im Feld der Teillösungen angeführt.

Auch die „Sonderfälle", daß die Lösung des Ungleichungssystems aus nur einem Element besteht, dem Schnittpunkt von Randgeraden (z.B. I: $x - 2y \ge -10$, II: $x + 2y \ge 6$, III: $3x + 2y \le 2$) oder daß die Teillösungsbereiche der einzelnen Ungleichungen einander nicht überschneiden, also die Lösung die leere Menge ist, sind denkbar.

3.6. Anwendung linearer Ungleichungssysteme

(a) Lineare Optimierung

Viele Probleme aus Industrie und Wirtschaft führen zu Aufgaben, in denen es sich darum handelt, aus einer Vielzahl von möglichen Lösungen jene Lösung zu ermitteln, die unter bestimmten Bedingungen die beste Lösung (die optimale Lösung) ist.

Die **lineare Optimierung** beschäftigt sich mit jenen mathematischen Verfahren, die den größten oder den kleinsten Wert (das **Maximum** oder das **Minimum**) einer **linearen Funktion** ermitteln. Wesentlich dabei ist, daß diese lineare Funktion meist durch **zusätzliche Bedingungen** eingeschränkt ist.

So ist z.B. ein Produktionsbetrieb sicherlich daran interessiert, einen maximalen Gewinn zu machen, es stehen jedoch die Arbeitskräfte und die Produktionsmaschinen in einem bestimmten Zeitraum nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung. Auch die Möglichkeit, die Produkte zu verkaufen (Nachfrage), kann eine Einschränkung darstellen (Absatzbeschränkung). Solche Einschränkungen sind meist als Ungleichungen gegeben, z.B. steht eine Maschine höchstens einen bestimmte Anzahl an Stunden zur Verfügung (≤ - Bedingung!).

Im folgenden wird die lineare Funktion, deren Maximum oder Minimum unter bestimmten Einschränkungen ermittelt werden soll, als **Zielfunktion** bezeichnen. Die in dieser Zielfunktion auftretenden Variablen nennt man **Entscheidungsvariablen**. Die erwähnten Einschränkungen für die Zielfunktion bezeichnet man als **Nebenbedingungen** (Restriktionen).

Bei den meisten konkreten Aufgaben aus der Praxis gibt es fast immer eine prinzipielle Einschränkung für die Entscheidungsvariablen. Diese können in der Regel keine negativen Werte annehmen, es läßt sich z.B. keine negative Anzahl an Stücken produzieren. Die entsprechenden Nebenbedingungen für die Entscheidungsvariablen (**$x \geq 0$ und $y \geq 0$**) nennt man daher auch **Nichtnegativitätsbedingungen**. Diese Nichtnegativitäsbedingungen schränken den Lösungsbereich für die graphische **Lösung** schon am Beginn der Aufgabe auf den **ersten Quadranten** ein.

Die im weiteren angeführten Beispiele beschränken sich auf zwei Variable, um die graphische Lösung zu ermöglichen. Auch die Wahl der Zahlenangaben wurde in diese Richtung - nicht immer der Wirklichkeit entsprechend - angepaßt. Oft muß dennoch ein entsprechender Maßstab auf den beiden Koordinatenachsen für eine sinnvolle Darstellung gewählt werden.

Beispiel: *Berechnen Sie das deckungsbeitragsmaximale Produktionsprogramm:*

Eine Firma erzeugt zwei Typen von Radiorekordern auf zwei Maschinen M I und M II. Der Erlös und die Kosten pro Stück sowie die Bearbeitungsstunden der beiden Maschinen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Erlös/Stk.	*Kosten/Stk.*	*Maschinen-stunden M I*	*Maschinen-stunden M II*
Typ I	*2.500,-*	*1.900,-*	*2*	*1*
Typ II	*2.000,-*	*1.600,-*	*1*	*2*

Die Maschinenkapazität der Maschine M I beträgt 1000 Stunden, für M II 1200 Stunden pro Produktionsintervall.

Der Absatz für beide Typen zusammen ist mit 700 Stück pro Periode begrenzt.

Erster Schritt zur Lösung dieser Aufgabe ist das Aufstellen der Zielfunktion. Bezeichnet man die Produktionszahl für Typ I mit x und die für Typ II mit y, und errechnet man weiters den Deckungsbeitrag für x und y aus der Tabelle (DB = E–K), so läßt sich eine Funktion für den Gesamtdeckungsbeitrag, die Zielfunktion, folgendermaßen formulieren:

Deckungsbeitragsfunktion: $$DB = 600x + 400y$$

Für diese Zielfunktion suchen wird den maximalen Wert: $$DB \Rightarrow MAX$$

Aus der Tabelle lassen sich nun zwei Nebenbedingungen ablesen. Maschine I wird zur Fertigung eines Radios vom Typ I zwei Stunden eingesetzt, zur Fertigung von Typ II eine Stunde. Zusätzlich ist bekannt, daß Maschine I insgesamt maximal 1000 Stunden (Maschinenkapazität) zur Verfügung steht. Werden nun x Radios vom Typ I und y vom Typ II produziert, so wird die Maschine 2x + y Stunden eingesetzt. Diese Zahl muß aber kleiner oder gleich 1000 sein. Das ergibt folgende Ungleichung:

Maschine I: $$2x + y \leq 1000$$

Ebenso erhält man die Bedingung für Maschine II:

Maschine II: $$x + 2y \leq 1200$$

Abschließend ergibt sich noch eine Bedingung durch die Tatsache, daß von beiden Radiotypen insgesamt höchstens 700 Stück verkauft werden können (Absatzbeschränkung). Produziert man x Stück vom Typ I und y Stück vom Typ II, so macht die Produktion nur dann Sinn, wenn die Summe von x + y die Stückzahl 700 nicht übersteigt.

Absatzbeschränkung: $$x + y \leq 700$$

(Zuweilen ist die Absatzbeschränkung für die Entscheidungsvariablen getrennt formuliert, z.B. vom Typ I können 500 Stück, vom Typ II 600 Stück verkauft werden. Das führt auch zu zwei getrennten Bedingungen $x \leq 500$ und $y \leq 600$.)

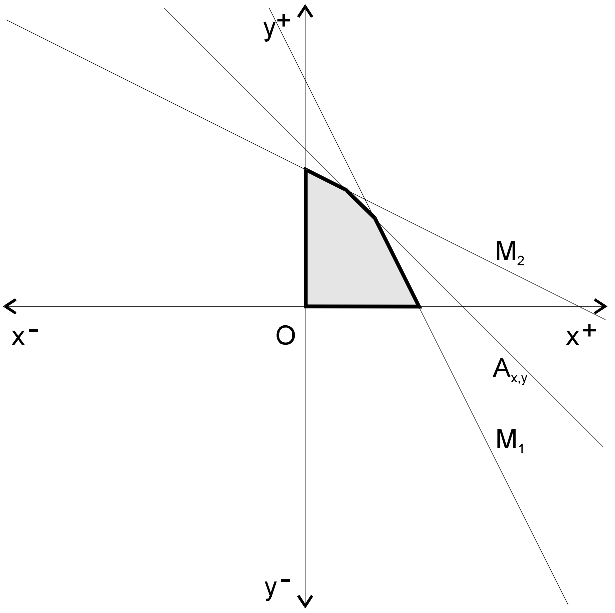
Nicht zu vergessen sind die beiden Nichtnegativitätsbedingungen für x und y, schließlich können nicht weniger als Null Stück (keine Produktion) von den einzelnen Radiotypen produziert werden.

Nichtnegativitätsbedingungen: $$x \geq 0$$ $$y \geq 0$$

Die einzelnen Bedingungen müssen nun wie bisher bei den Ungleichungssystemen entsprechend umgeformt und die Randgeraden ermittelt werden.

Bedingung	*Umformung*	*Randgerade*
$DB = 600x + 400y$	$y = -\frac{3}{2}x + \frac{DB}{400}$	$y = -\frac{3}{2}x + \frac{DB}{400}$
$2x + y \leq 1000$	$y \leq -2x + 1000$	$y = -2x + 1000$
$x + 2y \leq 1200$	$y \leq -\frac{1}{2}x + 600$	$y = -\frac{1}{2}x + 600$
$x + y \leq 700$	$y \leq -x + 700$	$y = -x + 700$
$x \geq 0$	$x \geq 0$	$x = 0$, *y-Achse*
$y \geq 0$	$y \geq 0$	$y = 0$, *x-Achse*

Der nächste Schritt zur Lösung der Aufgabe ist die graphische Darstellung der Bedingungen und das Auffinden des Lösungsbereiches.



Durch die fünf Nebenbedingungen wird eine fünfeckige Lösungsfläche im ersten Quadranten abgegrenzt. Alle Ränder und Eckpunkte der Lösungsfläche sind Teil der Lösungsfläche.

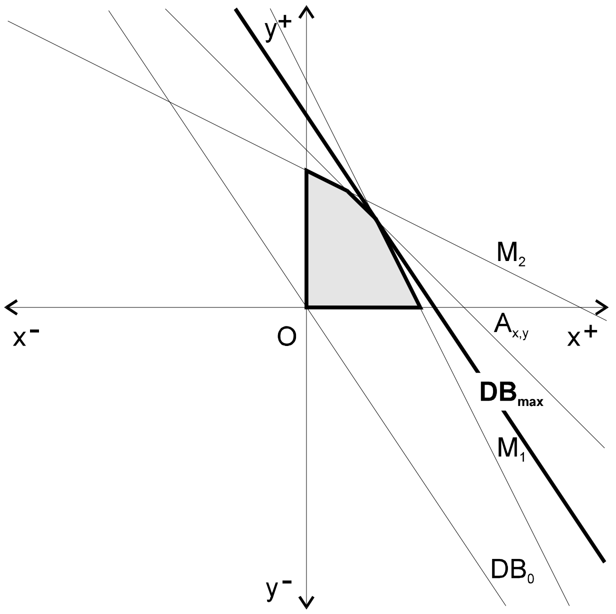
Die Koordinaten jedes Punktes in diesem Lösungsbereich erfüllen alle Nebenbedingungen dieses Produktionsbetriebes. Jedes dieser Zahlenpaare legt also ein mögliches Produktionsprogramm fest. Durch Einsetzen in der Deckungsbeitragsfunktion ergibt sich mit diesen Zahlenpaaren der entsprechende Deckungsbeitrag.

Diese Beiträge sind je nach Produktionsprogramm unterschiedlich groß, der größte unter all diesen Beträgen wäre die Lösung der Aufgabe.

Um das Produktionprogramm mit dem größten (maximalen) Deckungsbeitrag zu finden, betrachtet man die lineare **Deckungsbeitragsfunktion**. Wollte man diese in das Koordinatensystem einzeichnen, müßte man einen speziellen Wert für den Deckungsbeitrag (DB) wählen, damit die Funktion als ganzes bestimmt ist. Allerdings wären alle diese Geraden zueinander **parallel**, da sie sich nur im konstanten Glied d der allgemeinen Form y = kx+d unterscheiden.

Diese Eigenschaft kann man aber nützen, um jenen Punkt der Lösungsfläche zu bestimmen, für den der DB maximal wird. Zeichnet man nämlich eine der DB-Geraden ein, so kann man diese dann solange weg **vom Ursprung parallel verschieben**, bis sie die Lösungsfläche gerade noch in einem Punkt berührt.

Dieser Punkt wird zumeist ein **Eckpunkt** der Lösungsfläche sein. Seine Koordinaten stellen jenes Produktionsprogramm dar, das den maximalen Deckungsbeitrag liefert. Da diese Koordinaten nicht exakt aus der Zeichnung zu entnehmen sind (Maßstab!), müssen zur Berechnung die entsprechenden Geraden, durch die der Eckpunkt als **Schnittpunkt** festgelegt wird, **rechnerisch** geschnitten werden.



Einfach ist es, die Deckungsbeitragsfunktion für DB = 0 zu zeichnen. Dies ist eine Gerade durch den Ursprung, in diesem Beispiel $y = -1{,}5x$.

Verschiebt man diese Gerade vom Ursprung weg, so entstehen Geraden, denen ein immer höherer DB entspricht. Als äußersten Eckpunkt trifft man schließlich den Schnittpunkt von M_1 und $A_{x,y}$, die Randgeraden von der Bedingung von Maschine I und von der Absatzbeschränkung.

Diese beiden Geraden sind also noch rechnerisch zu schneiden, um das deckungbeitragsmaximale Produktionsprogramm zu erhalten.

Maschine I:	$2x + y \le 1000$	$y = -2x + 1000$
Absatzbeschränkung:	$x + y \le 700$	$y = -x + 700$

Schnittpunkt:

$$-2x + 1000 = -x + 700$$
$$x = 300, y = 400$$

Deckungsbeitrag:

$$DB = 600 \cdot 300 + 400 \cdot 400$$
$$DB = 340000$$

Das deckungsbeitragsmaximale Produktionsprogramm ist daher bei der Produktion von 300 Stück Radios vom Typ I und 400 Stück vom Typ II gegeben. Der Deckungsbeitrag beträgt dann DB = 340000.

Betrachtet man abschließend noch einmal die Nebenbedingungen, so kann man feststellen, daß durch die Lösung x = 300 und y = 400 die Maschine I voll ausgelastet wird. Auch der mögliche Absatz wird voll ausgenützt. Maschine II wird nicht voll ausgelastet, dort ergeben sich 100 Reststunden.

Durch Probieren kann man leicht feststellen, daß man kein Produktionsprogramm findet, das alle Ungleichungen erfüllt und gleichzeitig einen höheren Deckungbeitrag liefert, als das oben errechnete. Damit ist das Verfahren der linearen Optimierung ein eigentlich einfaches mathematisches Verfahren zur Lösung von komplizierten Aufgaben aus der Praxis.

Im vorigen Beispiel war die optimale Lösung jene, die zu einem maximalen Wert der Zielfunktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen führte. Dieser Aufgabentyp wird daher in der linearen Optimierung als **Maximumaufgabe** bezeichnet. Sucht man im Gegensatz dazu nach dem minimalen Wert als optimale Lösung, so spricht man von einer **Minimumaufgabe**.

Beispiel: *Für die Fütterung auf einer Hühnerfarm wird ein Vitaminzusatz benötigt, der vier Vitamine enthält; V1: mindestens 2000 Einheiten, V2: mindestens 4000 Einheiten, V3: mindestens 2400 Einheiten, V4: mindestens 7200 Einheiten.*
Zwei Firmen A und B bieten Vitaminzusätze zu 24,-/kg und 32,-/kg an.
In diesen Vitaminzusätzen sind pro kg folgende Mengen an benötigten Vitaminen enthalten:

	V1	*V2*	*V3*	*V4*
A	*200*	*1000*	*400*	*1400*
B	*1000*	*400*	*400*	*800*

Wie sind die Vitaminzusätze zu mischen, damit die Hühner die benötigten Mindestmengen erhalten, aber die Kosten minimal sind?

Bezeichnet man die Menge (in kg) für den Zusatz A mit x und die Menge für B mit y, so kann man eine Funktion für die Kosten aufstellen.

$$K = 24x + 32y$$

Durch die Anteile der Vitamine in den Zusätzen A und B sowie durch die Bedingung, daß die Hühner eine bestimmte Menge an Einheiten mindesten benötigen (≥ - Bedingung), ergeben sich für die Vitamine vier Nebenbedingungen.

Vitamin 1: $200x + 1000y \geq 2000$

Vitamin 2: $1000x + 400y \geq 4000$

Vitamin 3: $400x + 400y \geq 2400$

Vitamin 4: $1400x + 800y \geq 7200$

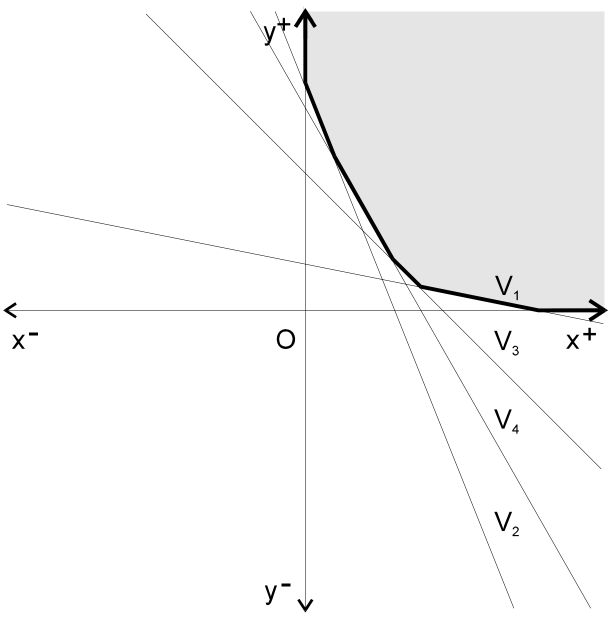
Auch in diesem Beispiel gelten die Nichtnegativitätsbedingungen.

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Wieder gewinnen wir aus den Bedingungen nach Umformung die Randgeraden.

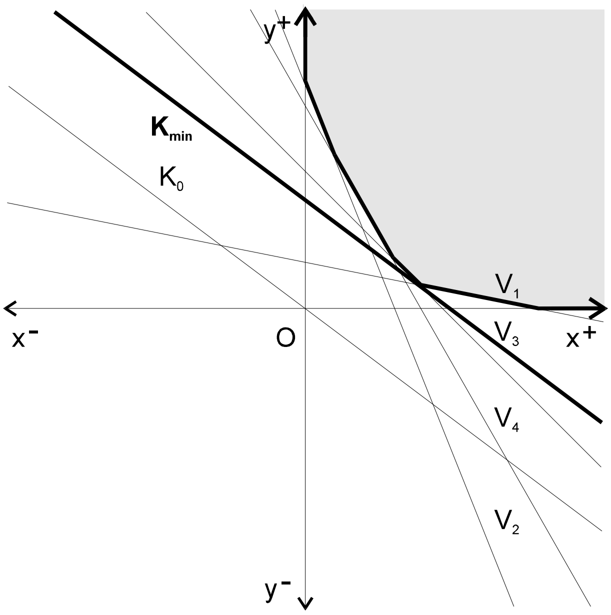
Bedingung	*Umformung*	*Randgerade*
$K = 24x + 32y$	$y = -\frac{3}{4}x + \frac{K}{32}$	$y = -\frac{3}{4}x + \frac{K}{32}$
$200x + 1000y \geq 2000$	$y \geq -\frac{1}{5}x + 2$	$y = -\frac{1}{5}x + 2$
$1000x + 400y \geq 4000$	$y \geq -\frac{5}{2}x + 10$	$y = -\frac{5}{2}x + 10$
$400x + 400y \geq 2400$	$y \geq -x + 6$	$y = -x + 6$
$1400x + 800y \geq 7200$	$y \geq -\frac{7}{4}x + 9$	$y = -\frac{7}{4}x + 9$
$x \geq 0$	$x \geq 0$	$x = 0$, y–Achse
$y \geq 0$	$y \geq 0$	$y = 0$, x–Achse



Durch die Bedingungen ergibt sich wieder ein Lösungsbereich im Koordinatensystem. Durch die $\geq$ - Bedingungen ist dieser Lösungsbereich jeweils oberhalb der Randgeraden (typisch für eine Minimumaufgabe), also eine nach oben offene Fläche.

Die Koordinaten jedes Punktes dieser Lösungsfläche erfüllen alle Ungleichungen. Eingesetzt in die Kostenfunktion erhält man für jedes dieser Zahlenpaare die entsprechenden Kosten.

Sucht man nun jenen Punkt, dessen Koordinaten zu den geringsten (minimalen) Kosten führen, so zeichnet man die Kostenfunktion (z.B. für K = 0) und verschiebt diese Gerade so lange vom Ursprung weg, bis sie erstmals die Lösungsfläche in einem Punkt berührt. Auch bei einer Minimumaufgabe ist dies zumeist ein Eckpunkt der Lösungsfläche.



Die Kostenfunktion für K = 0 lautet y = –0,75x. Diese Gerade geht durch den Ursprung.

Verschiebt man diese Gerade vom Ursprung weg parallel, so trifft man im Schnittpunkt von V_1 und V_3 erstmals einen Punkt der Lösungsfläche. Es handelt sich also um den Schnittpunkt der Randgeraden der Nebenbedingungen für Vitamin 1 und Vitamin 3.

Dieser Schnittpunkt ist daher noch rechnerisch zu ermitteln.

Vitamin 1: $200x + 1000y \geq 2000$ $\qquad y = -\frac{1}{5}x + 2$

Vitamin 3: $400x + 400y \geq 2400$ $\qquad y = -x + 6$

Schnittpunkt:

$$-\frac{1}{5}x + 2 = -x + 6$$
$$x = 5, y = 1$$

Kosten:

$$K = 24 \cdot 5 + 32 \cdot 1$$
$$K = 152$$

Genau genommen war in diesem Beispiel gefragt, wie die Vitaminzusätze zu mischen sind.

Die Vitaminzusätze A und B sind im Verhältnis 5 : 1 zu mischen.

(b) Simplexverfahren

Das vorige Verfahren der linearen Optimierung ist aufgrund des Bedarfs einer teilweisen graphischen Lösung in der Regel nur für zwei Unbekannte lösbar. Außerdem kann es durch entsprechend ungünstige Zahlenwerte zu Problemen bei der graphischen Umsetzung kommen (Genauigkeit). Das folgende Verfahren, das sogenannte **Simplexverfahren**, stellt eine **rechnerische Methode** zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben dar. Wir beschäftigen uns vorerst wieder mit einer **Maximumaufgabe**; die einzelnen Verfahrensschritte sollen am gleichen Beispiel wie im Abschnitt der linearen Optimierung verdeutlicht werden. Wir können daher bereits folgende Zielfunktion und Nebenbedingungen als gegeben voraussetzen:

***Beispiel**:*

Deckungsbeitragsfunktion:	$600x + 400y = DB$
Maschine I:	$2x + y \leq 1000$
Maschine II:	$x + 2y \leq 1200$
Absatzbeschränkung:	$x + y \leq 700$
Nichtnegativitätsbedingungen:	$x \geq 0, y \geq 0$

Diese Ausgangssituation besteht aus einer linearen Zielfunktion, den Nichtnegativitätsbedingungen und mehreren linearen Nebenbedingungen, die alle $\leq$ - Bedingungen sind. Diese stellt allgemein ein **Maximumproblem in Normalform** dar.

Für die rechnerische Lösung wandelt man die Ungleichungen in Gleichungen um, in dem man sogenannte **Schlupfvariablen** einführt, die in jeder der Ungleichungen die **Differenz zur kompletten Auslastung** darstellen.

Maschine I:	$2x + y + a = 1000$
Maschine II:	$x + 2y + b = 1200$
Absatzbeschränkung:	$x + y + c = 700$

Die Schlupfvariablen können, wie die Entscheidungsvariablen (Problemvariablen), keine negativen Werte annehmen. Dies würde schließlich bedeuten, daß die Entscheidungsvariablen die Ungleichung selbst nicht erfüllen. Daher ergeben sich insgesamt für alle Variablen die bekannten Nichtnegativitätsbedingungen.

Nichtnegativitätsbedingungen:	$x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

Bringt man auch die Zielfunktion auf die Form der Nebenbedingungen, so hat diese folgende Gestalt:

Deckungsbeitragsfunktion: $$600x + 400y - DB = 0$$

Wir haben nun ein Gleichungssystem von vier Gleichungen in sechs Variablen erhalten:

Maschine I: $$2x + y + a = 1000$$

Maschine II: $$x + 2y + b = 1200$$

Absatzbeschränkung: $$x + y + c = 700$$

Deckungsbeitragsfunktion: $$600x \quad 400y \quad DB \quad 0$$

Um die weitere Berechnung übersichtlich zu gestalten, stellt man dieses Gleichungssystem in einer Tabelle dar. Diese Tabelle bezeichnet man als **Ausgangstableau**.

Zeile	x	y	a	b	c	DB	NB
z_1	2	1	1				1000
z_2	1	2		1			1200
z_3	1	1			1		700
z_4	600	400				–1	0

Die Numerierung der Zeilen erfolgt nur für die weitere Erklärung und kann später auch weggelassen werden. In der Tabelle hat jede Variable und der Deckungsbeitrag eine eigene Spalte, in der Spalte NB steht der aktuelle Zahlenwert für die Nebenbedingungen.

Aus dieser Tabelle könnte man bereits eine Lösung für das Ungleichungssystem ablesen (schraffiert). Setzt man x und y gleich Null, so erhält man a = 1000, b = 1200, c = 700 und DB = 0. Dieser **Nullösung** entspricht die durch den Ursprung verlaufende DB-Gerade, sie bedeutet **Produktionsstillstand** (x = 0, y = 0 und DB = 0). Die Werte der Schlupfvariablen zeigen an, daß die Nebenbedingungen überhaupt nicht ausgelastet sind.

Die Nullösung entspricht daher gleichzeitig einem Eckpunkt der Lösungsfläche. Das folgende Verfahren stellt de fakto nichts anderes dar, als ein gezieltes „Abtasten“ der Eckpunkte der Lösungsfläche.

Sucht man nun nach einer verbesserten Lösung (die Nullösung ist sicherlich nicht optimal), muß zumindest eine der beiden Variablen x, y größer Null sein. Man wählt jene, für die der DB stärker steigt; in diesem Beispiel also x, da 600 größer ist als 400. Die so gefunde Spalte bezeichnet man als **Pivotspalte**.

Nach Zeile z_1 könnte x, selbst wenn alle anderen Variablen gleich Null wären, höchstens 1000 : 2 = 500 sein, nach Zeile z_2 höchstens 1200 : 1 = 1200 und nach Zeile z_3 höchstens 700 : 1 = 700. Zeile 1 stellt daher die stärkste Einschränkung für x dar, sie wird im folgenden zur **Pivotzeile**.

Im Schnitt von Pivotzeile und Pivotspalte ergibt sich das sogenannte **Pivotelement** (hier gleich 2).

Zeile	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*	*DB*	*NB*
z_1	*2*	*1*	*1*				*1000*
z_2	*1*	*2*		*1*			*1200*
z_3	*1*	*1*			*1*		*700*
z_4	*600*	*400*				*–1*	*0*

Will man für eine Variable einen Zahlenwert in dieser Tabelle ablesen, so darf nur in einer der Zeilen ein Koeffizient für diese Variable vorkommen (am besten 1), die Koeffizienten in den anderen Zeilen müssen Null sein (so konnten wir die Nullösung ablesen). Um dies für die Variable x zu erreichen, muß Zeile z_1 zu erst durch 2 (das Pivotelement) dividert werden. Danach wird die neue Zeile z_1' von Zeile z_2, z_3 und z_4 den Koeffizienten entsprechend abgezogen (Vergleich: Eliminationverfahren).

Zeile	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*	*DB*	*NB*
$z_1' = z_1:2$	*1*	*0,5*	*0,5*				*500*
$z_2' = z_2 - z_1'$	*0*	*1,5*	*–0,5*	*1*			*700*
$z_3' = z_3 - z_1'$	*0*	*0,5*	*–0,5*		*1*		*200*
$z_4' = z_4 - 600 \cdot z_1'$	*0*	*100*	*–300*			*–1*	*–300000*

Das neue Tableau ist nun folgendermaßen zu interpretieren: Die Variablen, bei denen in einer der Zeilen der Koeffizient 1 vorkommt und in den anderen Zeilen nur der Koeffizient 0, nehmen den Wert an, der in der Spalte NB steht; die anderen Variablen haben den Wert 0.
Im speziellen heißt das, daß y = 0 und a = 0, x = 500, b = 700 und c = 200, DB = 300000 (aus –DB = –300000) ist. Solange in der Zeile der Deckungsbeitragsfunktion sich noch positive Koeffizienten

befinden, ist die optimale Lösung jedoch noch nicht gefunden, da eine Erhöhung des Wertes von y auch zu einer Erhöhung des Deckungsbeitrages führt.

Die nächste Umrechnung des Tableaus wird wie die erste durchgeführt. Der Wert von y wirkt sich bei einer Änderung in der Zeile z_4' des DB am stärksten aus (er ist auch der einzige positive); damit ist die Pivotspalte gefunden. Division der Werte der Spalte NB durch die Werte der Pivotspalte führt wieder zur Pivotzeile; es ist dies jene Zeile, bei der sich der geringste positive Wert bei dieser Division ergibt. Da 500 : 0,5 = 1000, 700 : 0,5 = 467 und 200 : 0,5 = 400 ist dies die Zeile z_3'. Das neue Pivotelement lautet daher 0,5.

Zeile	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*	*DB*	*NB*
z_1'	*1*	*0,5*	*0,5*				*500*
z_2'	*0*	*1,5*	*–0,5*	*1*			*700*
z_3'	*0*	*0,5*	*–0,5*		*1*		*200*
z_4'	*0*	*100*	*–300*			*–1*	*–300000*

Die Pivotzeile wird nun mit 2 multipliziert, um für den Koeffizienten von y den Wert 1 zu erzielen. Dannach wird die neue Zeile z_3'' von den anderen Zeilen den Koeffizienten entsprechend abgezogen, um in diesen Zeilen den Wert 0 als Koeffizient für y zu erhalten.

Zeile	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*	*DB*	*NB*
$z_1'' = z_1' - 0{,}5 \cdot z_3''$	*1*	*0*	*1*		*–1*		*300*
$z_2'' = z_2' - 1{,}5 \cdot z_3''$	*0*	*0*	*1*	*1*	*–3*		*100*
$z_3'' = 2 \cdot z_3'$	*0*	*1*	*–1*		*2*		*400*
$z_4'' = z_4' - 100 \cdot z_3''$	*0*	*0*	*–200*		*–200*	*–1*	*–340000*

Sind in Zeile z_4'' nun alle Koeffizienten für die Variablen kleiner oder gleich Null, so ist die optimale Lösung gefunden.

Diese lautet nun x = 300, y = 400 und DB = 340000. Aus dem Tableau kann man weiters noch ablesen, daß a = 0, b = 100 und c = 0; das bedeutet, daß Maschine I und der Absatz voll ausgenützt werden und bei Maschine II 100 Maschinenstunden nicht genutzt werden.

Die negativen Koeffizienten in der Zeile z_4'' des Deckungsbeitrages weisen darauf hin, daß eine **Kapazitätserweiterung** bei Maschine I um eine Stunde bzw. die Möglichkeit zur Absatzerweiterung um ein Stück eine Erhöhung des Deckungsbeitrages um je 200 GE ermöglichen würde. Ein Erhöhung der Maschinenstunden bei Maschine II hätte keine Auswirkung, schließlich wird die Kapazität bereits mit dem aktuellen Wert nicht ausgenützt.

Das beschriebene Verfahren läßt sich mit jeder **beliebigen Anzahl an Variablen** in dieser Form durchführen, stets ist der Wert einiger der Variablen am Ende der Berechnung gleich Null. Nur dadurch ist ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen überhaupt eindeutig lösbar. Dies kann sogar für eine der Entscheidungsvariablen zutreffen; das bedeutet letztendlich, das die Produktion dieses Typs keinen Sinn macht (bezogen auf die Optimierung des Deckungsbeitrages).

Das **Simplexverfahren** läßt sich auch auf **Minimumaufgaben** erweitern; die mathematische Anpassung des Algorithmus macht aber ein derart tiefgreifendes Eindringen in die Aufgabenstellung notwendig, das den Rahmen dieses Skriptums übersteigen würde.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sowohl das Verfahren der linearen Optimierung unter teilweiser graphischer Lösung wie auch das Simplexverfahren selbst zwei eindrucksvolle Verfahren zur Lösung **praxisnaher Aufgaben** darstellen. Beide Verfahren werden in dieser Form - entsprechend angepaßt und meist unter einer gößeren Zahl an Nebenbedingungen - in wirtschaftlichen Bereichen angewendet.

Anhang: Übungsbeispiele zum 3. Kapitel

3/1 Geben Sie folgende Mengen in der Intervallschreibweise an:

a) $A = \{x \in R \mid -4 < x < 6\}$

b) $B = \{x \in R \mid 5{,}2 \leq x < 5{,}3\}$

c) $C = \{x \in R \mid -0{,}1 \geq x \geq -0{,}11\}$

d) $D = \{x \in R \mid (5 < x) \wedge (x \leq 10)\}$

3/2 Geben Sie folgende Mengen in der Intervallschreibweise an:

a) $A = \{x \in Q \mid 0 < x \leq 8\}$

b) $B = \{x \in N \mid 4{,}8 \leq x < 11{,}2\}$

c) $C = \{x \in R \mid -5 \geq x\}$

d) $D = \{x \in Z \mid x < 10000)\}$

3/3 Lösen Sie folgende Ungleichungen über den Grundmengen Z, Q^+ und R:

a) $2t - 7 < t + 11$

b) $3x - 13 > 4x - 7$

c) $31a + 95 \geq 49a - 67$

d) $3r + 2 \leq 9r - 5$

3/4 Lösen Sie folgende Ungleichungen über den Grundmengen N, P und R:

a) $3(3x - 1) - 19 \geq 7(x - 3) - 5(2x + 3) + 6x - 7$

b) $\frac{17 - 3x}{5} + 38 < 4x - 13$

c) $\frac{4(x-2)}{3} - \frac{5(x+3)}{4} + 3x - 7 < \frac{17x + 11}{6}$

d) $\frac{8x - 7}{9} - \frac{x + 5}{6} > \frac{17 - 3x}{18} - \frac{5x - 11}{12} + 2$

3/5 Lösen Sie folgende Ungleichungen über der Grundmenge R:

a) $(8-5z)^2 + 16(3z-2)^2 < (19-13z)^2 + 655$

b) $(2w-9)^2 > (5w+2)(w-3) - w^2 + 29$

c) $d(d-2)^2 \leq (d^2+8)^2 - d^2(6d+4) - 8(d+8)$

d) $(f-5)^3 \geq f(f-8)^2 + f(f-39) + 5(10f-7)$

3/6 Lösen Sie folgende Ungleichungsaufgaben:

a) Von welchen natürlichen Zahlen ist jeweils das Fünffache kleiner als die um 32 vermehrte Zahl?

b) Von welchen geraden natürlichen Zahlen kleiner 30 ist das Dreifache der Zahl größer als die um 40 vermehrte Zahl?

c) Zerlegen Sie die Zahl 17 in zwei ganzzahlige Summanden derart, daß die Differenz ihrer Quadrate größer als 150 ist.

d) Welche zweiziffrigen Zahlen mit der Zehnerziffer 3 sind kleiner als ihre vierfache Quersumme?

3/7 Lösen Sie folgende konjunktive Ungleichungssysteme:

a) $(2x-5 < 9) \wedge (3x+1 > 10)$

b) $(5x+8 \geq -4) \wedge (8x-5 < 8)$

c) $6-2x < 2x+3 \leq x+2$

d) $x-3 \leq \frac{x}{5} + 1 \leq \frac{2x+7}{6}$

3/8 Lösen Sie folgende disjunktiven Ungleichungssysteme:

a) $(8x+1 > 3x+3) \vee (7x+8 < 15x-6)$

b) $4x-1 > 6(5x+2) > 0$

c) $\left(\frac{2}{3}x + 10 \leq -10 - \frac{8}{5}x\right) \vee (6x-11 < 2x+9)$

d) $2x+12 \geq 2(2x-3) + 3(x-3) - 2x + 15 > x+6$

3/9 Lösen Sie folgende Bruchungleichungen:

a) $\frac{x}{x+3} < 1$

b) $\frac{x+4}{x-3} \geq -2$

c) $\frac{-x+5}{2x-7} < -3$

d) $\frac{\frac{2}{3}x+10}{\frac{4}{5}x-5} \geq -2$

3/10 Lösen Sie folgende Bruchungleichungen:

a) $\frac{x+3}{12x-8} - \frac{x-5}{3x-2} > 5$

b) $\frac{2x-7}{3+5x} + \frac{2}{3} \leq \frac{4x-9}{15x+9}$

c) $\frac{x-16}{x-17} + \frac{x-14}{x-9} \geq 2$

d) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} > \frac{x-19}{x^2-1}$

3/11 Stellen Sie die Lösung der folgenden Ungleichungen graphisch dar:

a) $3x - 4x < -8$

b) $5x \leq 2 - 2y$

c) $-6x + 4y \geq 5$

d) $7x > -4y$

3/12 Stellen Sie die Lösung der folgenden Ungleichungen graphisch dar:

a) $3x - 8 < 0$

b) $5y + 10 > 0$

c) $-2x \geq 4$

d) $3y \leq 8$

3/13 Stellen Sie die Lösung folgender Ungleichungssysteme graphisch dar:

a) I: $-2x+5y \le 11$	II: $x+y \ge 5$	
b) I: $3x-4y \le -8$	II: $4y > 3x-4$	
c) I: $2x+5y \le 15$	II: $4x > -10y-20$	
d) I: $3x+2y \ge 6$	II: $-3x+5y \le 15$	

3/14 Stellen Sie die Lösung folgender Ungleichungssysteme graphisch dar:

a) I: $2x-3y \ge -12$	II: $2x+5y > 4$	III: $2x < 4-y$
b) I: $3x-y \le 8$	II: $-x+y \le 2$	III: $x+y \ge 4$
c) I: $-x+2y \le 3$	II: $x+y \le 6$	III: $x-y \ge 1$
d) I: $2x+3y < 24$	II: $2x-2y > -1$	III: $x-3y \le -9$

3/15 Stellen Sie die Lösung folgender Ungleichungssysteme graphisch dar:

a) I: $-2x+2y > 1$	II: $4x+3y \le 6$	III: $x \le -1$
b) I: $5x-3y \le 9$	II: $x+6y \ge 15$	III: $x-5y \ge -7$
c) I: $x-2y \ge -10$	II: $x+2y \ge 6$	III: $3x+2y < 2$
d) I: $3x-4y \le 4$	II: $2x+3y \ge 14$	III: $4x-11y \ge 22$

3/16 Stellen Sie Ungleichungssysteme auf, so daß Sie folgende Lösung erhalten:

a) I. Quadrant

b) II. Quadrant

c) III. Quadrant

d) IV. Quadrant

3/17 Stellen Sie Ungleichungssysteme auf, so daß Sie einen Lösungsbereich mit folgender Form erhalten:

a) ein Dreieck

b) eine Rechteck

c) ein Quadrat

d) ein Fünfeck

3/18 Berechnen Sie die Eckpunkte der Lösungsflächen aus Beispiel 3/17.

3/19 Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem (Z=Zielfunktion):

a) $Z = 3x + 4y\,(\text{Max}),\ x + 3y \leq 24,\ 2x + 3y \leq 30,\ x + y \leq 15,\ y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

b) $Z = 2x + 3y\,(\text{Min}),\ x + y \geq 10,\ x + 2y \geq 14,\ y \leq x + 4,\ 2y \geq x - 2$

c) $Z = x + 2y\,(\text{Max}),\ x + y \leq 14,\ 2x + 5y \leq 55,\ 4x + 3y \leq 51,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

d) $Z = 3x + 2y\,(\text{Min}),\ 3x + 4y \geq 24,\ 2x + y \geq 9,\ x + y \geq 7,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

3/20 Eine Firma erzeugt zwei Typen von Radiorekordern auf zwei Maschinen M I und M II. Der Erlös und die Kosten pro Stück sowie die Bearbeitungsstunden der beiden Maschinen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Erlös/Stk.	Kosten/Stk.	Stunden M I	Stunden M II
Typ I	30,-	20,-	1	1
Typ II	45,-	30,-	0,75	2

Die Maschinenkapazität der Maschine M I beträgt 1200 Stunden, für M II 2000 Stunden. Der Absatz ist sowohl für Typ I als auch für Typ II mit je 800 Stück beschränkt.

Berechnen Sie mittels linearer Optimierung das deckungsbeitragsmaximale Produktionsprogramm.

3/21 Eine Fabrik erzeugt zwei Produkte A und B. Jedes Stück wird durch drei Maschinen gefertigt. Die benötigten Zeiten in Stunden für das Produkt A sind: M_1 1 Stunde, M_2 2 Stunden, M_3 2 Stunden; für das Produkt B: M_1 3 Stunden, M_2 3 Stunden, M_3 1 Stunde. Für die drei Maschinen stehen insgesamt folgende maximale Stundenzahlen zur Verfügung: M_1 15 Stunden, M_2 18 Stunden, M_3 12 Stunden.

Ein Stück A bringt ÖS 1.400,-, ein Stück B ÖS 2.800,- Gewinn.

Wie viele Stücke A und B muß die Fabrik erzeugen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Wie groß ist dieser Gewinn?

3/22 Eine Automobilfabrik erzeugt PKWs der Type A und der Type B. Täglich können höchstens 600 Stück der Type A und höchstens 400 Stück der Type B hergestellt werden. Die Reifenfabrik kann täglich höchstens 3500 Reifen liefern. Bei einem Fahrzeug der Type A werden 20000 GE, bei einem der Type B 50000 GE verdient. Wieviele Autos der Type A und der Type B müssen hergestellt werden, damit der Tagesgewinn maximal wird?

3/23 In einer Mastanstalt mästet man Gänse und Hühner. Eine Gans frißt täglich im Mittel 200 g, ein Huhn 100 g eines Mischfutters. Vom Mischfutter können täglich höchstens 1000 kg verfüttert werden. Aus Platzgründen kann die Gesamtzahl an Tieren höchstens 6500 betragen. Der beim Verkauf von Gänsen und Hühnern erzielte Gewinn ergibt, auf die einzelnen Masttage aufgeteilt, 90 GE für eine Gans und 60 GE für ein Huhn. Ermitteln Sie, wieviele Gänse und Hühner gehalten werden müssen, damit der Tagesgewinn maximal wird.

3/24 Ein Betrieb erzeugt Mikroprozessoren in zwei verschiedenen Qualitäten Q_1 und Q_2. Die Herstellung erfolgt in zwei Produktionsprozessen P_1 und P_2, wobei die Bearbeitungszeiten von der gewünschten Qualität abhängen. Für Q_1 dauert der Prozeß P_1 durchschnittlich 2 Minuten, der Prozeß P_2 4 Minuten; für die Qualität Q_2 sind es 6 Minuten bzw. 2 Minuten. Die wöchentliche Arbeitszeit beträgt 40 Stunden. Der Stückgewinn beträgt für Mikroprozessoren der Qualität Q_1 ÖS 40,-, für die der Güte Q_2 ÖS 30,-. Die Unternehmensleitung möchte nun wissen, für welches Produktionsprogramm der Gewinn am größten ist?

3/25 Ein landwirtschaftlicher Weidebetrieb hat sich auf die Haltung von Kühen und Jungvieh spezialisiert. In den Ställen können insgesamt höchstens 700 Tiere gehalten werden. Für die Ernährung einer Kuh sind 2000 m², für ein Stück Jungvieh 1000 m² Weideland notwendig. Insgesamt hat der Betrieb 1 km² Weideland zur Verfügung. Für die Pflege der Kühe und des Jungviehs stehen 24 Arbeiter zur Verfügung, die jeweils 2500 Arbeitsstunden im Jahr leisten. Für eine Kuh sind 50,

für ein Stück Jungvieh sind 100 Arbeitsstunden im Jahr notwendig. Der Gewinn für eine Kuh beträgt S 600,-, bei einem Stück Jungvieh S 400 pro Jahr.
Wieviel Stück Jungvieh und wieviele Kühe muß der Betrieb halten, damit der Gewinn möglichst groß wird?

3/26 Ein chemischer Industriebetrieb benötigt zur Weiterverarbeitung die drei Mineralien M I, M II, M III. Er gewinnt diese selbst aus den Rohstoffen R I und R II. Die Ausbeute in Tonnen aus jeweils einer Tonne R I bzw. R II ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	M I	M II	M III	Einkaufspreis/t
R I	0,1	0,03	0,04	1500,-
R II	0,45	0,03	0,01	3500,-

Monatlich werden mindestens 45 t M I, 7,5 t M II und 4 t M III benötigt. Das Unternehmen steht nun vor der Frage, welche Rohstoffmengen es ankaufen soll, damit die Kosten möglichst gering sind.

3/27 Aus zwei Legierungen L_1 und L_2 der Metalle M_1, M_2 und M_3 soll durch Zusammenschmelzen eine neue Legierung hergestellt werden, deren Herstellungskosten möglichst gering sind und die die in der Tabelle angegebenen Mengen der einzelnen Metalle sowie die benötigten Mindestmengen enthält:

	M_1	M_2	M_3	Kosten/kg
L_1	50%	30%	20%	60
L_2	30%	30%	40%	80
Mindestmenge	15kg	12kg	11kg	

Wieviel kg von jeder Legierung muß verwendet werden, damit die Kosten minimal sind?

3/28 Ein Patient braucht mindestens 10, 32 bzw. 42 Einheiten der Antibiotika α, β bzw. γ. Zwei Breitbandmedikamente A und B, die diese Antibiotika enthalten, stehen zur Verfügung. Eine Kapsel A enthält 1, 2 bzw. 6 Einheiten von α, β bzw. γ; eine Kapsel B enthält 1, 8 bzw. 3 Einheiten α, β bzw. γ. Eine Kapsel A enthält aber auch 10 mg und B 20 mg eines die Leber belastenden Stoffes. Wieviele Kapseln von A und wieviele von B soll der Arzt verschreiben, um den Patienten entsprechend zu behandeln, aber die Nebenwirkungen so gering wie möglich zu halten?

3/29 Überlegen Sie, welche Werte die richtige Lösung darstellen, wenn die Optimierungsaufgabe keine ganzzahligen Werte liefert, aber nur solche zulässig sind.

3/30 Berechnen Sie das Optimierungsproblem von Aufgabe 3/20 nach der Simplexmethode. Interpretieren Sie das Lösungstableau auch nach den entsprechenden Auslastungen der Nebenbedingungen.

3/31 Berechnen Sie das Optimierungsproblem von Aufgabe 3/21 nach der Simplexmethode. Interpretieren Sie das Lösungstableau auch nach den entsprechenden Auslastungen der Nebenbedingungen.

3/32 Berechnen Sie das Optimierungsproblem von Aufgabe 3/22 nach der Simplexmethode. Interpretieren Sie das Lösungstableau auch nach den entsprechenden Auslastungen der Nebenbedingungen.

3/33 Berechnen Sie das Optimierungsproblem von Aufgabe 3/23 nach der Simplexmethode. Interpretieren Sie das Lösungstableau auch nach den entsprechenden Auslastungen der Nebenbedingungen.

3/34 Berechnen Sie das Optimierungsproblem von Aufgabe 3/24 nach der Simplexmethode. Interpretieren Sie das Lösungstableau auch nach den entsprechenden Auslastungen der Nebenbedingungen.