2. GLEICHUNGEN, GLEICHUNGSSYSTEME

2.1. Gleichungen

(a) Definition

Im vorigen Kapitel wurde der Begriff des Terms erläutert, im nächsten Abschnitt soll nun der Fall betrachtet werden, wenn zwei Terme miteinander „verglichen“ - das heißt gleichgesetzt werden.

> Sind T_1 und T_2 Terme, so nennt man $\mathbf{T_1 = T_2}$ eine **Gleichung**.
> Gleichungen zwischen Zahlen sind wahre oder falsche Aussagen.
> Gleichungen mit Variablen sind Aussageformen, die erst nach Belegen der Unbekannten mit Zahlen aus einer Grundmenge zu wahren oder falschen Aussagen werden.

Um rechnerisch die Werte für die Variablen zu ermitteln, für die die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, ist es notwendig, die Gleichung nach gewissen Rechenregeln umzuformen. Da jede dieser Umformungen die Gleichung in eine neue Gleichung mit denselben Lösungen überführen muß, nennt man die im folgenden beschriebenen Umformungen **Äquivalenzumformungen**.

(b) Äquivalenzumformungen

$\forall b \in R:$	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 + b = T_2 + b$	Addition der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
$\forall b \in R:$	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 - b = T_2 - b$	Subtraktion der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
$\forall c \in R \setminus \{0\}:$	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot c = T_2 \cdot c$	Multiplikation mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
$\forall c \in R \setminus \{0\}:$	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \div c = T_1 \div c$	Division durch die gleiche Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.

Die angeführten Äquivalenzumformungen sind auch mit Termen T anstatt der Zahlen b und c durchführbar, wenn die Bedingung $T \neq 0$ bei der Multiplikation und der Division berücksichtigt wird.

„Lösen einer Gleichung“ bedeutet nun, daß eine Gleichung mittels Äquivalenzumformungen solange umgeformt wird, bis die Variable isoliert auf einer der beiden Seiten der Gleichung steht. Man gewinnt aus der sogenannten **impliziten Gleichung** die sogenannte **explizite Gleichung**.

Beispiel:

- implizite Darstellung $y - 3 = 8$

$$y - 3 = 8 \ | +3 \iff y - 3 + 3 = 8 + 3$$

- explizite Darstellung $y = 11$

- $$\frac{x}{12} = 13 \ | \cdot 12 \iff x = 156$$

- $$7 \cdot x = 42 \ | \div 7 \iff x = 6$$

- $$3a + 8 = 2a + 11 \ | -2a \iff a + 8 = 11 \ | -8 \iff a = 3$$

- $$\frac{5}{8}x + 4 = \frac{2}{3}x - 3 \ | \cdot 24$$

$$3 \cdot 5x + 24 \cdot 4 = 8 \cdot 2x - 24 \cdot 3 \iff 15x + 96 = 16x - 72 \ | -15x$$

$$96 = x - 72 \ | +72 \iff 168 = x$$

In den bisherigen Beispielen kam die Variable immer nur mit der Hochzahl 1 vor. Gleichungen dieser Art nennt man lineare Gleichungen; die große Bedeutung aufgrund der vielschichtigen Anwendung dieses Gleichungstypes wird im Laufe dieses Kapitels noch geklärt werden.
Allgemein läßt sich dieser Gleichungstyp folgendermaßen darstellen:

Unter der allgemeinen Form (**Normalform**) einer linearen Gleichung mit einer Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt: **ax + b = 0** mit $a, b \in R$; $a \neq 0$
Man bezeichnet a als den Koeffizienten von x und b das absolute (konstante) Glied.

Gleichung müssen nicht immer in einer Unbekannten gehalten sein; tatsächlich kommt es in den Anwendungsbereichen eher selten vor, daß Probleme auf ein derartig einfaches System zurückgeführt werden können.
Gleichungen in zwei Variablen stellen einen Zusammenhang (Abhängigkeit) zwischen eben diesen Variablen dar; eine Belegung einer der Variablen mit einem Zahlenwert führt die Gleichung in eine lineare Gleichung mit einer Variablen über, für die dann eine Lösung berechenbar ist.
Allgemein läßt sich dieser Gleichungstyp folgendermaßen darstellen:

Unter der allgemeinen Form (**Normalform**) einer linearen Gleichung in zwei Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt: $\mathbf{ax + by = c}$ $\qquad a, b \in R \setminus \{0\}, c \in R$
Oft wird diese Gleichung in der expliziten Form: $\mathbf{y = kx + d}$ angegeben. $\qquad k, d \in R, k \neq 0$

Weiters kann man diesen Gleichungstyp noch in Abhängigkeit vom Zahlenwert von c unterscheiden:
$ax + by = 0$ homogene lineare Gleichung ($c = 0$) $\qquad$ $ax + by = c$ inhomogene lineare Gleichung ($c \neq 0$)

Gleichungen mit mehreren Variablen (z.B. $3x+4y-6 = 2a-z$) und Gleichungen höheren Grades (Hochzahl der Variablen größer als eins, z.B. $x^3-3x^2+2x = 5$) werden aufgrund der aufwendigeren Lösungsverfahren im Laufe des Skriptums eigens behandelt.

(c) Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge

Grundmenge

Oft sind für Aufgaben nur Lösungen aus einem bestimmten Zahlenbereich zulässig oder interessant, diese Zahlenmenge nennt man **Grundmenge** für diese Aufgabe.

Unter der Grundmenge G versteht man die Menge von Zahlen, aus der man in die Gleichung für die Variablen einsetzen darf.

In den bisherigen Beispielen haben wir meist stillschweigend G = R vorausgesetzt, diese Regelung werden wir auch beibehalten, insoferne nicht ausdrücklich eine andere Grundmenge angegeben ist.

Definitionsmenge

Die Grundmenge kann - ähnlich wie bisher bei Termen - durch die **Definitionsmenge** eingeschränkt werden, etwa beim Vorkommen von Bruchtermen in einer Gleichung. Dann muß wieder bestimmt werden, welchen Wert aus der Grundmenge die Variable im Nenner nicht annehmen darf (Division durch Null nicht definiert!).

Die Definitionsmenge D ist die Menge jener Elemente aus der Grundmenge G, für die beide Seiten der Gleichung eine eindeutig bestimmte Zahl ergeben.

Die Definitionsmenge ist immer eine Teilmenge der Grundmenge.

Lösung, Lösungsmenge

Erst nach Bestimmung der Definitionsmenge wird die Gleichung gelöst. Durch Äquivalenzumformungen erhält man eine explizite Darstellung für die Variable mit einer eindeutigen Zahl auf der anderen Seite der Gleichung. Diese Zahl nennt man dann eine **Lösung** der Gleichung, wenn die Probe mittels Einsetzen dieser Zahl in beide Seiten (linke Seite (LS) und rechte Seite (RS) getrennt) der Gleichung zum gleichen Ergebnis auf beiden Seiten (LS = RS) führt. Weiters muß noch überprüft werden, ob die rechnerische Lösung auch Element der Definitionsmenge ist. Erst dann kann man die Lösungsmenge angeben.

Die Lösungsmenge ist die Menge aller Lösungen der Gleichung, die auch Element der Definitionsmenge sind.

Gibt es keine Lösung oder ist keine der Lösungen Element der Definitionsmenge, so ist die Lösungsmenge die leere Menge.

Somit ergibt sich ein logischer Ablauf beim Lösen von Gleichungen:

Grundmenge → Einschränkungen → Definitionsmenge Lösen der Gleichung → Probe / Übereinstimmung mit Definitionsmenge → Lösungsmenge

2.2. Arten von Textaufgaben

Im folgenden sollen die wesentlichen unterschiedlichen Arten von Textaufgaben, abhängig von der Problemstellung, vorgestellt werden, die sich alle auf das Lösen von linearen Gleichungen reduzieren lassen.

Textaufgaben

Ein wesentlicher Vorteil, den Gleichungen bieten ist der, daß komplexe Texte durch eine unheimlich knappe Formulierung wiedergegeben werden können. Das Finden dieser Formulierung - der Gleichung - ist meistens mehr Schwierigkeit als das spätere Lösen der gefundenen Gleichung. Daher ist es ratsam, sich in der Übungsphase zuerst die wichtigen Begriffe im Text hervorzuheben, dann eindeutig festzulegen, was die Variable bzw. die gesuchte Größe ist, und dann erst die Gleichung aufzustellen.
An dieser Stelle erfolgt die Festlegung der Grundmenge und der Definitionsmenge.
Nach Lösen der Gleichung sollte man in der Lage sein, eventuell in einem Antwortsatz eine Lösung bzw. die Lösungsmenge für die Problemstellung (was ist gefragt?) anzugeben.
Ein Abschätzen der Lösung am Beginn der Berechnung und eine Probe mit dem errechneten Wert am Ende (linke Seite (LS) und rechte Seite (RS) getrennt) kann zusätzlich Sicherheit verschaffen.

Wir unterscheiden nun folgende Arten von Textaufgaben:

(a) Beziehungen zwischen Zahlen

Eine **zweiziffrige** Zahl hat **6 als Einerziffer; vertauscht** man die Ziffern, so erhält man das $\mathbf{\frac{7}{4}}$ **fache** der ursprünglichen Zahl. Berechnen Sie diese Zahl.

Überlegungen zum Lösungsansatz: Eine zweiziffrige Zahl mit 6 als Einerziffer hat folgende Gestalt: z6. Hierbei stellt z die Zehnerziffer(!) dar. Der Wert der Zahl ergibt sich dann als 10z+6. Daher:

Zehnerziffer	Einerziffer	Wert der Zahl	Probe nach Rechnung
z	6	10z+6	$36 \cdot \frac{7}{4} = 63$
6	z	$6 \cdot 10+z$	63

Lösung: G = N (Ziffern sind natürliche Zahlen, exakter G = {z∈N | 1≤z≤9}), D = G

$$60 + z = \frac{7}{4} \cdot (10z + 6) \quad | \cdot 4$$

$$240 + 4z = 70z + 42 \quad | -4z$$

$$240 = 66z + 42 \quad | -42$$

$$198 = 66z \quad | :66$$

$$z = \frac{198}{66} = 3 \text{ , L = \{3\}}$$

Die ursprüngliche Zahl lautet 36.

(b) Verteilungsaufgaben

Der Betrag von **S 60000,-** soll unter **drei** Personen so aufgeteilt werden, daß **B $1\frac{1}{2}$ mal soviel wie C** und **A $1\frac{2}{3}$ mal soviel wie B** bekommt. Wieviel erhält jede der Personen?

Überlegungen zum Lösungsansatz: Benennt man den Anteil von C als c, dann kann man diesen Betrag mit $1\frac{1}{2}$ multiplizieren um auf den Betrag von B zu kommen. Ebenso verfährt man für A. Daher:

Anteil von C	Anteil von B	Anteil von A	Summe
c	$1\frac{1}{2} \cdot c$	$1\frac{2}{3} \cdot (1\frac{1}{2} \cdot c)$	60000

Lösung: G = R (exakter G = Q, da höchstens Groschenbeträge als Lösung sinnvoll sind), D = G

$$c + 1\frac{1}{2}c + 1\frac{2}{3}\left(1\frac{1}{2}c\right) = 60000$$

$$c + \frac{3}{2}c + \frac{5}{2}c = 60000$$

$$c + \frac{8}{2}c = 60000$$

$$5c = 60000$$

$$c = 12000 \text{ , L = \{12000\}}$$

A erhält daher S 30000,-, B erhält S 18000,- und C erhält S 12000,-.

(c) Mischungsaufgaben

Berechnen Sie, wieviel Prozent Alkohol eine Mischung aus **12 Liter 80%-igem** mit **4 Liter 64%-igem** Alkohol enthält!

Überlegungen zum Lösungsansatz: Ein Liter 80%-iger Alkohol enthält $\frac{80}{100}\cdot 1$ Liter Alkohol. Eine unbekannte Anzahl Liter a enthält daher $\frac{80}{100}\cdot a$ Liter Alkohol. Daher:

	Menge in Liter (l)	Alkoholgehalt %	Alkohol in Liter	Probe
1.Sorte	12	80	$\frac{80}{100}\cdot 12$	$0{,}8\cdot 12=9{,}6$
2.Sorte	4	64	$\frac{64}{100}\cdot 4$	$0{,}64\cdot 4=2{,}56$
Mischung	12+4=16	a	$\frac{a}{100}\cdot 16$	$9{,}6+2{,}56=0{,}76\cdot 16$

Lösung:

G = R (exakter G = {a∈R | 0≤a≤100}), D = G

$$\frac{80}{100}\cdot 12+\frac{64}{100}\cdot 4=\frac{a}{100}\cdot 16 \quad |\cdot 100$$

$$12\cdot 80+4\cdot 64=16\cdot a$$

$$1216=16a \quad |:16$$

$$a = 76,\ L = \{76\}$$

Die Mischung enthält 76% Alkohol.

(d) Leistungsaufgaben

Ein Wasserbecken hat zwei Zuflußrohre. Das Becken kann von Rohr **R_1 in 6 Stunden** und vom Rohr **R_2 in 4 Stunden** gefüllt werden. In welcher Zeit kann es gefüllt werden, wenn beide Rohre gleichzeitig geöffnet sind?

Überlegungen zum Lösungsansatz: Das Becken hat ein Volumen V. Wenn Rohr R_1 das Becken in 6 Stunden füllt, dann fließt pro Stunde durch dieses Rohr $\frac{V}{6}$, also ein Sechstel des Gesamvolumens in das Becken. Das gleiche gilt für das zweite Rohr.

Rohr	**Leistung in 1 Std.**	**Betriebsdauer**	**Leistung in der Betriebsdauer**
R1	$\frac{V}{6}$	t	$\frac{V}{6}\cdot t$
R2	$\frac{V}{4}$	t	$\frac{V}{4}\cdot t$

Lösung: G = R, D = G

$$\frac{V}{6}\cdot t+\frac{V}{4}\cdot t=V \quad |:V$$

$$\frac{1}{6}t+\frac{1}{4}t=1 \quad |\cdot 12$$

$$2t+3t=12$$

$$5t=12$$

$$t=\frac{12}{5}, \; L=\{2{,}4\}$$

Das Becken kann in 2,4 Stunden durch beide Rohre befüllt werden.

Bei Leistungsaufgaben wird immer die Leistung der Einzelkomponenten mit der Gesamtleistung verglichen.

(e) Bewegungsaufgaben

Zwei Orte A und B liegen **210 km** von einander entfernt. Um **9 Uhr 45** Minuten fährt von **A** aus ein Eilzug mit einer Geschwindigkeit von **60 km/h** in **Richtung B**. Um **11 Uhr 30** fährt ein Personenzug von **B Richtung A** ab und begegnet dem Eilzug um **12 Uhr 30**.
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Personenzuges?
In welcher Entfernung von A liegt der Treffpunkt der beiden Züge?

Überlegungen zum Lösungsansatz: Fährt ein Zug mit einer Geschwindigkeit von v km/h, dann legt er in einer Stunde eine Strecke von $v\cdot 1$ km zurück. Fahren die Züge einander entgegen, so haben sie beim Treffpunkt in Summe die Gesamtstrecke zurückgelegt.

	Geschwindigkeit v in km/h	Zeit bis zum Treffpunkt in h	Weg in km	Probe Weg in km
Eilzug	60	$2\frac{3}{4}$	$60\cdot 2\frac{3}{4}$	$60\cdot\frac{11}{4}=165$
Personenzug	v	1	$v\cdot 1$	$45\cdot 1=45$

Lösung: G = R, D = G

$$60\cdot 2\frac{3}{4}+v\cdot 1=210$$

$$\frac{60\cdot 11}{4}+v=210$$

$$165+v=210 \quad |-165$$

v = 45, L = {45}

Der Personenzug hat eine Geschwindigkeit von 45 km/h.

Der Personenzug fährt eine Stunde mit 45 km/h, daher ist er nach dieser Stunde 45·1 km von B entfernt.

210 – 45 = 165

Der Treffpunkt der Züge ist daher 165 km von A entfernt.

Die hier bearbeiteten Beispiele können natürlich nur als Auswahl einer ungemeinen Vielfalt an unterschiedlichen Textaufgaben verstanden werden. Man sollte nie den Fehler machen, zu glauben, ein Beispiel „schon zu kennen“. Lesen Sie daher immer die Angabe anfangs komplett durch, bevor auch nur irgendeine Berechnung durchgeführt wird. Berechnen Sie nach Möglichkeit nur das, was wirklich verlangt ist. Versuchen Sie abschließend immer, das Ergebnis auf seine Sinnhaftigkeit (Zahlenmenge, Größe, ...) zu überdenken.

2.3. Gebrochen rationale Gleichungen

Unter gebrochen rationalen Gleichungen versteht man Gleichungen, in denen **Bruchterme** vorkommmen. Zum Lösen dieser Gleichungen ist entscheidend, ob die **Variable im Nenner** vorkommt oder nicht. Kommen in den Nennern nur Zahlen vor (Beispiele waren genaugenommen schon im vorigen Abschnitt Textaufgaben), wird mit dem gemeinsamen Nenner multipliziert (kgV der vorkommenden Nenner), um eine lineare Gleichung zu erhalten, die wie bisher mit Äquvialenzumformungen gelöst werden kann.

Kommt die Variable zumindest in einem Nenner vor, müssen für jeden dieser Terme diejenigen Werte für die Variable ermittelt werden, für die der Nenner nicht Null ergibt (Division durch Null ist nicht definiert!). Dadurch ergibt sich die **Definitionsmenge für diese Gleichung**. Diese Berechnung muß vor jedem anderen Schritt durchgeführt werden!

Im folgenden wird ein gemeinsamer **Hauptnenner** ermittelt (kgV der vorkommenden Nenner), um nach **Multiplikation mit diesem Nenner** wieder eine lösbare lineare Gleichung zu erhalten. Diese Multiplikation mit dem Hauptnenner kann bedenkenlos durchgeführt werden, da alle Werte, für die dieser Nenner Null ergäben könnte, ausgeschlossen worden sind.

Beispiel:

$$\frac{x+3}{x-6} - \frac{x-1}{x+6} = \frac{2x+5}{x^2-36}$$

Definitionsmenge:

$$x + 6 = 0 \Rightarrow x = (-6)$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x^2 - 36 = (x-6)\cdot(x+6) = 0 \text{ siehe oben}$$

$$G = R,\ D = R \setminus \{-6,6\}$$

Bestimmung des gemeinsamen Nenners (kgV):	*Erweiterungsfaktor:*
Nenner : $(x-6)$	$(x+6)$
Nenner: $(x+6)$	$(x-6)$
Nenner: $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$	1

Hauptnenner (HN): $(x-6)(x+6)$

$$\frac{(x+3)(x+6)-(x-1)(x-6)}{(x-6)(x+6)} = \frac{2x+5}{(x-6)(x+6)} \quad | \cdot HN$$

$$(x+3)(x+6)-(x-1)(x-6) = 2x+5$$

$$x^2+3x+6x+18-\left(x^2-x-6x+6\right) = 2x+5$$

$$x^2+9x+18-x^2+7x-6 = 2x+5$$

$$16x+12 = 2x+5 \;\big|\, -2x-12$$

$$14x = -7$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Beispiel: $\quad \dfrac{9}{a-1} - \dfrac{1}{a-3} = \dfrac{8}{a}$

Definitionsmenge: $\quad a-1=0 \Rightarrow a=1,\; a-3=0 \Rightarrow a=3,\; a=0$

$G = R,\; D = R \setminus \{0,1,3\}$

Bestimmung des gemeinsamen Nenners (kgV): — *Erweiterungsfaktor:*

Nenner : (a – 1) — $a \cdot (a-3)$

Nenner: (a – 3) — $a \cdot (a-1)$

Nenner: a — $(a-1) \cdot (a-3)$

Hauptnenner (HN): $a \cdot (a-1) \cdot (a-3)$

$$\frac{9}{a-1} - \frac{1}{a-3} = \frac{8}{a} \quad | \cdot HN$$

$$9a(a-3) - a(a-1) = 8(a-1)(a-3),\quad 9a^2 - 27a - a^2 + a = 8a^2 - 32a + 24$$

$$8a^2 - 26a = 8a^2 - 32a + 24,\quad 6a = 24$$

$$a = 4,\quad L = \{4\}$$

2.4. Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable unter einem Wurzelzeichen steht, nennt man Wurzelgleichung.

Um eine Wurzelgleichung zu lösen, sind drei Schritte notwendig:

- Bestimmung der Definitionsmenge: Bedingung ist, daß die Radikanden größer oder gleich Null sind. Das Finden der Werte für die Variable, die diese Bedingung erfüllt, erfordert genaugenommen das Lösen einer Ungleichung (größer oder gleich Null, Term T $\geq$ 0). Ungleichungen werden im nächsten Kapitel genauer behandelt. Es sei hier nur vorneweg genommen, daß alle Äquivalenzumformungen bei Ungleichung Gültigkeit haben; bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl ändert sich das Ungleichheitszeichen ($5 \geq 4 \;\; | \cdot(-1) \;\Rightarrow\; (-5) \leq (-4)$!).
- Rechnerisches Lösen durch ein- oder mehrmaliges Quadrieren.
- Überprüfung jeder einzelnen Lösung mittels Probe, da das Quadrieren aufgrund der nicht eindeutigen Umkehrbarkeit nicht uneingeschränkt als Äquivalenzumformung angesehen werden kann. Manchmal können Lösungen auch ungewollt verloren gehen, da man unter der Wurzel nur den positive Wert versteht.

(a) Wurzelgleichungen - einmaliges Quadrieren

Beispiel: $\sqrt{2x+3} = 5$, $G = R$

Definitionsmenge:

$$2x + 3 \geq 0$$
$$\Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \qquad D = \left\{ x \,\middle|\, x \geq -\frac{3}{2} \right\}$$

Quadrieren:

$$\sqrt{2x+3} = 5 \quad | \; (\;)^2$$
$$2x + 3 = 25$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

Probe:

$$LS: \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = \sqrt{25} = 5$$
$$RS: 5$$
$$L = \{11\}$$

Beispiel: $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-4}=0,\ G=R$

Definitionsmenge: $x+3\geq 0 \ \Rightarrow\ x\geq -3 \quad D_1 = \{x \mid x\geq -3\}$

$2x-4\geq 0 \ \Rightarrow\ x\geq 2 \quad D_2 = \{x \mid x\geq 2\}$

Um die Definitionsmenge für die ganze Gleichung zu ermitteln, muß man den Durchschnitt der einzelnen Definitionsmengen bilden.

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid x\geq 2\}$$

Wurzeln isolieren: $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-4}=0$

Quadrieren: $\sqrt{x+3}=-\sqrt{2x-4}$

$$x+3=2x-4$$

$$x=7$$

Probe: $LS:\ \sqrt{10}+\sqrt{10}=2\cdot\sqrt{10}$

$RS:\ 0$

$L = \{\,\}$

(b) Wurzelgleichungen - mehrmaliges Quadrieren

Kommen in einer Gleichung mehrere Wurzeln vor, so ist es notwendig, eine Wurzel zu isolieren. Dies kann unter Umständen dazu führen, daß man mehrmals quadrieren muß. Ansonsten geht man wie in den vorigen Beispielen vor.

Beispiel: $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1,\ G=R$

Definitionsmenge: $D_1 = \{x \mid x\geq -13\},\ D_2 = \{x \mid x\geq -6\}$

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid x\geq -6\}$$

Isolieren einer Wurzel:

$$\sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6}$$

$$x + 13 = (1 + \sqrt{x+6})^2 \quad |\ (\ )^2$$

$$x + 13 = 1 + 2\sqrt{x+6} + x + 6$$

$$2\sqrt{x+6} = 6$$

$$\sqrt{x+6} = 3 \quad |\ (\ )^2$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Probe:

$$LS:\ \sqrt{3+13} - \sqrt{3+6} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$$

$$RS:\ 1$$

$$L = \{3\}$$

Beispiel:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12} = \sqrt{4x+33}\,,\quad G = R$$

Definitionsmenge:

$$D_1 = \left\{x \,\middle|\, x \geq -5\right\},\quad D_2 = \left\{x \,\middle|\, x \geq -12\right\},\quad D_3 = \left\{x \,\middle|\, x \geq -\tfrac{33}{4}\right\}$$

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \left\{x \,\middle|\, x \geq -5\right\}$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12} = \sqrt{4x+33} \quad |\ (\ )^2$$

$$\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12}\right)^2 = 4x + 33$$

$$x + 5 + 2\sqrt{(x+5)(x+12)} + x + 12 = 4x + 33$$

$$2\sqrt{x^2 + 17x + 60} = 2x + 16$$

$$\sqrt{x^2 + 17x + 60} = x + 8 \quad |\ (\ )^2$$

$$x^2 + 17x + 60 = x^2 + 16x + 64$$

$$x = 4$$

Probe:

$$LS:\ \sqrt{4+5} + \sqrt{4+12} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$$

$$RS:\ \sqrt{4 \cdot 4 + 33} = \sqrt{49} = 7$$

$$L = \{4\}$$

2.5. Betragsgleichungen

Eine Gleichung, in der der Betrag eines Terms |T| vorkommt, nennt man Betragsgleichung.

Wie wir schon bei der Defintion des Betrages einer Zahl sehen konnten (Kapitel 1, Seite 14), können zwei Fälle eintreten: $|a| = a \ (a \geq 0)$ oder $|a| = (-a) \ (a<0)$

Kommt daher ein Term in einer Gleichung zwischen Betragsstrichen vor, muß eine Fallunterscheidung zur Lösung der Gleichung durchgeführt werden. Man teilt genaugenommen die Gleichung in zwei „Untergleichungen“ auf, abhängig davon ob der Term $T \geq 0$ oder $T < 0$.

Beispiel: *Lösen Sie die Gleichung* $|x + 4| = 5x - 2$

Wir unterscheiden die Fälle: $x + 4 \geq 0 \ \Rightarrow \ x \geq -4$

oder $x + 4 < 0 \ \Rightarrow \ x < -4$

1. Fall: $x \geq -4$ $\qquad |x + 4| = x + 4$

daher $\qquad x + 4 = 5x - 2$

$$6 = 4x \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} = x$$

2. Fall: $x < -4$ $\qquad |x + 4| = -(x + 4) = -x - 4$

daher $\qquad -x - 4 = 5x - 2$

$$-2 = 6x \ \Rightarrow \ -\frac{1}{3} = x$$

Am Ende der Berechnung muß noch überprüft werden, ob die errechnete Lösung der Bedingung für die jeweilige Fallunterscheidung genügt. Danach wird für die gesamte Gleichung eine Lösungsmenge bestimmt.

1. Fall: $(x = \frac{3}{2})$ *und* $(x \geq -4) \ \Rightarrow L_1 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$, *2. Fall:* $(x = -\frac{1}{3})$ *und* $(x < -4) \ \Rightarrow \ L_2 = \{ \ \}$

Gesamtlösung daher $L = L_1 \cup L_2 = L_1 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Kommen in der Gleichung mehrere Terme mit Betragsstrichen vor, so muß man diese Fallunterscheidung für jeden dieser Terme durchführen. Aus den einzelnen Bedingungen für die Terme ergeben sich dann im Durchschnitt Bedingungen für jede Fallunterscheidung.

Beispiel: *Lösen Sie die Gleichung* $|x + 6| - 3 = |4 + 2x|$

Wir unterscheiden die Fälle: $x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$

oder $x + 6 < 0 \Rightarrow x < -6$

sowie die Fälle: $4 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

oder $4 + 2x < 0 \Rightarrow x < -2$

aus diesen Möglichkeiten geben sich folgende sinnvolle Fallunterscheidungen:

1. Fall: $x \geq -2$ $\quad |x + 6| = x + 6$ *und* $|4 + 2x| = 4 + 2x$

daher $\quad x + 6 - 3 = 4 + 2x \Rightarrow x = -1 \Rightarrow L_1 = \{-1\}$

2. Fall: $x \geq -6$ *und* $x < -2 \Rightarrow -6 \leq x < -2$ $\quad |x + 6| = x + 6$ *und* $|4 + 2x| = -(4 + 2x)$

daher $\quad x + 6 - 3 = -4 - 2x \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \Rightarrow L_2 = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

3. Fall: $x < -6$ $\quad |x + 6| = -(x + 6)$ *und* $|4 + 2x| = -(4 + 2x)$

daher $\quad -x - 6 - 3 = -4 - 2x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow L_3 = \{\ \}$

Die Gesamtlösung ergibt sich wieder als Vereinigung der drei Lösungsmengen:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left\{-\frac{7}{3}, -1\right\}$$

Gerade bei Betragsgleichungen ist die Probe zur Überprüfung des Ergebnisses wichtig:

$$\left|-\frac{7}{3} + 6\right| - 3 = \left|4 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)\right| \Rightarrow \left|-\frac{11}{3}\right| - 3 = \left|-\frac{2}{3}\right| \Rightarrow w.A.$$

$$|-1 + 6| - 3 = |4 + 2 \cdot (-1)| \Rightarrow |5| - 3 = |2| \Rightarrow w.A.$$

2.6. Lineare Funktionen

(a) Definition

Schon in einem vorangegangen Abschnitt wurde vom Zusammenhang zwischen zwei Größen gesprochen, wobei die Abhängigkeit der Größen in Form einer linearen Gleichung in zwei Variablen beschrieben wurde:

$$ax + by = c \text{ bzw. } y = kx + d \quad (a,b,c,d,k \in R,\ a,k \neq 0)$$

Die explizite Darstellung $y = kx + d$ läßt den angesprochenen Zusammenhang deutlicher erkennen. Wählt man aus einer Menge einen Wert für x und setzt in der obigen Gleichung ein, so ergibt sich eindeutig ein Wert für y.

Die Menge, aus der man für die sogenannten **unabhängigen Argumente x** einsetzen kann, nennt man wie bisher die Grundmenge oder **Urmenge**. Die Menge, aus der die **abhängigen y** sein dürfen, nennt man **Zielmenge** oder **Bildmenge**. Jene Menge, die mittels der Funktionsvorschrift tatsächlich von den y-Werten gebildet wird, bezeichnet man als die **Wertemenge** für y. Der **Wert y** selbst wird als **Funktionswert** bezeichnet.

Wird jedem x Element einer Grundmenge X genau ein y Element einer Zielmenge Y zugeordnet, so nennt man diese Zuordnung eine **Funktion** f bzw. f(x):
$f: X \rightarrow Y, x \rightarrow y$ f ist eine Funktion von X nach Y, x ist zugeordnet y

Unter einer linearen Funktion in einer Variablen versteht man eine Funktion der Gestalt :
$f: X \rightarrow Y, x \rightarrow kx + d$ bzw. $f(x) = kx + d$ $k, d \in R, k \neq 0$

Eine Funktion, bei der die Mengen X und Y Teilmengen von R sind, heißt reelle Funktion.

Die Funktionsvorschrift kann in verbaler Form sein (z.B.: „Verdreifache eine Zahl und addiere 4“ - man denke an Zahlenrätsel) oder in Form der oben erwähnten Funktionsgleichung. Diese Funktionsgleichung muß oft erst aus einer Problemstellung gewonnen werden.

Durch die Zuordnungsvorschrift ergeben sich eindeutige **Zahlenpaare** (Wertepaare), die sich in eine **Wertetabelle** eintragen lassen.
Wertetabelle (z.B. für $-1 \leq x \leq 2$) für „Verdreifache eine Zahl und addiere 4“:

x	y
– 1	1
0	4
1	7
2	10

Die verbale Funktionsvorschrift ist leicht als Funktionsgleichung anschreibbar: $f: y = 3 \cdot x + 4$

Funktionen in zwei Variablen sind nicht nur in einer Wertetabelle darstellbar, sondern bieten sich an, graphisch wiedergegeben zu werden. Das heißt, daß man die Wertepaare der Wertetabelle als Punkte auffaßt; die einzelnen Werte x und y werden von einem vorher festgelegten Nullpunkt in eine Richtung für x und eine Richtung für y gemessen (diese Darstellung ist als Erweiterung der Zahlengerade in eine zweite Richtung vorstellbar). Die Richtungen für x und y und der Nullpunkt legen eine sogenanntes Koordinatensystem fest.

Eine Funktion läßt sich graphisch in einem Koordinatensystem darstellen.
Diese Darstellung nennt man **Graph der Funktion**.
Besteht der Graph aus diskreten Punkten, so heißt er Punktgraph.

(b) Koordinatensysteme

Das häufigst verwendete Koordinatensystem ist das sogenannte **Kartesische Koordinatensystem**.

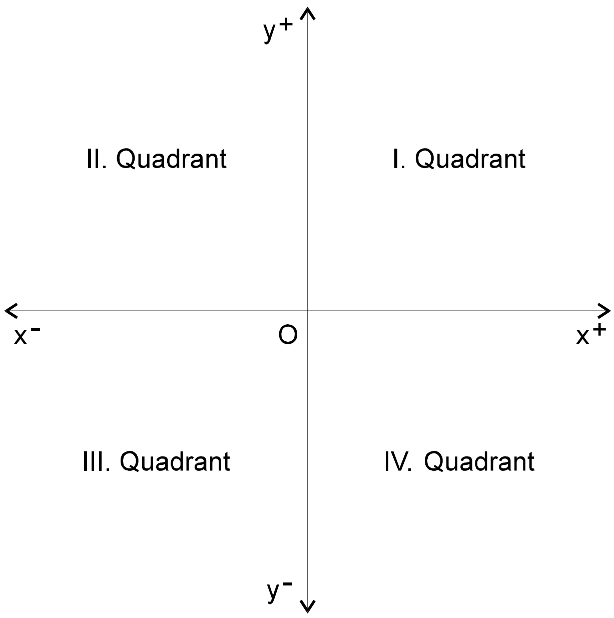
Es besteht aus zwei zueinander rechtwinkeligen Zahlengeraden, die einander in ihren Nullpunkten schneiden. Dieser Schnittpunkt wird als **Ursprung O** bezeichnet. Die Zahlengeraden heißen **Koordinatenachsen** (meist x-Achse und y-Achse), wobei man die waagrechte als **Abszissenachse**, die senkrechte als **Ordinatenachse** bezeichnet. In der Regel sind die Maßeinheiten auf den beiden Achsen gleich (kartesisches Koordinatensystem).

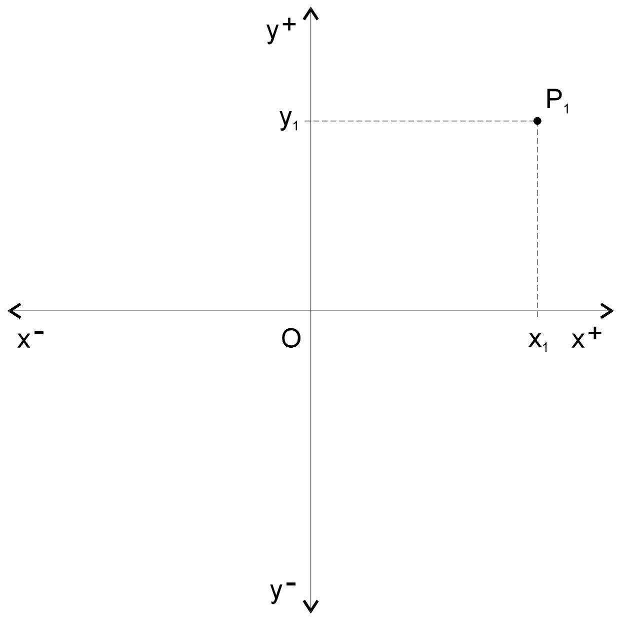
Die beiden Achsen teilen nun die Ebene in vier Bereiche, die sogenannten **Quadranten**.

Ein Zahlenpaar $(x_1|y_1)$ läßt sich nun als **Punkt dieser Ebene** derart darstellen, daß die Parallele zur y-Achse im Abstand x_1 und die Parallele zur x-Achse im Abstand y_1 einander in einem Punkt $P(x_1|y_1)$ schneiden.

Ein positiver Wert von x_1 bedeutet ein Messen nach rechts vom Ursprung, ein negaitver nach links; ein positiver Wert von y_1 bedeutet ein Messen nach oben vom Ursprung, ein negativer nach unten. Die Werte x_1 und y_1 bezeichnet man dann als **Koordinaten** vom Punkt P. Der Ursprung hat die Koordinaten O(0|0).

Bei konkreten Anwendungen, wo die Zahlenwerte eine bestimmte Bedeutung haben, kann die Beschriftung und der Maßstab der einzelnen Achsen vom erklärten „Einheitssystem" abweichen.



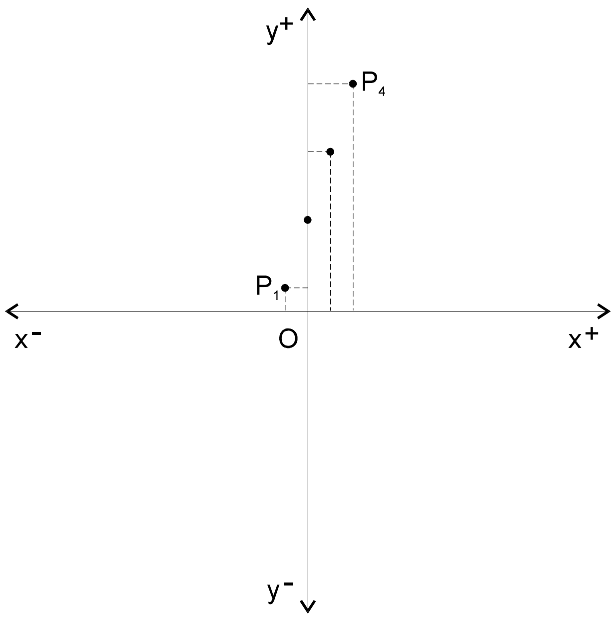


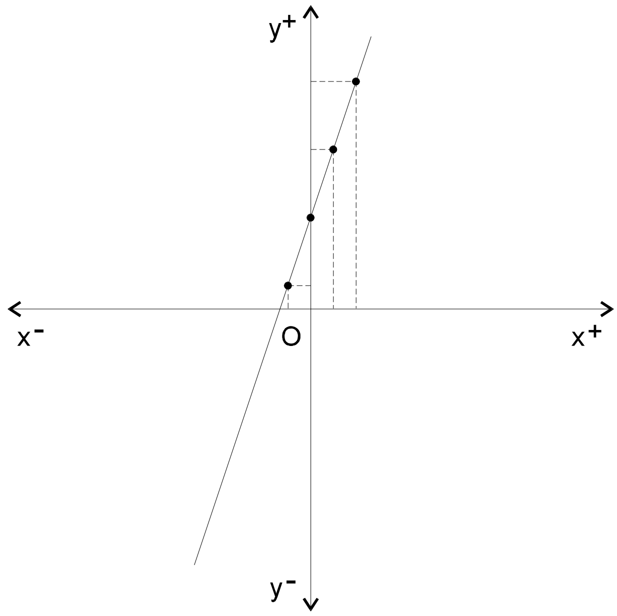
(c) Die Gerade

Wenn wir nun die Wertepaare der Funktion „Verdreifache eine Zahl und addiere 4" bzw. f: y = 3x +4 in ein Koordinatensystem einzeichnen, so können wir feststellen, daß die vier Punkte offensichtlich auf einer **Linie**, **einer Geraden**, liegen.

Der Graph einer lineare Funktion f: y = kx + d ist immer eine Gerade.

Oft kennzeichnet man dies durch die Schreibweise g: y = kx + d.



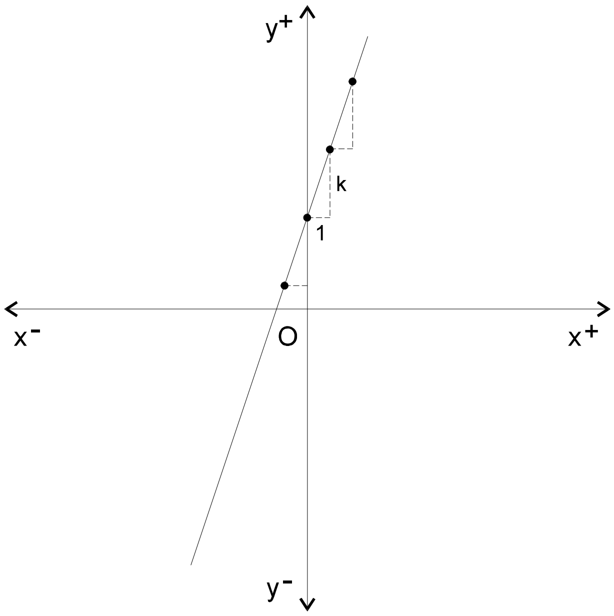


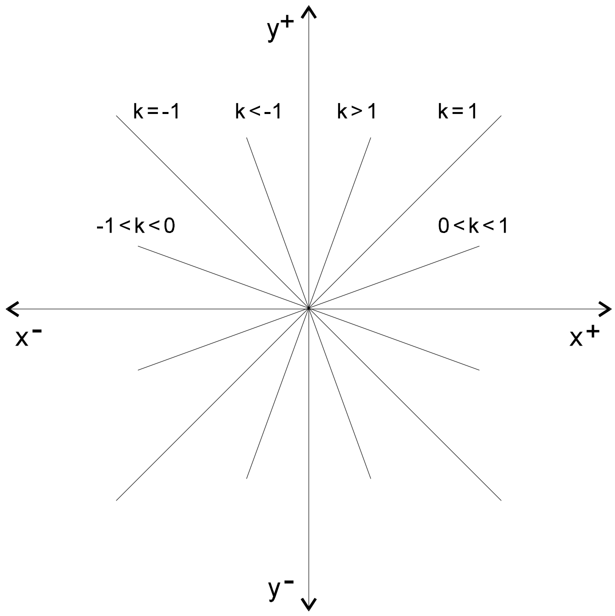
Es ist nun naheliegend, sich allgemein Gedanken über die Bedeutung der Gößen k und d in der Geradengleichung zu machen, im speziellen natürlich über eine graphische Interpretation. Bei Betrachtung der vier Zahlenpaare aus der Wertetabelle $P_1(-1|1)$, $P_2(0|4)$, $P_3(1|7)$ und $P_4(2|10)$ stellt man fest, daß die x-Werte der Punkte sich jeweils um eine Einheit unterscheiden, die y-Werte um jeweils 3 Einheiten. Dieser Wert 3 entspricht aber genau dem Wert k aus der Funktionsgleichung $y = 3x + 4$.
Allgemein läßt sich dieser Sachverhalt so formulieren:

> Bewegt man sich von einem Punkt einer Geraden g: $y = kx + d$ eine Einheit in Richtung der (positiven) x-Achse, so muß man sich k Einheiten in Richtung der y-Achse bewegen, um wieder zu einem Punkt der Geraden zu gelangen. Abhängig vom Wert von k ist dies in der positiven oder negativen Richtung der y-Achse.

Die Wert k gibt also an, um wieviel sich der y-Wert ändert, wenn man den x-Wert um eine Einheit vergrößert. Diese Änderung des y-Wertes kann auch negativ sein; graphisch verläuft dann die Gerade abwärts.

Unterschiedliche **Werte von k** haben einen unterschiedlichen Verlauf der Geraden zur Folge, genauer gesagt, bestimmt k, ob **die Gerade steigt (k>0) oder fällt (k<0)** und wie „steil“ oder „flach“ sie ist. Daher ist der Wert k ein Maß für die **Steigung der Geraden**.





Der Wert k ist ein Maß für die Steigung einer Geraden, man bezeichnet k auch als **Anstieg** der Geraden.

Versucht man weiters den Wertepaaren P_1 bis P_4 eine Bedeutung für d = 4 zu entnehmen, so kann man feststellen, daß zufällig bei $P_2(0|4)$ der y-Wert 4 beträgt. Bei Einsetzen des x-Wertes x = 0 in der Funktionsgleichung y = kx + d erkennt man, daß an der Stelle 0 immer der Funktionwert f(0) = d auftritt. Der Wert **d** wird daher als **Abschnitt auf der y-Achse** (Ordinantenabschnitt) bezeichnet.

Der Punkt D(0|d) ist immer Element einer Geraden g: y = kx + d.

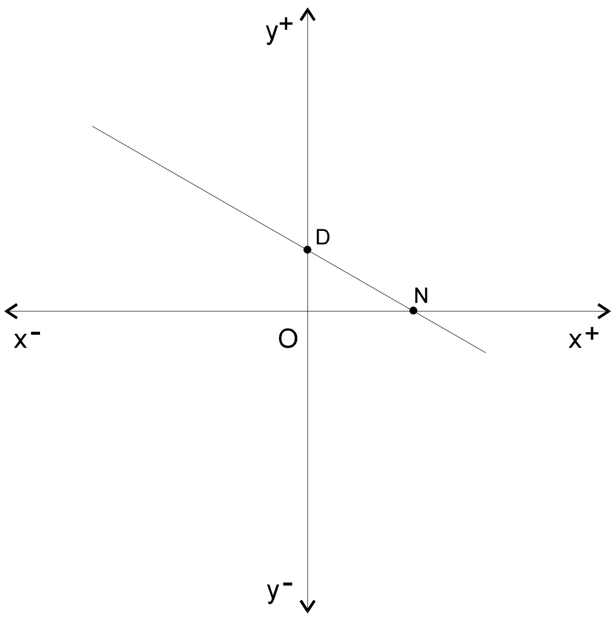
Ebenso findet man im Normalfall einen Punkt, den die Gerade mit der x-Achse gemeinsam hat. Dieser Schnittpunkt mit der x-Achse wird als **Nullstelle** bezeichnet, da der y-Wert Null (y = 0) ist.

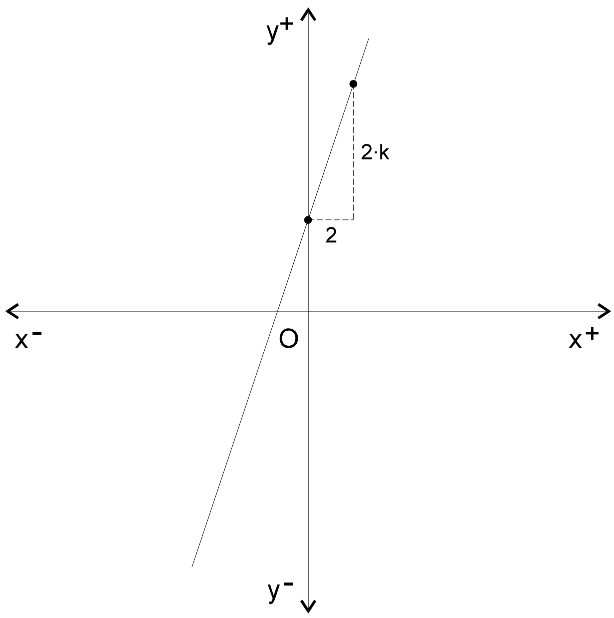
Man bezeichnet den Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse als Nullstelle der Geraden. Jede lineare Funktion mit $k \neq 0$ hat genau eine Nullstelle $N(-\frac{d}{k}\|0)$.

Um nun eine lineare Funktion zu konstruieren gibt es nun zwei Möglichkeiten:

- Berechnung zweier Punkte P und Q mittels der Funktionsgleichung y = kx + d. Die Verbindung dieser Punkte stellt den Graph der Funktion dar. Zweckmäßig ist es zum Beispiel, die Punkte D(0|d) und N($-\frac{d}{k}$|0) für diese Konstruktion zu verwenden.

- Der Punkt D(0|d) ist immer Element der Geraden y = kx + d. Bewegt man sich nun von D aus eine Einheit in Richtung der positiven x-Achse, so muß man sich k Einheiten in Richtung der y-Achse bewegen, um einen weiteren Punkt P der Geraden zu erhalten. Da diese beiden Punkte D und P sehr nahe beieinander liegen, ist es sinnvoller, sich von D aus eine frei wählbare Anzahl n an Einheiten in Richtung der positiven x-Achse zu bewegen. Um dann einen weiteren Punkt Q der Geraden zu erhalten, muß man sich das n-fache von k Einheiten n·k in y-Richtung bewegen. So hat man wieder zwei Punkte der Geraden, deren Verbindung den Graphen der Funktion y = kx +d darstellt.





Aus dieser Konstruktion kann man die wesentlichste Eigenschaft der linearen Funktion ablesen:

Das **Verhältnis** der Differenz der y-Werte zu der Differenz der x-Werte zweier Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ **ist konstant** und entspricht stets dem **Wert k**.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Die Schreibweise Δy bzw. Δx (griechischer Großbuchstabe „Delta“) ist eine Kurzschreibwiese für die Differenz zweier y- bzw. x-Werte.

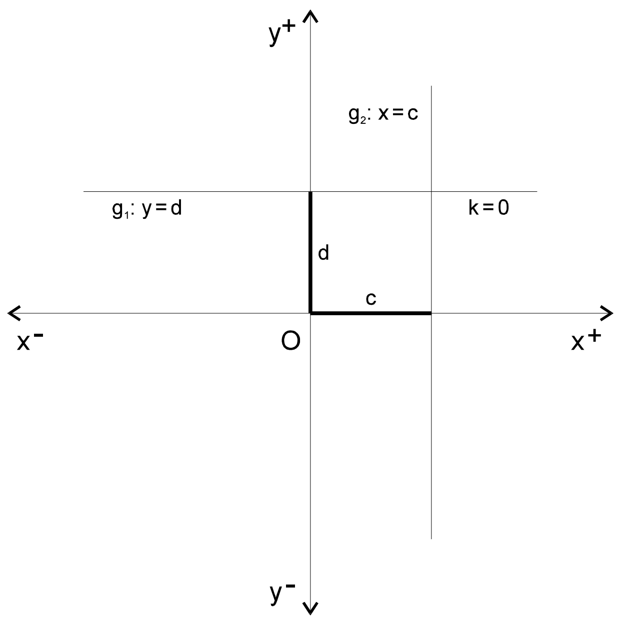
Sonderfälle

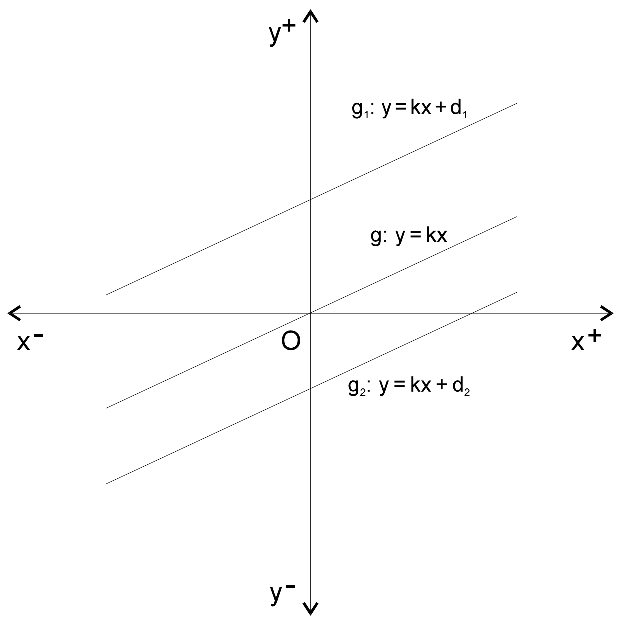
Sonderfälle der Geradengleichung treten dann auf, wenn k oder d den Wert Null annehmen.

Eine Gerade mit der Steigung **k = 0** verläuft, wie leicht überprüfbar, **parallel zur x-Achse** im Abstand d. Die Gleichung dieser Geraden hat die Form **g: y = d**. Die Schreibweise g: ist unbedingt notwendig, um von einem Funktionswert y = d zu unterscheiden. Im speziellen hat die x-Achse daher die Gleichung g: y = 0.

Nimmt d den Wert Null (**d = 0**) an, so fällt der Punkt D(0|d) mit dem Ursprung zusammen, die Gerade verläuft also **durch den Ursprung**. Ihre Gleichung hat die Form **g: y = kx**. Wie weiters unschwer zu erkennen ist, haben daher parallele Geraden gleichen Anstieg, sie unterscheiden sich nur im Wert von d.

Eine Gerade, die **parallel zur y-Achse** verläuft, hat theoretisch unendlich großen Anstieg. Leichter ist eine mathematische Formulierung über den Zusammenhang, daß alle Punkte dieser Geraden den gleichen x-Wert besitzen, die Gleichung der Geraden im Abstand c von der y-Achse hat also die Form **g: x = c**. Auch hier ist die Schreibweise g: unbedingt notwendig. Die y-Achse hat daher die Gleichung g: x = 0.





Zusammenfassung	
$y = kx + d$	Geradengleichung
$k > 0$	die Gerade steigt
$k < 0$	die Gerade fällt
$k = 0$	die Gerade verläuft parallel zur x-Achse
$d > 0$	Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse oberhalb der x-Achse
$d < 0$	Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse unterhalb der x-Achse
$d = 0$	Die Gerade $y = kx$ verläuft durch den Ursprung
$y = kx + d$	inhomogene lineare Gleichung, nicht durch den Ursprung
$y = kx$	homogene lineare Gleichung, durch den Ursprung

(d) Aufstellen von Geradengleichungen

Jeder Punkt der Funktion $y = kx + d$ wird durch diese Funktionsgleichung beschrieben. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so führen seine Koordinaten beim Einsetzen in die Funktionsgleichung zu einer wahren Aussage. Kennt man andererseits nur einzelne Bestimmungsstücke, so muß man die Funktionsgleichung erst aufstellen. Wir können hier zwischen zwei grundlegenden Möglichkeiten analog zur Konstruktion unterscheiden:

- Ein Punkt der Geraden ist bekannt und der Wert von k oder d $\Rightarrow$ Ein-Punkt-Form
- Zwei Punkte der Geraden sind bekannt $\Rightarrow$ Zwei-Punkt-Form

Ein-Punkt-Form der Geradengleichung

Kennt man einen Punkt $P(x_1|y_1)$ von einer Funktion $y = kx + d$, und den Wert von k bzw. d, so kann man mit diesen Bestimmungstücken in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen und den fehlenden Wert für d bzw. k berechnen.

Beispiel: *Gegeben ist ein Punkt P(1/7) einer Geraden. Der Anstieg beträgt k = 2. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden.*

Einsetzen in die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$

$$7 = 2 \cdot 1 + d$$
$$7 - 2 = d$$
$$5 = d$$

Die Geradengleichung lautet daher: $g\colon y = 2x + 5.$

Beispiel: *Gegeben ist ein Punkt Q(2|5) einer Geraden, d = 3. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden.*

Einsetzen in die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$

$$5 = k \cdot 2 + 3$$
$$5 - 3 = 2 \cdot k$$
$$2 = 2 \cdot k$$
$$1 = k$$

Die Geradengleichung lautet daher: $g\colon y = x + 3.$

Ein-Punkt-Form	mit $P(x_1\|y_1)$ und k:	$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$
	mit $P(x_1\|y_1)$ und d:	$x_1 \cdot (y - d) = (y_1 - d) \cdot x$

Zwei-Punkt-Form der Geradengleichung

Kennt man zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ von einer Funktion y = kx +d, so kann man mit diesen Bestimmungstücken den Anstieg k bestimmen und dann in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen und den fehlenden Wert für d berechnen.

Beispiel: *Gegeben sind die Punkte P(1|4) und Q(4|2) einer Geraden. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden.*

$$k = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$d = y_1 - kx_1 = y_2 - kx_2$$

$$d = 4 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}$$

Die Geradengleichung lautet daher: $g\colon\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}.$

Zwei-Punkt-Form	mit $P(x_1\|y_1)$ und $Q(x_2\|y_2)$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Wir können ferner bei jeder linearen Funktion mit $k \neq 1$ einen Punkt finden, bei dem der x-Wert gleich dem y-Wert ist. Man bezeichnet diesen Punkt als den **Fixpunkt** der linearen Funktion. Dieser Fixpunkt ist dann $F\left(\frac{d}{1-k}\middle|\frac{d}{1-k}\right)$.

2.7. Lineare Gleichungssysteme

(a) Definition

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die lineare Funktion, die Gerade, und ihre Eigenschaften besprochen. Bekannt sind nun die Begriffe des Anstiegs, des Abschnitts auf der y-Achse, der Nullstelle, des Fixpunktes usw. Stets ging es dabei um eine spezielle Gerade.

Wir wollen nun im folgenden Abschnitt die Lage zweier Geraden zu einander betrachten. Der Fall, daß Geraden zueinander parallel sind, wurde bereits kurz angesprochen, anschaulich gibt es natürlich noch die Möglichkeit, daß Geraden einander in einem Schnittpunkt schneiden.

Die Koordinaten eines Schnittpunkt zweier Geraden liefern für beide Funktionsgleichungen eine wahre Aussage, da der Schnittpunkt Element beider Geraden ist. Ein Berechnen dieser Koordinaten bedeutet daher, das Zahlenpaar $(x_s|y_s)$ zu finden, das eine wahre Aussage für zwei Gleichungen liefert. Diese beiden Gleichungen bezeichnet man in diesem Zusammenhang als lineares Gleichungssystem.

Unter einem linearen Gleichungssystem in zwei Unbekannten versteht man allgemein:

I: $$\mathbf{a_1x + b_1y = c_1}$$

II: $$\mathbf{a_2x + b_2y = c_2}$$

Beim Lösen eines Gleichungssystems hat sich obige anschreibweise als zweckmäßig herausgestellt, es ist auch leicht, Geradengleichungen in der Form $y = kx + d$ auf diese Form zu bringen:

$$-kx + y = d \quad (a = -k,\ b = 1,\ c = d).$$

Im folgenden werden die unterschiedlichen Lösungsverfahren für Gleichungssysteme dieser Art beschrieben. Allen Verfahren ist insofern Bedeutung beizumessen, als es auch nichtlineare Gleichungssysteme (in einem späteren Kapitel behandelt) gibt, die sich manchmal nur mit einem der Verfahren lösen lassen.

Lineare Gleichungssysteme lassen sich auf mehrere Variablen und mehrere Gleichungen erweitern. In der Regel stimmt die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der Variablen überein, um eine eindeutige Lösung berechnen zu können. Die angegeben Verfahren sind auch für lineare Gleichungssyteme in mehreren Variablen und mehreren Gleichungen gültig (siehe auch Übungsbeispiele).

(b) Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Methode der gleichen Koeffizienten

oder Additionsverfahren bzw. Gauß'sches Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2x - 5y = 7 \\ \text{II:}\quad & 3x + 2y = 1 \end{aligned}$$

Durch gezieltes Multiplizieren bzw. Dividieren der beiden Gleichungen (Äquivalenzumformung!) soll erreicht werden, daß die Koeffizienten für eine der Variablen in beiden Gleichungen bis auf das Vorzeichen gleich werden (Gegenzahlen!). In diesem Beispiel könnte daher die erste Zeile mit 3, die zweite mit (–2) multipliziert werden, um diese Bedingung für x zu erfüllen. Einfacher ist es, die erste Zeile mit 2, die zweite mit 5 zu multiplizieren, da die Koeffizienten für y schon in der Angabe unterschiedliches Vorzeichen haben.

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2x - 5y = 7 \quad | \cdot 2 \\ \text{II:}\quad & 3x + 2y = 1 \quad | \cdot 5 \end{aligned}$$

Nach dieser Umformung sind die Koeffizienten für y in beiden Gleichungen (+10) bzw. (–10), daher auch der Name „Methode der gleichen Koeffizienten". Addiert man nun die beiden Zeilen (daher auch der Name „Additionsverfahren"), so erhält man eine neue Gleichung, in der nur mehr eine Variable vorkommt (deswegen auch der Name „Eliminationsverfahren").

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 4x - 10y = 14 \\ \text{II:}\quad & 15x + 10y = 5 \\ \hline \text{I + II:}\quad & 19x = 19 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

Um die andere Variable zu berechnen, setzt man die nun bekannte Variable in eine der beiden Gleichungen ein, da ja beide Gleichungen durch die Lösung erfüllt sein müssen.

$$2 \cdot 1 - 5y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Es ist natürlich auch möglich, das Verfahren zweimal für jede der beiden Variablen zu durchlaufen.

Gleichsetzungsverfahren

Die Bedingung, daß das Lösungspaar beide Gleichungen erfüllt, führt naheliegenderweise zu dem folgendem Lösungsverfahren, in dem man eine der Variablen (oder ihr Vielfaches) in beiden Gleichungen explizit darstellt und im Anschluß gleichsetzt. Im speziellen kommt dieses Verfahren der Ermittelung des Schnittpunktes zweier Geraden in der Form g: y = kx + d entgegen.

	I:	$x - 2y = 4$
	II:	$5x - 4y = 2$
explizite Darstellung einer Variablen:	I:	$x = 4 + 2y$
oder des Vielfachen dieser Variablen:	II:	$5x = 2 + 4y$
	5·I:	$5x = 20 + 10y$
Gleichsetzten der beiden Zeilen (5x = 5x $\Rightarrow$)		$20 + 10y = 2 + 4y$
		$6y = -18 \quad \Rightarrow \quad y = -3$

Um die andere Variable zu berechnen, setzt man die nun bekannte Variable in eine der beiden Gleichungen ein, da ja wieder beide Gleichungen durch die Lösung erfüllt sein müßen. Sinnvoll ist es, in einer der expliziten Darstellungen einzusetzen.

$$x = 4 + 2 \cdot (-3) = -2$$

Einsetzungsverfahren bzw. Substitutionsverfahren

Bei diesem oft unumgänglichen Verfahren wird eine Variable in nur einer Gleichung explizit dargestellt und im Anschluß in die zweite Gleichung (mit der nun expliziten Darstellung) eingesetzt.

	I:	$-2x + y = 2$
	II:	$2x + 2y = 6$
Explizite Darstellung:	I:	$y = 2x + 2$
Einsetzen in die zweite Gleichung:	II:	$2 \cdot (2x + 2) + 2x = 6$
Nach Auflösen und Einsetzen ergibt sich:	$x = \frac{1}{3}$	$y = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

(c) Determinanten

Es gibt noch eine weitere elegante Form, um Gleichungen zu lösen - die Determinantenmethode (Methode nach Cramer, Regel von Sarrus).

Wenn wir ein lineares Gleichungssystem in zwei Gleichungen und zwei Variablen betrachten, so hängen die Lösungen für die beiden Variablen letztendlich von den Koeffizienten der Variablen (a_1, b_1, a_2, b_2) und den Zahlenwerten auf der rechten Seite (c_1, c_2) ab. Wir können die Lösungen für x und y in diesem Gleichungssystem allgemein anführen:

Das Gleichungssystem	$\text{I}: a_1x + b_1y = c_1$	$\text{II}: a_2x + b_2y = c_2$
hat die Lösungen	$x = \dfrac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$	$y = \dfrac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$

Betrachtet man diese allgemeinen Lösungen ein wenig genauer, so kann man eine gewisse Regelmäßigkeit in der Reihenfolge der unterschiedlichen Zahlenwerte feststellen. Im speziellen haben beide Lösungen den gleichen Nenner, der sich nur aus den Koeffizienten der Variablen zusammensetzt.

Diese Überlegungen führen dazu, bei einem Gleichungssystem vorerst nur die vorkommenden Koeffizienten zu betrachten:

> Man bezeichnet das System der Koeffizienten eines Gleichungssystems als (Koeffizienten-) Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Man kann nun den Wert des Nenners der Lösungen als den „Wert der Koeffizientenmatrix“ sehen; wegen seiner Bedeutung bezeichnet man diesen Wert als Determinante.

> Unter der Determinante eines Gleichungssystems versteht man den Wert
>
> $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Die Determinante für die Koeffizientenmatrix wird auch Hauptdeterminante genannt.

Die auftretenden Elemente der Produkte $a_1 \cdot b_2$ und $a_2 \cdot b_1$ stehen jeweils auf einer Diagonale der quadratisch angeordneten Determinante; man bezeichnet die Elemente a_1, b_2 als Hauptdiagonale und a_2, b_1 als Nebendiagonale. So wird die Berechnung der Determinante zu „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale".

Betrachten wir weiters die Zähler der Lösungen, so haben auch diese die Form der Determinantenberechnung, wenn man in der bisherigen Schreibweise die Koeffizienten für die zu berechnende Lösung einer Variablen mit den konstanten Elementen c_1 und c_2 vertauscht. Man bezeichnet diese neu gewonnenen Determinanten als Zählerdeterminanten D_x und D_y.

Unter den Zählerdeterminanten D_x und D_y versteht man:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \quad \text{und} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Drückt man nun die allgemeinen Lösungen des Gleichungssystems in zwei Variablen mittels Determinanten aus, führt dies zu folgender vereinfachter Schreibweise:

Das Gleichungssystem	$\text{I}: a_1x + b_1y = c_1$	$\text{II}: a_2x + b_2y = c_2$
hat die Lösungen	$x = \dfrac{D_x}{D}$	$y = \dfrac{D_y}{D}$

Methode nach Cramer

Dieses Lösungsverfahren wird auch „Methode nach Cramer" genannt.

Beispiel:

$$I: \quad 2x - 5y = 7$$

$$II: \quad 3x + 2y = 1$$

Die Koeffizientenmatrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Hauptdeterminante beträgt:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 19$$

Die zugehörigen Zählerdeterminanten sind:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) = 19$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 7 = -19$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind daher:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{19}{19} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-19}{19} = -1$$

(d) Gleichungssysteme dreier linearer Gleichungen

Gleichungssysteme mit mehreren Gleichungen werden nach den gleichen Verfahren gelöst, wie Systeme zweier Gleichungen. Prinzipiell versucht man dabei, schrittweise die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren, bis ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen übrigbleibt, das wie bisher gelöst wird.
Wir wollen dies an einem Beispiel dreier Gleichungen in drei Variablen aufgrund der Zweckmäßigkeit mit dem Additionsverfahren und der Determinantenmethode verdeutlichen:

Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren entscheidet man sich im aufgrund der günstigsten Koeffizienten für eine Variable, die eliminiert werden soll.

Dies geschieht derart in zwei Schritten, daß jeweils aus zwei Gleichungen diese eine Variable eliminiert wird und so zwei Gleichungen in zwei Variablen übrigbleiben, die im nächsten Schritt gelöst werden können.

Um den Überblick zu bewahren, sollte man eventuell die neu gewonnenen Gleichungen mit einer neuen Zeilennummer versehen (IV, V, ...).

Beispiel:

Die Variable x soll aus den Zeilen I / II und I / III eliminiert werden:

$$\begin{array}{ll} I: & 2x-3y+z=-4 \quad | \cdot(-5) \quad | \cdot 1 \\ II: & 5x+y-3z=7 \quad | \cdot 2 \\ III: & x+y+z=3 \quad | \cdot(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} I: & -10x+15y-5z=20 \\ II: & 10x+2y-6z=14 \end{array}$$

Die Elimination aus I / II ergibt IV:

$$IV: \quad 17y-11z=34$$

$$\begin{array}{lr} I: & 2x-3y+z=-4 \\ III: & -2x-2y-2z=-6 \end{array}$$

Die Elimination aus I / III ergibt V:

$$V: \quad -5y-z=-10$$

$$\begin{array}{lr} IV: & 17y-11z=34 \quad | \cdot 1 \\ V: & -5y-z=-10 \quad | \cdot(-11) \\ IV: & 17y-11z=34 \\ V: & 55y+11z=110 \\ & 72y=144 \end{array}$$

Die Elimination aus IV / V ergibt y:

$$y=2$$

Durch Einsetzen der ersten errechneten Lösung in Zeile IV oder V (also in der nächsten übergeordneten Ebene) gewinnt man die Lösung für die zweite Variable; setzt man beide Werte in eine der Zeilen I, II oder III der Angabe ein, so erhält man schließlich die Lösung für die dritte Variable.

$$17\cdot 2-11z=34 \;\Rightarrow\; z=0$$

$$x+2+0=3 \;\Rightarrow\; x=1$$

Determinantenmethode (Regel von Sarrus)

Ein System dreier linearer Gleichungen in drei Variablen hat folgende allgemeine Form:

I: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

II: $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

III: $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

Erweitert man die Regel von Cramer auf dieses System, führt das zu den Lösungen:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

D stellt wieder die Hauptdeterminante der Koeffizientenmatrix dar:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Der Wert einer dreizeiligen Determinante ist komplizierter zu bestimmen. Der einfachste Weg ist, die Determinante nach rechts um die ersten beiden Spalten zu erweitern. Dann werden alle Produkte aus drei Elementen gebildet, die sich in Richtung der Hauptdiagonale (a_1–b_2–c_3) bzw. in Richtung der Nebendiagonale (a_3–b_2–c_1) ergeben. Dabei haben werden Produkte in Richtung der Nebendiagonale von denen in Richtung der Hauptdiagonale subtrahiert („Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“).

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Diese Berechnung von dreizeiligen Determinanten wird Regel nanch Sarrus genannt.

Beispiel: *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem nach der Determinantenmethode.*

$$\begin{array}{ll} I: & 3x + 2y - 4z = 7 \\ II: & 2x - 3y + z = 7 \\ III: & x - 2y + 2z = 7 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = \quad 3\cdot(-3)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot(-3)\cdot(-4) - (-2)\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 2 = -14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 2 \\ 7 & -3 \\ 7 & -2 \end{matrix} = \quad 7\cdot(-3)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 7 + (-4)\cdot 7\cdot(-2) - 7\cdot(-3)\cdot(-4) - (-2)\cdot 1\cdot 7 - 2\cdot 7\cdot 2 = -70$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \\ 1 & 7 \end{matrix} = \quad 3\cdot 7\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 7 - 1\cdot 7\cdot(-4) - 7\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 7 = -28$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = \quad 3\cdot(-3)\cdot 7 + 2\cdot 7\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot(-3)\cdot 7 - (-2)\cdot 7\cdot 3 - 7\cdot 2\cdot 2 = -42$$

daher ergeben sich folgende Lösungen:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-70}{-14} = 5 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{-14} = 2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-42}{-14} = 3$$

Determinanten mit mehr als drei Zeilen und Spalten lassen sich nicht mehr mit diesen Regeln berechnen, sondern man verwendet ein Verfahren, bei dem schrittweise auf Determinanten mit zwei Zeilen und Spalten reduziert wird, die sich wie bisher berechnen lassen.

2.8. Anwendung linearer Funktionen

Viele Zusammenhänge in wirtschaftlichen Bereichen können durch lineare Funktionen beschrieben werden. Dies hat einerseits den Vorteil, daß die mathematischen Verfahren für die auftretenden Berechnungen nicht sonderlich kompliziert sind und andererseits ergibt sich die Möglichkeit der einfachen graphischen Darstellung und Interpretation dieser Funktionen.

Im folgenden sind wichtige Anwendungsbereiche der linearen Funktion gegeben.

(a) Kostenfunktion, Tariffunktion

Oft ergibt sich ein direkter (linearer) Zusammenhang zwischen den Gesamtkosten für ein Produkt und der Stückzahl. Das heißt, daß für ein einzelnes Stück gewisse Kosten k anfallen; werden x Stück gekauft bzw. produziert, so fallen Gesamtkosten K in der Höhe von $k \cdot x$ an. Die Einzelkosten k bezeichnet man in diesem Zusammenhang als die variablen Stückkosten, da die Gesamtkosten insofern variabel sind, als sie nur von der Stückzahl abhängen.

Eine lineare Kostenfunktion mit nur variablen Kosten hat die Form **$K = k_v \cdot x$**

Der Index v bei k_v soll andeuten, daß es sich um variable Kosten handelt.
Erfahrungsgemäß weiß man, daß neben den variablen Kosten oft auch noch fixe Kosten (meist regelmäßig für eine bestimmte Zeitperiode) anfallen. Diese Fixkosten müssen zu den variablen Kosten addiert werden, um die Gesamtkosten zu erhalten.

Die allgemeine Kostenfunktion mit variablen Kosten und Fixkosten hat die Form

$$K = k_v \cdot x + K_f$$

Wieder deutet der Index f bei K_f an, daß es sich nun um fixe Kosten handelt.

Diese Funktion findet überall dort Anwendeung, wo Kosten entstehen, die sich aus gewissen Grundkosten (den Fixkosten) und Kosten abhängig von der Menge anfallen. Daher können die meisten Tariffunktionen (Gas/Strompreis, Telefongebühren, Taxigebühren, Automieten, ...) in diesem Sinn veranschaulicht werden.

Beispiel: *Eine Videoverleih wirbt mit folgenden Angaben: Grundgebühr S 50,-, Miete pro Tag S 20,-. Erstellen Sie die Tariffunktion.*

Die Fixkosten sind offensichtlich die Grundgebühr: $K_f = 50$

Die tägliche Gebühr sind offensichtlich die variablen Kosten: $k_v = 20$

Bezeichnen wir die Anzahl der Tage mit t, so ergibt sich: $K = 20 \cdot t + 50$

(b) Erlösfunktion

Ebenso wie die Gesamtkosten für ein Produkt von der Menge abhängig sein können, so besteht meist auch ein direkter (linearer) Zusammenhang zwischen Stückzahl und Erlös. Unter Erlös wollen wir die Einnahmen beim Verkauf einer Menge verstehen (also nicht den Gewinn). Der Erlös pro Stück wird oft mit p bezeichnet (Preis pro Stück).

Die lineare Erlösfunktion hat die Form $\mathbf{E = p \cdot x}$

(c) Gewinnfunktion

Sind der Erlös und die Kosten bekannt, so bezeichnen wir die Differenz zwischen Erlös und Kosten als den Gewinn. In dieser Funktion müssen die fixen Kosten dann natürlich mit negativem Vorzeichen auftauchen.

Die lineare Gewinnfunktion hat die Form $\mathbf{G = E - K} = p \cdot x - (k_v \cdot x + K_f) \mathbf{= (p - k_v) \cdot x - K_f}$

(d) Deckungsbeitragsfunktion

In der Gewinnfunktion taucht der Ausdruck $(p - k_v)$ auf. Überlegt man sich eine Interpretation dieses Ausdrucks, so erkennt man, daß es sich hierbei um die Differenz des Erlöses pro Stück und den Kosten pro Stück handelt. Diesen Betrag, den „Gewinn pro Stück“, bezeichnet man als Deckungsbeitrag pro Stück; der Deckungsbeitrag pro Stück multipliziert mit der Stückzahl ist der gesamte Deckungsbeitrag.

Die lineare Deckungbeitragsfunktion hat die Form $\mathbf{DB = (p - k_v) \cdot x}$

Beispiel: *Über die Produktion von Gartenzwergen ist bekannt, daß in einer Produktionsperiode 100 Stück S 11.200,- bzw. 200 Stück S 17.400,- an Kosten verursachen. Wie groß sind die Kosten bei einer Produktion von 300 Stück (linearer Zusammenhang)?*

Einsetzen der Angaben in der Kostenfunktion: $11200 = 100 \cdot k_v + K_f$

$17400 = 200 \cdot k_v + K_f$

Löst man diese Gleichungssystem, so erhält man: $k_v = 62$ *und* $K_f = 5000$

Die Kostenfunktion lautet daher: $K = 62 \cdot x + 5000$

Die Kosten für 300 Stück sind: $K(300) = 23600$

Wir wollen abschließend noch Überlegungen über den Zusammenhang der erwähnten Funktionen anstellen.

Stellt man die Funktionen graphisch dar (sinnvoll für $\mathbf{x \geq 0}$), so hat der Verlauf und die Schnittpunkte der Funktionen miteinander durchaus Bedeutung. Wir wollen im folgenden die x-Werte als Stückzahlen ansehen und die y-Werte als die entsprechenden Geldbeträge verstehen.

Die **Kostenfunktion hat bei x = 0** einen Schnittpunkt mit der y-Achse, in Analogie zur Geradengleichung $y = kx + d$ liegt dieser Schnittpunkt bei $(0|K_f)$; das bedeutet, daß bei Produktion von Null Stück nur die **Fixkosten** anfallen.

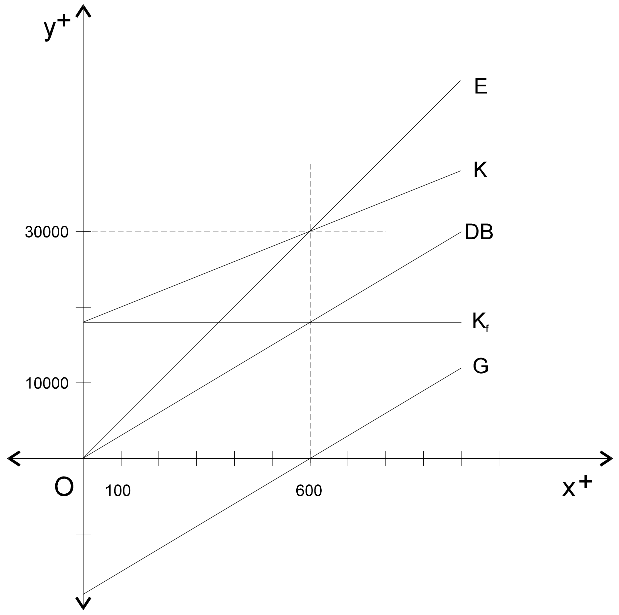
Die **Gewinnfunktion** hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse und der x-Achse. Der Schnittpunkt bei **x = 0** liegt bei $(0|-K_f)$; wird nichts produziert ist der Gewinn „negativ“, das heißt also **Verlust**. Dieser Zustand hält an bis zum Schnittpunkt der Gewinnfunktion mit der x-Achse (**y = 0**); an dieser Stelle wechselt die Produktion von der Verlustphase zur Gewinnphase. Diesen Punkt bezeichnet man als **Gewinnschwelle** (**Break-Even-Point**).

Die **Erlösfunktion** ist eine Gerade durch den Ursprung - kein Verkauf bedeutet auch keine Einnahmen. Schneidet man die **Erlösfunktion mit der Kostenfunktion**, so erhält man einen Schnittpunkt, dessen x-Wert an der Stelle der **Gewinnschwelle** liegt. Der y-Wert des Schnittpunktes stellt den Erlös bzw. die Kosten für diese Stückzahl dar; diese Beträge sind an der Gewinnschwelle nämlich gleich groß.

Die Gerade des **Deckungsbeitrages** ist eine Parallele zur Gewinnfunktion. Ihr Schnittpunkt mit den **Fixkosten** liegt ebenfalls beim x-Wert der **Gewinnschwelle**. An dieser Stelle ist der Gesamtdeckungsbeitrag so groß wie die Fixkosten. Die Gerade der Fixkosten selbst ist eine Parallele zur x-Achse, die **Fixkosten** sind natürlich immer **konstant**.

Beispiel: *Ein Einprodukt-Betrieb erzielt pro verkaufter Mengeneinheit einen Erlös von S 50,- pro Stück. Die Kosten des Betriebes setzten sich zusammen aus Fixkosten je Periode von S 18.000,- und den proportionalen (variablen) Kosten von S 20,- pro Stück. Bei welcher Stückzahl ist die Gewinnschwelle (Break-Even-Point) erreicht?*

$$K = 20x + 18000$$
$$E = 50x$$
$$G = 50x - (18000 + 20x) = 30x - 18000$$
$$K_f = 18000$$
$$DB = 30x$$



Der Schnittpunkt von G bei y = 0 leigt bei x = 600. Die Gewinnschwelle liegt daher bei 600 Stück, bei geringerer Produktion macht der Betrieb Verlust.

Die Kosten bzw. der Erlös bei x = 600 Stück beträgt S 30.000,-, ersichtlich im Schnittpunkt von Kosten- und Erlösfunktion.

Der Gesamtdeckungsbeitrag bei x = 600 Stück beträgt S 18.000,-; das ist genau die Höhe der Fixkosten.

2.9. Anwendung linearer Gleichungssysteme

Eine Anwendung der linearen Gleichungssysteme findet sich in der sogenannten innerbetrieblichen Leistungsverflechtung.

Mehrere Hilfsbetiebe (**Hilfskostenstellen**) eines Unternehmens erbringen Leistungen
- zum einem Teil für andere Hilfsbetriebe (Hilfskostenstellen) und
- zum anderen Teil für die Hauptbetriebe (**Hauptkostenstellen**).

Jedem Hilfsbetrieb können direkt Kosten zugerechnet werden, man nennt sie „**primäre Kosten**". Das sind jene Kosten, die im jeweiligen Hilfsbetrieb durch die Produktion anfallen.

Zusätzlich werden den Hilfsbetrieben noch „**sekundäre Kosten**" zugerechnet, darunter versteht man die anteiligen Kosten für Leistungen, die von anderen Hilfsbetrieben bezogen wurden.
Darüberhinaus muß die insgesamt erbrachte Leistung der Hilfsbetriebe bekannt sein.

Durch die Situatiuon, daß ein Hilfsbetrieb für seine Produktion Leistungen von anderen Hilfsbetrieben bezieht, selbst aber ebenfalls für andere Hilfsbetriebe und den Hauptbetrieb Leistungen erbringt, entsteht eine Verflechtung der Leistungen; ist diese Verflechtung durch ein lineares Gleichungssystem beschreibbar, so spricht man von **linearer Leistungsverflechtung**.

Unter der Voraussetzung, daß die primären und sekundären Kosten bekannt sind, stellt sich nun folgende Frage:
Wie hoch sind die Kosten je Leistungseinheit (LE) für die Leistungen der Hilfbetriebe (**Verrechnungspreise der Hilfsbetriebe**) unter Berücksichtigung dieser wechselseitigen Leistunsverflechtung?

Die Antwort findet man als Lösung eines entsprechenden **linearen Gleichungssystems**.

Für jeden Hilfsbetrieb wird eine Gleichung aufgestellt, wobei gelten muß:

Die Summe der abgegebenen Leistungen eines Hilfsbetriebes bewertet zum Verrechnungspreis (Kosten je Leistungseinheit) ist gleich der Summe der primären und sekundären Kosten dieses Hilfsbetriebes.

Beispiel:

Drei Hilfsbetriebe A, B und C erbringen innerhalb einer bestimmten Zeit insgesamt 7000, 500 und 200 Leistungseinheiten (LE). Die primären Kosten für die drei Hilfsbetriebe betragen für A 1300, für B 4100 und für C 2000 Geldeinheiten (GE). Die Hilfsbetriebe nehmen die in nachstehender Tabelle angegebenen Leistungen (in LE) von anderen Hilfsbetrieben in Anspruch, der verbleibende Rest wird für die Hauptbetriebe erbracht.

Hilfsbetrieb	**Leistungserstellung in LE**	**Primäre Kosten in GE**	**Erhaltene Lieferungen in LE von Hilfsbetrieben**		
			A	**B**	**C**
A	*7000*	*1300*	–	*200*	*10*
B	*500*	*4100*	*1000*	–	*20*
C	*200*	*2000*	*3000*	*50*	–

Die Tabelle ist wie folgt zu verstehen (für Hilfsbetrieb A):
Hilfsbetrieb A erzeugt insgesamt 7000 Leistungseinheiten. Die primären Kosten für den Hilfsbetrieb A betragen 1300. Hilfsbetrieb A erhält von Hilfsbetrieb B 200 LE und von Hilfsbetrieb C 10 LE.

Wie hoch sind nun die gesamten Kosten je LE (Verrechnungspreise a, b und c) der einzelnen Hilfsbetriebe unter Berücksichtigung der wechselseitigen Leistungsverflechtung?

$$\begin{aligned} &I: && 7000a = 1300 + 200b + 10c \\ &II: && 500b = 4100 + 1000a + 20c \\ &III: && 200c = 2000 + 3000a + 50b \end{aligned}$$

Interpretation der Gleichung I (für Hilfsbetrieb A):
Die Summe der abgegebenen Leistungen (7000) des Hilfsbetriebes A, bewertet zum Verrechnungspreis (a) = primäre Kosten (1300) + sekundäre Kosten (200b + 10c)

Die sekundären Kosten ergeben sich dabei als Summe der von den anderen Hilfsbetrieben bezogenen Leistungen, bewertet zu ihren Verrechnungspreisen.

Ordnet man die Gleichungen nach den Variablen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 7000a - 200b - 10c = 1300 \\ \text{II:} \quad & -1000a + 500b - 20c = 4100 \\ \text{III:} \quad & -3000a - 50b + 200c = 2000 \end{aligned}$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems erhält man als Lösung:

$$a = 0{,}5 \text{ GE/LE} \qquad b = 10 \text{ GE/LE} \qquad c = 20 \text{ GE/LE}$$

Werden die von den Hilfsbetrieben an die Hauptbetriebe und die anderen Hilfsbetriebe abgegebenen Leistungen mit diesen Sätzen verrechnet, so sind die Kosten der Hilfsbetriebe damit gedeckt .

Probe:
In den Hilfsbetrieben entstehen insgesamt 1300 + 4100 + 2000 = 7400 GE primärer Kosten.

Hilfsbetrieb	*liefert an Hauptbetrieb*	*zu*	*insgesamt*
A	*7000–3000–1000 = 3000 LE*	*0,5 GE*	*1500 GE*
B	*500–200–50 = 250 LE*	*10 GE*	*2500 GE*
C	*200–20–10 = 170 LE*	*20 GE*	*3400 GE*
		insgesamt:	*7400 GE*

Diese 7400 GE hat der Hauptbetrieb an die Hilfsbetriebe für die bezogenen Leistungen zu bezahlen.

Auch die Abrechnung zwischen den Hilfsbetrieben muß stimmen. Hilfsbetrieb A liefert an den Hauptbetrieb 3000 LE und erhält dafür 1500 GE.
Für die Lieferung an die Hilfsbetriebe B und C erhält A 1000·0,5 GE + 3000·0,5 GE = 2000 GE, insgesamt also 1500 GE + 2000 GE = 3500 GE.
Davon müssen jedoch die von den anderen Hilfsbetrieben erbrachten Leistungen 200·10 GE + 10·20 GE = 2200 GE gezahlt werden. Die Differenz beträgt 3500 GE – 2200 GE = 1300 GE, mit denen die primären Kosten gedeckt sind.
Diese Rechnung muß nun auch für die Hilfsbetriebe B und C stimmen.

Anhang: Übungsbeispiele zum 2. Kapitel

2/1 Lösen Sie folgende Gleichungen über der Grundmenge R:

a) $5 - [(9 + 7x) + (3x - 1)] = 4 + (2x - 7)$

b) $4x - 3(20 - x) = 6x - 7(11 - x) + 11$

c) $4{,}3s - 12(0{,}3s + 1{,}2) = 0{,}3(20s - 9) - 2(4{,}6s - 2) - 0{,}1$

d) $7\left(3p + \frac{1}{2}\right) - 6\left(4p - \frac{1}{3}\right) - 5\left(5p + \frac{1}{4}\right) + 2\frac{3}{4} = 0$

2/2 Lösen Sie folgende Gleichungen über der Grundmenge R:

a) $2(x - 0{,}1) + 3(2x - 0{,}01) + 4(3x - 0{,}001) = 24{,}446$

b) $2(3 - 1{,}4z) - 4(5 - 1{,}6z) + 6(7 - 1{,}8z) = -8$

c) $738y - 73{,}8(0{,}738 - 7{,}38y) = 73{,}8 - 0{,}738(7{,}38 - 73{,}8y)$

d) $0{,}5\{0{,}5[0{,}5(0{,}5\{0{,}5w - 1\} - 1) - 1] - 1\} = 1$

2/3 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x über der Grundmenge R:

a) $3(4a - 3x) = 5(4b - x)$

b) $ab + (b + 1)x = (a + x)b + a$

c) $ax - bx - m(x - 1) = m$

d) $a(b - x) + b(c - x) = b(a - x) + cx$

2/4 Lösen Sie folgende Gleichungen über der Grundmenge R:

a) $(x - 3)(x - 4) = (x - 6)(x - 2)$

b) $(2x + 7)(x + 3) = 2(x + 5)(x + 2)$

c) $(5x - 4)^2 - (4x - 3)^2 = (3x + 1)^2 - 82$

d) $(9 - 4x)(9 - 5x) + 4(5 - x)(5 - 4x) = 36(2 - x)^2$

e) $(x - 7)^2 - (x + 5)^2 = (x - 3)^2 - (x + 4)^2 + 11$

f) $(1 + 6x)^2 + (2 + 8x)^2 = (1 + 10x)^2$

2/5 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x über der Grundmenge R:

a) $(x-a)(x-b)=x^2-a^2$

b) $(a-b)(x-c)-(a+b)(c+x)+2a(b+c)=0$

c) $(m+x)(a+b-x)+(a-x)(b-x)=a(m+b)$

d) $(a+x)(b+x)(c+x)-(a-x)(b-x)(c-x)=2(x^3+abc)$

2/6 Lösen Sie folgende Gleichungen über der Grundmenge R:

a) $11-\left(\frac{3f-1}{4}+\frac{2f+1}{3}\right)=10-\left(\frac{2f-5}{3}+\frac{7f-1}{8}\right)$

b) $\frac{6g-1}{10}+\frac{2(1+4g)}{15}-\frac{8g-1}{9}=1$

c) $\frac{5h-0{,}4}{0{,}3}+\frac{1{,}3-3h}{2}=\frac{1{,}8-8h}{1{,}2}$

d) $\frac{3-k}{2}-\left(\frac{7-k}{3}-\frac{k+3}{4}\right)+\left(\frac{7-k}{6}-\frac{9+3k}{8}\right)=-k$

2/7 Lösen Sie folgende Aufgaben zur Berechnung von Zahlen:

a) Eine zweistellige Zahl, deren Zehnerziffer um 5 größer ist als die Einerziffer, ist 36 mal so groß wie die Einerziffer.

b) Die Hunderter-, Zehner- und Einerziffer einer dreistelligen Zahl bilden in dieser Reihenfolge drei aufeinanderfolgende Zahlen. Vertauscht man Hunderter- und Einerziffer, so ist die neue Zahl um 36 kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

c) Zieht man vom Dreifachen einer zweiziffrigen Zahl mit der Ziffernsumme 9 die Zahl 9 ab, so erhält man eine Zahl, die die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufweist wie die ursprüngliche Zahl.

d) Nimmt man in einer dreiziffrigen Zahl mit der Hunderterziffer 2 diese von links weg und fügt sie rechts an, so ist die neue Zahl um 74 größer als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

2/8 Lösen Sie folgende Verteilungsaufgaben:

a) Die Gesamtschulden einer Firma betragen S 480.000,-. Die Schulden verteilen sich auf drei Gläubiger A, B, C derart, daß B doppelt soviel wie A und C dreimal soviel wie A zu bekommen hat. Berechnen Sie die Beträge der Gläubiger.

b) Bei einem gemeinsamen Geschäft dreier Unternehmen A, B und C ergab sich am Abrechnungstag, dem 31. August, ein Gewinn von S 85.500,-. Wieviel bekommt jedes Unternehmen, wenn A seit 5. März, B seit 4. Mai mit einem um die Hälfte höheren Betrag als A und C mit dem doppelten von B seit 23. Juni beteiligt war? (Erster und letzter Tag werden laut Abmachung von A, B und C mitgerechnet.)

c) Von zwei Kapitalien ist das kleinere gleich einem Drittel des größeren. Ersteres ist zu 5%, letzteres zu 4% angelegt. Nach einem Jahr werden beide Einlagen samt Zinsen in Höhe von S 42.450,60 zurückgezahlt. Berechnen Sie die Höhe der beiden Kapitalien.

d) Die Kaufleute A, B, C und D beteiligen sich an einem Geschäft mit S 80.000,-, S 120.000,-, S 90.000,- und S 150.000,-. Wie ist ein Gewinn von S 220.000,- aufzuteilen?

2/9 Lösen Sie folgende Mischungsaufgaben:

a) Für Rumobst werden 4l 50%iger Rum benötigt. Es stehen 32%iger und 92%iger Rum zur Verfügung. Wieviel Liter ist von jeder Sorte zu nehmen?

b) In einem Labor werden aus einer 50l Flasche 3l 90%iger Alkohol entnommen. Die Flasche wird dann mit Wasser aufgefüllt, die Konzentration beträgt nun 72%. Wieviel Liter fehlten in der Flasche am Beginn?

c) Ein Schmuckstück soll 66g Gold vom Feingehalt 800 enthalten. Es stehen nur Goldsorten vom Feingehalt 750 und 900 zur Verfügung. Berechnen Sie, wieviel man von beiden Sorten für die Herstellung des Schmuckstückes benötigt.

d) Wieviel kg Wasser muß aus 48kg einer 12%igen Salzlösung verdunsten, um eine Lösung von 20% zu erhalten. Wieviel Salz wäre der Lösung zuzufügen, um dasselbe Ergebnis zu erzielen?

2/10 Lösen Sie folgende Leistungsaufgaben:

a) Drei Bagger können eine Grube in 10 Tagen ausheben. Diese Zeit verlängert sich durch Ausfall eines Baggers um 3 Tage. Wann ist der Bagger ausgefallen?

b) An einer Mauer arbeiten drei Maurer. Der erste allein würde die Mauer in 12 Tagen, der zweite allein in 10 Tagen aufbauen; alle drei zusammen brauchen dafür 4 Tage. Wie lange würde der dritte Maurer alleine brauchen?

c) Drei Röhren füllen ein Gefäß in 4 Stunden. Die erste füllt es allein in 15 Stunden, die zweite allein in 20 Stunden. Aus der dritten fließen stündlich 500l mehr als aus der zweiten. Wieviel Liter faßt das Gefäß?

d) Ein Kohlenvorrat reicht 10 Wochen, wenn wöchentlich gleich viel entnommen wird. Wird aber wöchentlich 61kg weniger entnommen, so ist der Vorrat erst nach 11 Wochen verbraucht. Wie groß war der Vorrat ursprünglich?

2/11 Lösen Sie folgende Bewegungsaufgaben:

a) Ein Zug, der um 7 Uhr mit 22,5km/h von A abfährt, kommt mit einem Zug, der um 12 Uhr mit 60km/h von A abfährt, in B gleichzeitig an. Wie weit ist A von B entfernt?

b) In welcher Zeit fahren zwei Züge von 200m und 250m Länge aneinander vorüber, wenn sie 9m/s und 13,5m/s Geschwindigkeit besitzen (Berechnung für gleiche und entgegengesetzte Fahrtrichtung)?

c) Ein Schlepper würde auf stillstehendem Gewässer 300m pro Minute zurücklegen. Er fährt stromaufwärts und erreicht in 1,25 Stunden sein Ziel; in der Fahrt stromabwärts braucht er für dieselbe Strecke nur 50 Minuten. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers?

d) Zwei Körper bewegen sich auf einer Kreisbahn in gleicher Richtung. Der eine legt eine Strecke von 1m in 2s, der andere in 5s zurück. Sie treffen das erste Mal nach 20s, das zweite Mal nach 70s von Anfang der Bewegung zusammen. Wie groß ist ihre anfängliche Entfernung? Wie groß ist der Radius des Kreises?

e) Wieviele Minuten nach 8 Uhr stehen Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr das erste Mal übereinander?

2/12 Lösen Sie folgende Gleichungen über der Grundmenge R und bestimmen Sie die Definitionsmengen:

a) $\frac{3x-2}{x-5} = \frac{4x}{3x-15} + 2$

b) $\frac{a-16}{a-17} + \frac{a-14}{a-9} = 2$

c) $\frac{5(2d^2+3)}{2d+1} - \frac{7d-5}{2d-5} = 5d-6$

d) $\frac{2x-3}{x-4} + \frac{3x-2}{x-8} = \frac{5x^2-29x-4}{x^2-12x+32}$

e) $\frac{3}{x-7} + \frac{1}{x-9} = \frac{4}{x-8}$

f) $\frac{b-8}{b-3} + \frac{b-3}{b-5} + \frac{b-9}{b-7} = \frac{b-1}{b-3} + \frac{b-13}{b-5} + \frac{b-6}{b-7}$

2/13 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x über der Grundmenge R und bestimmen Sie die Definitionsmengen:

a) $(a^2-b^2):cx = (a+b):c$

b) $(x-p):x = x:(x-q)$

c) $\frac{ab+ac+ad}{3} : \frac{bx+cx+dx}{6} = \frac{1}{bc} :3abc$

d) $\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 3$

2/14 Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen und bestimmen Sie die Definitionsmengen:

a) $\sqrt{3t-5} + 4 = 5$

b) $5 - 3\sqrt{r+6} = 2$

c) $3\sqrt{3q-5} - 2 = 2\sqrt{3p-5} + 2$

d) $10 - \sqrt{(u-3)(u+13)} = u-1$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{c+9} - \frac{1}{3}\sqrt{c+14} = 0$

2/15 Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen und bestimmen Sie die Definitionsmengen:

a) $\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2x+15} = 13$

b) $\sqrt{16a-15} - \sqrt{9a-11} = \sqrt{a}$

c) $2\sqrt{d+5} + 3\sqrt{d-7} = \sqrt{25d-79}$

d) $\sqrt{13+4\sqrt{f-1}} = 5$

e) $\sqrt{6x+4+\sqrt{x^4+10x^2+3x+10}} = x+3$

2/16 Lösen Sie folgende Betragsgleichungen und bestimmen Sie die Definitionsmengen:

a) $|3x-4| + 2 = 2x-5$

b) $2|2r+4| = |-3r-2|$

c) $|3h+6| - |4-4h| = 2 + |7h+9|$

d) $|3-|2x+5|| = 6$

2/17 Erstellen Sie eine Wertetabelle für folgende Funktionen und zeichnen Sie die Zahlenpaare in ein Koordinatensystem von $-5 \le x \le 5$. Nennen Sie bei jedem Punkt der Wertetabelle, in welchem Quadranten er liegt:

a) $f(x) = 4x-5$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) „Multiplizieren Sie eine Zahl mit sich selbst, addieren Sie die Zahl dreimal und ziehen Sie 7 ab“

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

e) „Addieren Sie 3 zu einer Zahl, verdoppeln Sie das Ergebnis, geben Sie 4 dazu, verdreifachen Sie das Ergebnis, ziehen Sie 30 ab und dividieren Sie das Ergebnis durch die anfängliche Zahl“

2/18 Konstruieren Sie die folgenden Geraden und bestimmen Sie graphisch und rechnerisch den Schnittpunkt mit der y-Achse D sowie die Nullstelle N:

a) g: $y = 2x + 1$

b) g: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

c) g: $3y - 2x = 6$

d) g: $7x - 3y = -5$

2/19 Erstellen Sie anhand der folgenden Angaben die jeweilige Geradengleichung:

a) P(3|2), k=2

b) Q(4|–3), d=4

c) R(–1|–1), k=1

d) S(12|–34), d=–56

e) T(–2|2), k=–1

2/20 Erstellen Sie anhand der folgenden Angaben die jeweilige Geradengleichung:

a) P(3|4), Q(9|10)

b) R(–4|5), $S(\frac{2}{3}|\frac{3}{2})$

c) D(0|5), N(6|0)

d) E(3|–2), F(–6|–2)

e) G(–7|5), H(–7|–4)

2/21 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils mit dem Ihnen am günstigsten erscheinenden Lösungsverfahren:

a) I: $8x + 3y = 23$ II: $7x + 4y = 16$

b) I: $x + y = 347$ II: $x - y = 153$

c) I: $x = 3y - 19$ II: $y = 3x - 23$

d) I: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6$ II: $3x - 4y = 4$

2/22 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils mit dem Ihnen am günstigsten erscheinenden Lösungsverfahren:

a) I: $5x + 7y = 176$ II: $5x - 3y = 46$

b) I: $3x + y = 73$ II: $2x - y = 32$

c) I: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 17$ II: $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 19$

d) I: $x - y = 0$ II: $x = 3$

2/23 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils mit dem Ihnen am günstigsten erscheinenden Lösungsverfahren:

a) I: $x - 4y = -4$ II: $8y - 2x = 16$

b) I: $2x = 3y - 3$ II: $6y = 4x + 6$

Versuchen Sie aufgrund dieser Ergebnisse eine Aussage über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen zu geben.

2/24 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils mit dem Additionsverfahren oder der Determinantenmethode:

a) I: $3x + 2y + 3z = 110$ II: $5x + y - 4z = 0$ III: $2x - 3y + z = 0$

b) I: $x + y + z = 9$ II: $x + 2y + 3z = 14$ III: $x + 3y + 6z = 20$

c) I: $-4x + 3y - 2z = 8$ II: $5x + 4y - 6z = -8$ III: $-3x + 2y + 4z = 19$

d) I: $1{,}5x + 0{,}6y + 2{,}1z = -7{,}2$ II: $-0{,}5x + 1{,}8y + 1{,}4z = -12{,}1$ III: $2{,}5x + 2{,}4y - 0{,}7z = 6{,}2$

2/25 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils mit dem Additionsverfahren oder der Determinantenmethode:

a) I: $x + y = 28$ II: $x + z = 30$ III: $y + z = 32$

b) I: $x + y + z = 100$ II: $3x - 2z = 4$ III: $5y = 4z$

c) I: $5x + 3y + 2z = 217$ II: $5x - 3y = 39$ III: $3y - 2z = 20$

d) I: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = \frac{73}{2}$ II: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 27$ III: $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{7}z = 18$

2/26 Eine Firma bietet Reinigungstücher zum Preis von S 12,50/Stk. an. Die variablen Kosten pro Stück betragen S 7,70; die Fixkosten betragen S 2.880,-.
Stellen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion auf.
Ab wievielen verkauften Stück kommt die Firma in die Gewinnzone (Break-Even-Point)?

2/27 Eine Firma verleiht Videorekorder zu drei Tarifen:

Tarif I:	S 100,-/Tag
Tarif II:	Grundgebühr S 60,- plus S 80,-/Tag
Tarif III:	Grundgebühr S 200,- plus S 60,-/Tag

Zeichnen Sie die drei Tariffunktionen. Erstellen Sie eine Tabelle, aus der man ablesen kann, welcher Tarif für welche Entlehnperiode der günstigste ist.

2/28 Die jährliche Abschreibung für eine Anschaffung beträgt S 7.300,-, die Nutzungsdauer beträgt 5 Jahre. Wie groß war der Kaufpreis? Welchen Buchwert hat die Anschaffung nach 3 Jahren?

2/29 Wieviel kostet 1kWh Haushaltsstrom, wenn bei einer Grundgebühr von S 45,- und einem Verbrauch von 138 kWh die Stromrechnung auf S 178,86 lautet?

2/30 Bei einer Monatsproduktion von 200000 kg Zucker betragen die Gesamtkosten eines Betriebes S 1.800.000,-. Wie hoch sind die fixen Kosten des Betriebes, wenn die proportionalen Kosten S 5,50 pro kg betragen?

2/31 Zwei Taxiunternehmen haben folgende Angebote:
Taxi A: Standgebühr: S 30,-, Kosten pro km : S 3,50 und
Taxi B: Standgebühr: S 40,-, Kosten pro km : S 2,-.
Stellen Sie die Kostenfunktion für beide Unternehmen auf. Ab welcher Strecke ist Taxi B billiger?

2/32 Ein Liter Wein kostet im Geschäft S 24,-. Derselbe Wein kostet beim Weinbauern S 18,- pro Liter. Die Fahrt zum Weinbauern verursacht Kosten von S 40,-. Stellen Sie die Kostenfunktion auf und ermitteln Sie, ab welcher Menge die Fahrt zum Weinbauern sinnvoll wird.

2/33 Die Gesamtkosten eines Betriebes betragen bei einer Erzeugungsmenge von 100 Stück S 169.000,-, bei einer Produktion von 120 Stück S 187.000,- je Monat. Das Produkt wird um S 600,- pro Stück verkauft. Stellen Sie die Kosten-, Gewinn- und Deckungsbeitragsfunktion auf. Wieviel kostet die Produktion von 200 Stück.

2/34 Eine Firma hat drei Hilfskostenstellen: Betriebsmittel (B), Verpackung (V) und Wartung (W). Nachfolgendes Schema zeigt die Gesamtleistung dieser Stellen, ihre gegenseitige Verflechtung und die anfallenden primären Kosten:

Hilfsstelle	Leistung	primäre Kosten	erhaltene Leistung von		
			B	V	W
B	50	19	–	8	5
V	25	39	5	–	2
W	20	43	1	8	–

Berechnen Sie die internen Verrechnungspreise dieser drei Hilfskostenstellen.

2/35 Jedes von drei Werken W1, W2, W3 erzeugt drei Produkte P1, P2, P3. W1 erzeugt jedes Monat 10 Stück P1, 5 Stück P2 und 1 Stück P3. W2 erzeugt 5 Stück P1, 3 Stück P2 und 2 Stück P3. W3 erzeugt 5 Stück P1, 4 Stück P2 und 6 Stück P3. Im Werk W1 werden für die Produktion 60 Arbeitsstunden, im Werk W2 39 Arbeitsstunden und im Werk W3 62 Arbeitsstunden aufgewendet. Wie viele Arbeitsstunden sind für ein Stück P1, P2 und P3 unter Einbeziehung dieser Verflechtungen erforderlich?