O. GRUNDBEGRIFFE

Versuchen Sie die folgenden Begriffe - durchwegs Begriffe des täglichen Sprachgebrauchs - genauer (mathematisch) zu definieren.

Ziffer

Zahl

Null

Rechnen

Rechenoperationen

Stellenwert

Zahlensystem

Einheit

Unbekannte

Variable

Formel

Gleichung

Ungleichung

1. ZAHLEN, MENGEN, RECHENGESETZE

1.1. Mengen

(a) Definition

Möchte man eine bestimmte Aussage - z.B. über die Teilnehmer eines Kurses - treffen, könnte man alle Namen nennen, oder aber, die Teilnehmer unter einem Sammelbegriff zusammenfassen, etwa unter „Kurs 1“.

Diese Vorgangsweise ermöglicht eine erste Definition des Begriffs der Menge:

Eine **Menge** entsteht durch eine Zusammenfassung von eindeutig unterscheidbaren Dingen (Objekten) zu einem Ganzen. Diese Dinge nennt man **Elemente** der Menge.

Mengen ergeben sich oft aufgrund gemeinsamer Eigenschaften der Elemente, etwa die Menge der Wiener Autokennzeichen, die Menge aller Zahlen eines Würfels ...

Beispiel: *Die Menge der Buchstaben des Wortes MATHEMATIK ist gegeben durch die Buchstaben : A, E, H, I, K, M, T*

So aber ist die Zeile von Buchstaben noch nicht als zusammengehörige Menge zu erkennen.

Eine Menge wird immer durch einen Großbuchstaben symbolisiert und die Elemente werden immer in geschwungenen Klammern angeschrieben:

$$M = \{A,E,H,I,K,M,T\}$$

Aus diesem Beispiel ergeben sich ferner zwei wichtige Eigenschaften von Mengen:

1. Die Elemente der Menge müssen **nicht geordnet** sein.
2. Jedes Element kommt nur **einmal** vor.

(b) Wichtige Mengen

$N = \{0,1,2,3,4,5,...\}$ (zuweilen auch $N = \{1,2,3,...\}$)	Menge der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen kann man in zwei Gruppen teilen:

$N_g = \{0,2,4,6,8,...\}$ Menge der geraden natürlichen Zahlen

$N_u = \{1,3,5,7,9,...\}$ Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

Eine weitere interessante Menge sind die sogenannten Primzahlen:

Menge der Primzahlen: Sie sind nur durch 1 und sich selbst teilbar.

$P = \{2,3,5,7,11,13,17,19,...\}$

Aus dem Alltag sind uns auch Zahlen mit negativem Vorzeichen durchaus geläufig, man denke etwa an die Temperaturanzeige: – 10°C

$Z = \{...-2,-1,0,1,2,...\}$	Menge der ganzen Zahlen
$Z^+ = \{+1,+2,+3,+4,...\}$	Menge der positiven ganzen Zahlen
$Z^- = \{-1,-2,-3,-4,...\}$	Menge der negativen ganzen Zahlen

weitere Zahlenmengen:

Q	Menge der rationalen Zahlen (Bruchzahlen)
I	Menge der irrationalen Zahlen (Zahlen, die nicht durch einen Bruch oder eine endliche Dezimalzahl darstellbar sind.)
R	Menge der reellen Zahlen („alle Zahlen“)
C	Menge der komplexen Zahlen

Um die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge anzugeben, bedient man sich zweier einfacher Zeichen:

$a \in M$: a ist ein Element der Menge M	oder	a gehört zur Menge M.
$a \notin M$: a ist kein Element der Menge M	oder	a gehört nicht zur Menge M.

(c) Besondere Mengen

Unendliche Mengen

Bisher haben wir zumeist nur über unendliche Mengen - also Mengen mit unendlich vielen (unbeschränkt vielen) Elementen - gesprochen (Beispiele siehe vorige Seite).

Mengen können aber auch - z.B. durch bestimmte Vorschriften - beschränkt sein:

Endliche Mengen

Endliche Mengen sind Mengen, mit einer endlichen (beschränkten) Anzahl von Elementen.

Beispiele:

- *Menge der Buchstaben im Wort Mathematik: beschränkt dadurch, daß man aus den Buchstaben nur das Wort Mathematik bilden können muß.*
- *Menge der positiven Teiler von 8: $T(8) = \{1,2,4,8\}$*
- *Menge der ungeraden natürlichen Zahlen von 3 bis 11: $M = \{3,5,7,9,11\}$*

Leere Menge

Die leere Menge ist jene Menge, die überhaupt kein Element enthält.
Bezeichnung: { } oder mit ∅

Beispiel: *Menge der natürlichen Zahlen zwischen 4 und 5 = { }*

Die leere Menge kann daher immer als die Lösungsmenge für eine Aufgabe ohne Lösung - wie auch im vorigen Beispiel - angesehen werden.

1.2. Festlegung von Mengen

(a) Aufzählendes Verfahren

Alle Elemente einer Menge werden zwischen zwei geschwungenen Klammern aufgezählt. Die bisherigen Mengen wurden derart angegeben.

(b) Beschreibendes Verfahren

Die Elemente der Menge werden durch ihre gemeinsamen Eigenschaften beschrieben. Für das beschreibende Verfahren verwendet man folgende Symbole:

< diese Symbol bedeutet „kleiner als“

Beispiel: *$x < 5$, alle Zahlen, die man für x einsetzt, müssen kleiner als 5 sein.*

> diese Symbol bedeutet „größer als“

Beispiel: *$x > 4$, alle Zahlen, die man für x einsetzt, müssen größer als 4 sein.*

≤ dieses Symbol bedeutet „kleiner oder gleich“

Beispiel: *$x \leq 4$, die Zahlen für x können kleiner oder gleich 4 sein.*

≥ dieses Symbol bedeutet „größer oder gleich“

Beispiel: *$x \geq 3$, die Zahlen für x können gleich oder größer als 3 sein.*

≠ dieses Symbol bedeutet „ungleich“

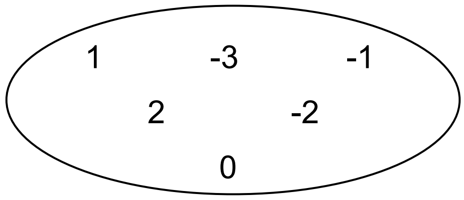
Beispiel: *$3 \neq 4$*

Beispiel: *Legen Sie die Menge $A = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ im beschreibenden Verfahren fest.*

$$A = \{x \in Z \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

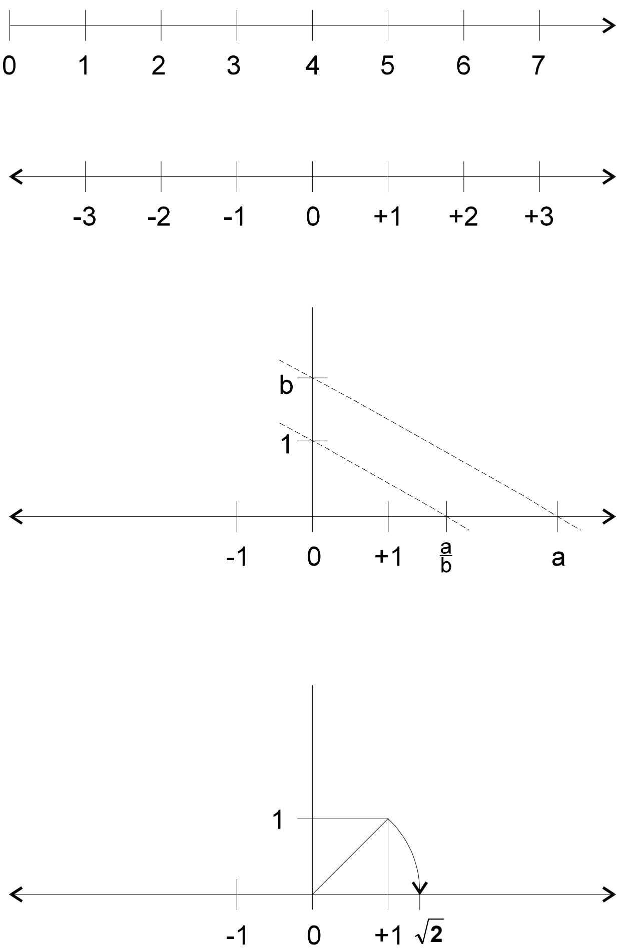
In Worten: *A ist die Menge aller x Element aus den ganzen Zahlen ($x \in Z$), für die gilt (|): x ist größer oder gleich -3 und kleiner oder gleich 2.*

(c) Mengenbild - Venn Diagramm



(d) Veranschaulichung auf der Zahlengerade

Zahlenmengen lassen sich auf der sogenannten Zahlengeraden gut veranschaulichen. Hierbei wird auf einer Geraden ein Nullpunkt gewählt; eine Zahl a stellt man dann durch einen Punkt auf der Geraden dar, der den Abstand a vom Nullpunkt hat. Ist a positiv, so liegt der Punkt rechts vom Nullpunkt, ist a negativ, so liegt der Punkt links vom Nullpunkt.



Die Menge der natürlichen Zahlen N besteht auf dem Zahlenstrahl aus den Punkten mit jeweils Abstand 1 gemessen vom Nullpunkt. Die Menge der ganzen Zahlen Z besteht auf der Zahlengeraden aus den Punkten im Abstand 1 rechts und links (positiv und negativ) vom Nullpunkt. Die Menge der rationalen Zahlen Q läßt sich auf der Zahlengeraden mit dem geometrischen Hilfsmittel des Strahlensatzes (siehe späteres Kapitel Planimetrie) darstellen. Eine wesentliche Erkenntnis schon der griechischen Mathematiker im Altertum war in diesem Zusammenhang, daß zwischen den rationalen Zahlen noch „Löcher“ bleiben, die irrationalen Zahlen, also jene Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen. Ein klassisches Beispiel ist die angedeutete Konstruktion der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$. Die irrationalen Zahlen ergänzen die rationalen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen; diese stellen alle Punkte der Zahlengerade als einzige Zahlenmenge ohne Löcher dar.

1.3. Relationen zwischen Mengen

(a) Gleichheit

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Beispiel: *Vergleichen Sie die Mengen $A = \{2,3,4\}$ und $B = \{2^2, 6:2, 2\}$*

$B = \{2^2=4, 6:2=3, 2\} = \{4,3,2\} = \{2,3,4\}$

Ergebnis: $A = B$

(b) Mächtigkeit

Unter der Mächtigkeit einer endlichen Menge M versteht man die Anzahl ihrer Elemente.
Symbolisch: $z(M)$ oder $|M|$

Die Mächtigkeit der leeren Menge ist Null. Bei allen nicht leeren endlichen Mengen ist die Mächtigkeit eine natürliche Zahl.

Beispiel: $A = \{2,3,5,7\}$

$z(A) = 4$

(c) Gleichmächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig (A~B),** wenn es eine umkehrbare Abbildung (Zuordnung) von A auf B gibt.

Bei endlichen Mengen heißt das einfach, beide Mengen müssen dieselbe Anzahl von Elementen besitzen.

Beispiele:

- *$A = \{a,b,c,d\}$ und $B = \{1,2,3,4\}$*

$z(A) = z(B) = 4 \Leftrightarrow A \sim B$

- *$N_g = \{0,2,4,6,8,...\}$, $N_u = \{1,3,5,7,9,...\}$*

$N_g \sim N_u$

Jedem Element von N_g kann man genau ein Element von N_u zuordnen.

(d) Teilmenge

Man bezeichnet eine Menge A als **Teilmenge** der Menge B, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist. Symbolisch: $A \subseteq B$

Beispiel: *$A = \{2,3,5,7,11\}$ und $B = N$*

A ist eine Teilmenge von B, da alle Elemente von A auch Elemente von B sind.

A ist sogar eine **echte Teilmenge** (symbolisch: $A \subset B$); man spricht von einer echten Teilmenge, wenn A Teilmenge von B ist, aber $A \neq B$ ist.

Weitere Anmerkungen zu Teilmengen:

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subseteq A$

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subseteq A$

Ist $A \subseteq B$, so nennt man B die **Obermenge** von A

1.4. Verknüpfung von Mengen

(a) Durchschnitt von Mengen

Die Durchschnittsmenge (der Durchschnitt) zweier Mengen A und B ($A \cap B$) ist die Menge aller Elemente, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören.

$A \cap B$: A geschnitten B $\qquad A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ $\qquad \wedge$: „und“

Beispiel: $A = \{x \in P \mid x \leq 7\}$, $B = \{x \in N \mid x \text{ teilt } 12\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

Eigenschaften der Durchschnittsmenge

- Der Durchschnitt ist Teilmenge jeder der gegebenen Mengen:

$$A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$$

- Ist A Teilmenge der Menge B gilt: $A \cap B = A$
- Für alle A gilt: $A \cap A = A$
- Haben zwei Mengen A und B kein gemeinsames Element, so nennt man sie **elementfremd (disjunkt),** die Durchschnittsmenge disjunkter Mengen ist die leere Menge:

$$A \cap B = \{\ \}$$

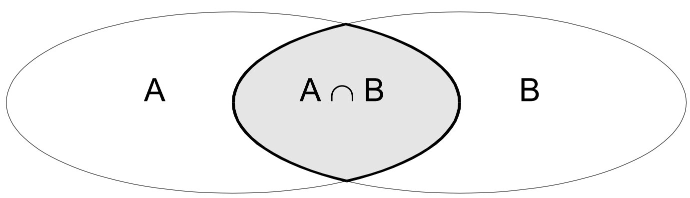
- Der Durchschnitt ist immer derselbe, egal ob man A geschnitten B oder B geschnitten A bildet. Diese Regel nennt man **Kommutativgesetz**:

$$A \cap B = B \cap A$$

- Die Reihenfolge der Durchschnittsbildung bei mehreren Mengen ist egal. Diese Regel nennt man **Assoziativgesetz**:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Diagrammdarstellung der Durchschnittsmenge



(b) Vereinigung von Mengen

Die Vereinigungsmenge (die Vereinigung) zweier Mengen A und B ($A \cup B$) ist die Menge aller Elemente, die zur Menge A oder zur Menge B gehören.

$A \cup B$: A vereinigt mit B $\qquad A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ $\qquad \vee$: „oder“

Beispiel: $A = \{x \in P \mid x \leq 7\}$, $B = \{x \in N \mid x \text{ teilt } 12\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,12\}$

Eigenschaften der Vereinigungsmenge

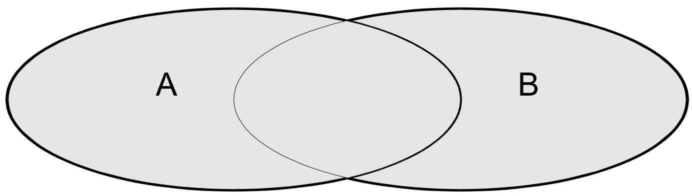
- Die Vereinigung ist Obermenge jeder der gegebenen Menge:

$$A \cup B \supseteq A$$

$$A \cup B \supseteq B$$

- Ist $A \subseteq B$, dann gilt: $A \cup B = B$ und umgekehrt.
- Für alle A gilt: $A \cup A = A$
- **Kommutativgesetz** $A \cup B = B \cup A$
- **Assoziativgesetz** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Diagrammdarstellung der Vereinigungsmenge

$A \cup B$



(c) Differenzmenge

Die Differenzmenge A \ B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

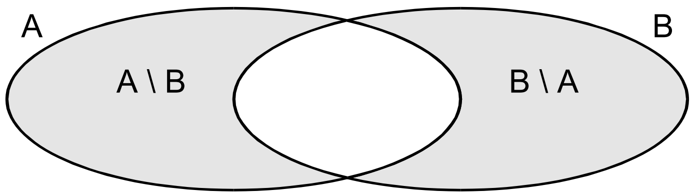
A \ B : A ohne B $\qquad A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

Beispiel: $\qquad A = \{x \in P \mid x \leq 7\},\ B = \{x \in N \mid x \text{ teilt } 12\}$

$A \setminus B = \{5,7\},\ B \setminus A = \{1,4,6,12\}$

Eigenschaften der Differenzmenge

- $A \setminus B \subseteq A \qquad B \setminus A \subseteq B \qquad (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{\ \}$
- $A \setminus B = \{\ \}$, wenn $A \subset B$
- $B \setminus A \neq \{\ \}$, wenn $A \subset B$
- $A \setminus A = \{\ \} \qquad A \setminus \{\ \} = A \qquad \{\ \} \setminus A = \{\ \}$
- Kommutatívgesetz gilt nicht $\qquad A \setminus B \neq B \setminus A$
- Assoziativgesetz gilt nicht $\qquad (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$
- Diagrammdarstellung der Differenzmenge



(d) Komplementärmenge

Die Komplementärmenge (das Komplement, die Ergänzung) A′ der Menge A bezüglich der Grundmenge M ist die Menge aller Elemente, die nicht zu A gehören.

A′ Komplementärmenge $\qquad A \subseteq M,\ A' = \left\{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin A)\right\}$

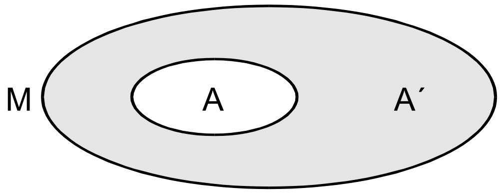
A ist Teilmenge von M, A′ ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Element von M und x ist nicht Element von A.

Beispiel: $M = N \quad A = N_g$

$A' = N_u$

Eigenschaften der Komplementärmenge

- $A' = M \setminus A$ $\qquad M = A \cup A'$ $\qquad A \cap A' = \{\ \}$
- $M' = \{\ \}$ $\qquad \{\ \}' = M$ $\qquad (A')' = A$
- Gesetze von De Morgan $\qquad (A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$
- Diagrammdarstellung der Komplementärmenge



(e) Gesetze der Mengenalgebra (Zusammenfassung)

	$\cap$	$\cup$
Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Verschmelzungsgesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenzgesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Gesetze für die Verknüpfung von M und { }	$A \cap M = A$ $A \cap \{\ \} = \{\ \}$	$A \cup M = M$ $A \cup \{\ \} = A$
Gesetze für komplementäre Mengen	$A \cap A' = \{\ \}$	$A \cup A' = M$
	$(A')' = A,\ M' = \{\ \},\ \{\ \}' = M$	
Gesetze von De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

1.5. Rechengesetze

(a) Gesetzmäßigkeiten

Abgeschlossenheit

Wenn man zwei natürliche Zahlen addiert, so ist die Summe wieder ein Element der natürlichen Zahlen, man sagt, die Addition ist in N abgeschlossen. Auch für die Multiplikation hat diese Aussage Gültigkeit.

$\forall a,b \in N,Z,Q,R$:	$a+b \in N,Z,Q,R$	$a \cdot b \in N,Z,Q,R$

Assoziativgesetz

In einer Summe von mehr als zwei Summanden (in einem Produkt von mehr als zwei Faktoren) kann man beliebig zu Teilsummen (zu Teilprodukten) verbinden. Die Summe (das Produkt) ändert sich dadurch nicht.

$\forall a,b,c \in N,Z,Q,R$:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Kommutativgesetz

Beim Addieren darf man Summanden vertauschen. Beim Multiplizieren darf man Faktoren vertauschen. Der Wert der Summe (des Produkts) ändert sich dabei nicht.

$\forall a,b \in N,Z,Q,R$:	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$

Distributivgesetz

Wird eine Summe mit einem Faktor multipliziert, darf man die einzelnen Summanden mit diesem Faktor multiplizieren.

$\forall a,b,c \in N,Z,Q,R$:	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Neutrales Element

Sowohl bei der Addition, als auch bei der Multiplikation gibt es ein Element, das am Wert der Summe bzw. des Produkts nichts ändert:

Addition: 0	$a+0=0+a=a$	$\forall a \in N, Z, Q, R$
Multiplikation: 1	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$\forall a \in N, Z, Q, R$

Inverses Element

Sowohl bei der Addition, als auch bei der Multiplikation gibt es ein Element, sodaß folgende Beziehung gilt:

Addition: $-a$	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$\forall a \in Z, Q, R$
Multiplikation: $\frac{1}{a}$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$	$\forall a \neq 0 \in Q, R$

Die Verknüpfung eines Elementes mit seinem inversem Element ergibt also das neutrale Element.

Betrag einer Zahl

Die beiden Zahlen 3 und (–3) unterscheiden sich jeweils nur im Vorzeichen, zwei derartige ganze Zahlen nennt man Gegenzahlen: a ... Zahl, (–a) ... Gegenzahl

> Man nennt den **Abstand** einer Zahl vom Nullpunkt **den (absoluten) Betrag der Zahl.** Der Betrag einer ganzen Zahl ist stets eine natürliche Zahl. Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben stets denselben Betrag.

Symbolisch: Betrag von a $|a|$

Beispiel: $|3| = 3$ $|-3| = 3$

Folgerung: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ oder $a = -b$

(b) Grundrechnungsarten – Rechenregeln

Vorzeichenregeln der Addition und der Subtraktion

Addition: Summand plus Summand = (Wert der) Summe

$\forall a, b \in Z_0^+, Q_0^+, R_0^+$ gilt:

$$(+a)+(+b)=(a+b)$$
$$(-a)+(+b)=(b-a)$$
$$(+a)+(-b)=(a-b)$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

Subtraktion: Minuend minus Subtrahend = (Wert der) Differenz

$\forall a, b \in Z_0^+, Q_0^+, R_0^+$ gilt:

$$(+a)-(+b)=(a-b)$$
$$(-a)-(+b)=-(a+b)$$
$$(+a)-(-b)=(a+b)$$
$$(-a)-(-b)=(b-a)$$

Vorzeichenregeln der Multiplikation und der Division

Multiplikation: Faktor mal Faktor = (Wert des) Produkt(s)

$\forall a, b \in Z_0^+, Q_0^+, R_0^+$ gilt:

$$(+a)\cdot(+b)=+(a\cdot b)$$
$$(-a)\cdot(+b)=-(a\cdot b)$$
$$(+a)\cdot(-b)=-(a\cdot b)$$
$$(-a)\cdot(-b)=+(a\cdot b)$$

Division: Dividend durch Divisor = (Wert des) Quotient(en)

$\forall a, b \in Z_0^+, Q_0^+, R_0^+, b \neq 0$ gilt:

$$(+a)\div(+b)=+(a\div b)$$
$$(-a)\div(+b)=-(a\div b)$$
$$(+a)\div(-b)=-(a\div b)$$
$$(-a)\div(-b)=+(a\div b)$$

(c) Verbindung der vier Grundrechnungsarten

Um einheitliche Ergebnisse erzielen zu können, gibt es in der Mathematik einige Vorrangregeln; das sind Regeln, die die Reihenfolge bei der Durchführung bei Berechnungen festlegen.

1. Regel: Punktrechnung vor Strichrechnung
Treten in einer Rechnung Additionen und Subtraktionen (sogenannte Rechenoperationen erster Stufe) und Multiplikationen und Divisionen (Rechenoperationen zweiter Stufe) auf, so sind Rechenoperationen zweiter Stufe vor den Rechenoperationen erster Stufe auszuführen.

Beispiel: $3 \cdot 5 + 2 - 4 - 2 \cdot 7 = 15 + 2 - 4 - 14 = -1$

2. Regel: Klammern müssen zuerst ausgerechnet werden
Tritt in einer Rechnung eine Klammer auf, so sind zuerst die Rechnungsoperationen in der Klammer nach der 1. Regel auszuführen.
Treten in der Rechnung mehrere Klammern, ineinander verschachtelt auf, so werden die Klammern schrittweise von innen nach außen aufgelöst.

Beispiele: $3 + 7 \cdot (2 \cdot 3 - 5 + 2) - 8 = 3 + 7 \cdot (6 - 5 + 2) - 8 = 3 + 7 \cdot 3 - 8 = 3 + 21 - 8 = 16$

$$2 - \{3 + 2 \cdot [7 - 5 \cdot (3 - 4)] + 1\} = 2 - \{3 + 2 \cdot [7 - 5 \cdot (-1)] + 1\} =$$
$$= 2 - \{3 + 2 \cdot [7 + 5] + 1\} = 2 - \{3 + 2 \cdot 12 + 1\} = 2 - \{28\} = -26$$

Klammernregel:
Steht vor einer Klammer ein „+“ Zeichen, so kann man die Klammer ohne Veränderung von Vorzeichen, die innerhalb der Klammer stehen, weglassen.
Steht vor der Klammer ein „–“ Zeichen, so müssen beim Weglassen der Klammern alle Vorzeichen, die innerhalb der Klammer stehen, umgekehrt werden.

Beispiel: $a + (b - c) = a + b - c$, $a - (b - c) = a - b + c$

(d) Rechnen mit Potenzen (mit ganzzahligen Exponenten)

Ähnlich, wie man Multiplizieren als wiederholtes Addieren interpretieren kann ($4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$), kann wiederholtes Multiplizieren durch Potenzen dargestellt werden.

Beispiel: *Der Flächeninhalt des Quadrats berechnet sich aus Seitenlänge a mal Seitenlänge a. „$a \cdot a$" kann man aber auch so schreiben:* $\boldsymbol{a^2}$

$$\mathbf{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n}$$

a ... Basis n ... Exponent (Hochzahl)

Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird.

Es gilt: $a^0 = 1 \qquad \forall a \in R \setminus \{0\}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \forall a \in R \setminus \{0\}, n \in N$$ (Potenzen mit negativen Exponenten)

Beispiele: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27,\ 4^2 = 4 \cdot 4 = 16,\ 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Vorzeichen des Potenzwertes

Wird die **Basis** aus den **positiven reellen Zahlen** R^+ und die **Hochzahl aus Z** gewählt, so ist a^n **Element aus den positiven reellen Zahlen.**

Wählt man die **Basis aus den negativen reellen Zahlen:**

Hochzahl n geradzahlig aus Z: $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a^n}$ **aus** $\mathbf{R^+}$ $\qquad (-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$

Hochzahl n ungeradzahlig aus Z: $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a^n}$ **aus** $\mathbf{R^-}$ $\qquad (-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

Die **Potenzen** sind den Multiplikationen und Divisionen noch um eine Stufe übergeordnet, das heißt, sie müssen noch **vor den Punktrechnungen** ausgerechnet werden. Für Potenzen ergeben sich weitere neue Rechenregeln.

Addition

Man darf Potenzen nur dann addieren, wenn sie in **Basen und Exponenten** übereinstimmen.

Beispiele:

$$a^3 + a^3 = 2a^3$$

$$5a^5 + 7a^5 = 12a^5$$

Subtraktion

Auch hier gilt wieder, daß eine Übereinstimmung in Basen und Hochzahlen gegeben sein muß.

Beispiel:

$$6a^3 - 7a^3 = -a^3$$

Beispiel:

$$2a^7 - 3 \cdot \left(a^7 + 6a^5\right) + a^5 = ?$$

Wie geht man vor? So kann man den Ausdruck nicht weiter vereinfachen, deshalb:

Zuerst Klammer ausmultiplizieren: $2a^7 - 3a^7 - 18a^5 + a^5$

dann Zusammenfassen gleicher Potenzen: $-a^7 - 17a^5$

Beispiel:

$$a^3 + 2c^3 = ?$$

Kann nicht berechnet werden, da unterschiedliche Basen gegeben sind.

Multiplikation

Man multipliziert **Potenzen gleicher Basis** miteinander, indem man ihre Hochzahlen addiert.
Man multipliziert **Potenzen gleicher Hochzahl**, indem man bei gleicher Hochzahl die Basen multipliziert.

$$\forall a \in R,\ \forall r,s \in R:\ a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\forall a,b \in R,\ \forall r \in R:\ a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$

Division

Man dividiert **Potenzen** mit **gleicher Basis**, indem man ihre Hochzahlen subtrahiert.

$$\forall a \in R \setminus \{0\},\ \forall r,s \in R:\ a^r \div a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Man dividiert Potenzen gleicher Hochzahl, indem man die Basen bei gleicher Hochzahl dividiert.

$$\forall a,b \in R, b \neq 0,\ \forall r \in R:\ a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzieren

Man potenziert eine Potenz, indem man die Basis gleich läßt und die Hochzahlen multipliziert.

$$\forall a \in R,\ \forall r,s \in R: \left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$$

Beispiele:

$$(-a)^3 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^4 = (-a)^{3+2+4} = (-a)^9$$

$$(2x+3)^3 \cdot (2x+3) = (2x+3)^{3+1} = (2x+3)^4$$

$$\frac{a^3 \cdot a^7 \cdot a^2}{a^4 \cdot a^5} = \frac{a^{3+7+2}}{a^{4+5}} = \frac{a^{12}}{a^9} = a^{12-9} = a^3$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \div 5^3 = \left(\frac{1}{4} \div 5\right)^3 = \left(\frac{1}{20}\right)^3 = \frac{1^3}{20^3} = \frac{1}{8000}$$

(e) Potenzen mit rationalen Exponenten

Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen, das sogenannte Radizieren.

Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist jene eindeutig bestimmte nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist.

$$\forall a,b \in R_0^+, \forall n \in N \setminus \{0\} : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Man nennt: n ... Wurzelexponent a ... Radikant

Potenzschreibweise von Wurzeln

Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Potenzieren und Wurzelziehen schreibt man auch Wurzeln als Potenzen an, was den Vorteil hat, daß man die Rechenregeln für Potenzen anwenden kann.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \forall a \in R_0^+, n \in N \setminus \{0\}$$

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \forall a \in R_0^+, q \in N \setminus \{0\}, p \in Z$$

Rechnen mit Wurzeln

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	Bei gleichen Wurzelexponenten werden die Radikanten multipliziert
$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	Bei gleichen Wurzelexponenten werden die Radikanten dividiert
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Aus den einzelnen Faktoren wird die Wurzel gezogen
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Aus Zähler und Nenner wird die Wurzel gezogen
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^r = \sqrt[n]{a^r}$	Wurzelexponent wird unverändert gelassen, Radikant wird potenziert

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^m}$	Wurzelexponent wird multipliziert, Radikant wird potenziert
$\sqrt[n\cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$	Wurzelexponent und Potenzexponent wird durch dieselbe Zahl dividiert

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$	Faktor unter die Wurzel bringen
$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$	Teilweises (partielles) Wurzelziehen
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$	Radizieren von Wurzeln

Beispiele:

- Addieren/Subtrahieren:

$$\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{18} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot \sqrt{2}$$

- Multiplizieren:

$$\left(\sqrt{50} + \sqrt{18}\right) \cdot \sqrt{6} = \left(5 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2}\right)\sqrt{6} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$$
$$8 \cdot \sqrt{2 \cdot 6} = 8 \cdot \sqrt{12} = 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 4} = 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 16 \cdot \sqrt{3}$$

- Dividieren:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[3]{4} \div \sqrt[2]{2} = \sqrt[3\cdot 2]{4^2} \div \sqrt[3\cdot 2]{2^3} = \sqrt[6]{2^4} \div \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^{4-3}} = \sqrt[6]{2}$$

1.6. Rechnen mit Brüchen

(a) Definition und Arten von Brüchen

Der Begriff des Bruches ist allen aus dem Alltag ein Begriff, etwa kauft man ¼ Butter, oder ein ½ kg Brot. Ein Bruchteil ist immer Teil eines Ganzen.

$$r = \frac{a}{b}$$

a heißt **Zähler** des Bruches, er gibt an, wie viele Teile vom Ganzen genommen werden.

b heißt **Nenner** des Bruches, er gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt wird.

Der Wert r eines Bruches ist jene endliche oder periodische Dezimalzahl, die sich beim Ausrechnen der Division $a \div b$ ergibt.

Man unterscheidet einige Arten von Brüchen:

Echter Bruch

Der Betrag des Zählers ist kleiner als der Betrag des Nenners, der Wert des Bruches ist dem Betrag nach kleiner 1.

Beispiele: $\frac{2}{3}; \frac{1}{5}; \left(-\frac{3}{4}\right); \frac{1}{2}; \ldots$

Unechter Bruch

Der Betrag des Zählers ist größer als der Betrag des Nenners, der Wert des Bruches ist betragsmäßig immer größer 1.

Beispiele: $\frac{4}{3}; \frac{8}{5}; \frac{9}{2}; \left(-\frac{14}{8}\right); \ldots$

Uneigentlicher Bruch

Der Wert des Bruches ist eine ganze Zahl.

Beispiele: $\frac{4}{2};\left(-\frac{6}{3}\right);\ldots$

Gemischte Zahl

Sie besteht aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch.

Beispiele: $2\frac{2}{3}$ *(das bedeutet* $2+\frac{2}{3}$ *und nicht* $2\cdot\frac{2}{3}$*)*

Stammbruch

Im Zähler steht immer die Zahl 1. Daher kann man den Stammbruch als Kehrwert der Zahl im Nenner verstehen.

Beispiele: $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6};\ldots$

(b) Teilbarkeit, Faktorenzerlegung

Teiler: Eine Zahl a heißt (echter) Teiler der Zahl b, wenn b durch a teilbar ist (man b durch a ohne Rest dividieren kann). Man schreibt: a | b (a teilt b).

Die Zahl 1 nennt man den trivialen Teiler, da 1 Teiler jeder Zahl ist.

Teilbarkeitsregeln

Summenregel: Ein gemeinsamer Teiler zweier Zahlen teilt auch die Summe der Zahlen.

Produktregel: Wenn die Zahl a eine Zahl b teilt, so teilt sie auch jedes Vielfache von b.

Beispiele: $6 \mid 24$ *und* $6 \mid 18$ *so gilt:* $6 \mid (24+18)$

$3 \mid 9 \Rightarrow 3 \mid (5 \cdot 9) \Rightarrow 3 \mid 45$

Spezielle Teilbarkeitsregeln:

2:	Eine ganze Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
3:	Eine ganze Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Ziffernsumme (Quersumme) durch 3 teilbar ist.
4:	Eine ganze Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus Einer- und Zehnerziffer gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
5:	Eine ganze Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die Einerziffer 0 oder 5 ist.
6:	Eine ganze Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8:	Eine ganze Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
9:	Eine ganze Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.
11:	Eine ganze Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselquersumme durch 11 teilbar ist.
25:	Eine ganze Zahl ist durch 25 teilbar, wenn die letzten beiden Stellen 00, 25, 50 oder 75 sind.

Primzahlen: Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Sie besitzt also keine echten Teiler.

Primzahlen bis 100:	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Beispiele:

$3 \mid 927$ wegen $9+2+7 = 18$, $3 \mid 18$

$4 \mid 328$ wegen $4 \mid 28$

$6 \mid 294$ wegen $2 \mid 4$ und $3 \mid (2+9+4)$;

$11 \mid 2816$ wegen $6-1+8-2 = 11$, $11 \mid 11$

Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl n ≥ 2 läßt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beispiele: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

Um eine Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, wird diese Zahl schrittweise durch die Primzahlen mit der kleinsten beginnend (mit 2) dividiert.

Gemeinsamer Teiler

Eine Zahl c ≠ 0 heißt **gemeinsamer Teiler** zweier oder mehrerer Zahlen, wenn c ein Teiler jeder dieser Zahlen ist.
Der größte dieser Teiler heißt **größter gemeinsamer Teiler (ggT).**
Der ggT ist das Produkt aller **gemeinsamen** Primfaktoren.

Beispiel:

ggT von 12 und 18 = ggT(12,18)

$12 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$, $18 = \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{3}$

$ggT(12{,}18) = 2 \cdot 3 = 6$

Gemeinsames Vielfaches

Eine Zahl $c \neq 0$ heißt **gemeinsames Vielfaches** zweier oder mehrerer Zahlen, wenn c ein Vielfaches jeder dieser Zahlen ist.
Das kleinste dieser Vielfachen wird **kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)** genannt. Das kgV ist das Produkt aller **verschiedenen** Primfaktoren.

Das kgV muß selbstverständlich größer oder gleich sein als die beiden Zahlen und höchstens so groß wie das Produkt dieser beiden Zahlen. Das kgV ist das Produkt aller verschiedenen auftretenden Primfaktoren jeweils in ihrer höchsten Potenz:

Beispiel: *kgV (12,18)*

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{2^2} \cdot 3,\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot \underline{3^2}$$

$$kgV(12{,}18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

(c) Rechnen mit Brüchen

Erweitern und Kürzen

Erweitern: Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl ($k \neq 0$), so ändert sich der Wert des Bruches nicht. Man sagt, man erweitert den Bruch mit k.

Kürzen: Dividiert man Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl ($k \neq 0$), so ändert sich der Wert des Bruches nicht. Man sagt, man kürzt den Bruch durch k.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind äquivalent; das heißt, sie stellen dieselbe rationale Zahl dar.

Addition und Subtraktion von Brüchen

gleichnamige Brüche:

Das sind Brüche mit gleichem Nenner. Die Zähler werden addiert (subtrahiert), der Nenner bleibt unverändert. Ein Bruchstrich wirkt dabei wie eine Klammer!

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

ungleichnamige Brüche:

Diese müssen, bevor man sie addiert oder subtrahiert, erst einmal auf gleichen Nenner gebracht werden. Der kleinste gemeinsame Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) aller Nenner.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{3}{7} - \frac{2}{9} = \frac{1 \cdot 63}{252} - \frac{1 \cdot 42}{252} + \frac{3 \cdot 36}{252} - \frac{2 \cdot 28}{252} = \frac{63 - 42 + 108 - 56}{252} = \frac{73}{252}$$

Multiplikation von Brüchen

Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl:

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch:

Man multipliziert zwei Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division von Brüchen

Division eines Bruches durch eine ganze Zahl:

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem der Zähler unverändert bleibt und der Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$$

Division eines Bruches durch einen Bruch:

Man dividiert zwei Brüche, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{a}{b}\text{, Kehrwert } \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel: $\frac{3}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{2} = 4$

1.7. Terme

(a) Definition

Aus **Zahlen, Rechenzeichen** $(+,-,\cdot;\div)$ und **Variablen** (Platzhalter, Leerstellen, für die aus einer gegebenen Grundmenge beliebige Elemente eingesetzt werden darf) können **sinnvolle Rechenausdrücke**, sogenannte **Terme,** gebildet werden.

Man unterscheidet:

Ganz rationale Terme

In den vorkommenden Nennern tritt keine Unbekannte auf.

Beispiele: $a,\ \sqrt{3},\ x+3,\ 7\cdot\left(x^2-4\right)$

Gebrochen rationale Termen - Bruchterme

Im Nenner tritt mindestens eine Unbekannte auf.

Beispiele: $\frac{2}{x},\ \frac{5r+s}{4t},\ \frac{y+1}{3y}$

Ferner unterscheidet man einige häufig vorkommende Termarten:

Monome (eingliedrige Ausdrücke): $a,\ 3\cdot a,\ 4\cdot 2,\ \frac{y}{3}$

Binome (zweigliedrige Ausdrücke) : $a+1,\ a-b,\ \frac{u}{2}-3v$

Polynome (mehrgliedrige Ausdrücke): $5a^2-4ab+2b^2-7$

Sonderfall Polynom in einer Variablen: $4x^4+5x^3-x^2-7$

Man nennt die Zahlen, die vor der Unbekannten stehen, **Koeffizienten.**

Man ordnet ein Polynom immer nach vorkommenden Potenzen (von links nach rechts fallend); die höchste im Polynom vorkommende Potenz bestimmt den **Grad des Polynoms**. Obiges Polynom kann daher als Polynom 4. Grades bezeichnet werden.

Um zu überprüfen für welchen Zahlenbereich ein Term sinnvoll formuliert ist, muß man überprüfen, welche Zahlen der Grundmenge man im Term für die Variable einsetzten kann (darf), sodaß die Lösung eine eindeutig bestimmte Zahl ergibt. Man sagt, man bestimmt die Definitionsmenge des Terms:

> Ein Term T(x) mit einer Variablen x besitzt eine **Definitionsmenge** D bezüglich der Grundmenge G. Das ist die Menge jener Elemente aus G, mit denen man die Variable x belegen kann, sodaß der Term eine eindeutig bestimmte Zahl ergibt.

Ein **ganz rationaler Term** ist **für alle Zahlen der Grundmenge** definiert.
Ein **Bruchterm** ist **nur** für jene Zahlen definiert, für die der **Nenner des Terms nicht Null** ergibt. (Grund: Eine **Division durch Null** ist in der Mathematik **nicht definiert**!)

Ermittlung der Definitionsmenge:

Beispiel: $T(x) = \frac{5}{x-3}, \; G = Z$

Man bestimmt jene Werte, für die der Nenner Null wird, und schließt diese dann aus der Grundmenge aus.

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

3** gehört **nicht** zur **Definitionsmenge $\Leftrightarrow D = Z \setminus \{3\}$

(b) Rechnen mit Termen

Prinzipiell kann man Variable und Terme behandeln wie Zahlen; das Ziel im Umgang mit Termen besteht darin, durch geschickte Umformungen möglichst einfache Termdarstellungen zu bekommen.

Addition und Subtraktion

Bei der Addition sind Kommutativ- und Assoziativgesetz gültig.

Beispiel:

Ordnen nach positiven und negativen Summanden	$7x - 2x + 4x - 5x =$
Zusammenfassen	$= 7x + 4x - 2x - 5x =$
Zusammenfassen	$= 11x - 7x =$
	$= 4x$

Beispiel:

Ordnen nach gleichnamigen Summanden	$4a + 3b - 3a - 4b =$
Zusammenfassen	$= 4a - 3a + 3b - 4b =$
	$= a - b$

Multiplikation

Eingliedrige Terme:

mit gleichen Variablen: $2x \cdot 3x = 6x^2$

mit ungleichen Variablen: $3x \cdot 4y = 12xy$

Eingliedriger Term multipliziert mit mehrgliedrigem Term:

Der Term vor der Klammer wird mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert.

Beispiel: $2x \cdot (3y + 2) = 6xy + 4x$

Mehrgliedriger Term multipliziert mit mehrgliedrigem Term:

Jeder Summand des ersten Terms wird mit jedem Summand des zweiten Terms multipliziert.

Beispiel: $(2x + 3) \cdot (a + b) = 2ax + 2bx + 3a + 3b$

Besondere Produkte – Binomsche Formeln

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Vereinfachen eines Terms durch Herausheben eines gemeinsamen Faktors

5a + 5b	→ Herausheben →	
	← Ausmultiplizieren ←	5·(a + b)

Man trachtet danach, möglichst viele gemeinsame Faktoren zu erkennen, um sie herausheben zu können. Oft ist es deshalb vorher notwendig, den Term zu zerlegen, etwa mit Hilfe der Binomschen Formeln.

Ist in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorhanden, so kann man diesen herausheben.

Beispiel: $ax-bx-ay+by=x\cdot(a-b)+y\cdot(b-a)=x\cdot(a-b)-y\cdot(a-b)=(a-b)\cdot(x-y)$

Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

Es sind alle Regeln des Bruchrechnens gültig!

Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme:

Man addiert bzw. subtrahiert gleichnamige Bruchterme, indem man Zähler mit Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner unverändert läßt.

Beispiel: $$\frac{3x-2y}{4}+\frac{2x+3y}{4}=\frac{3x-2y+2x+3y}{4}=\frac{5x+y}{4}$$

Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme:

Ungleichnamige Bruchterme werden zuerst gleichnamig gemacht; das heißt, auf gemeinsamen Nenner gebracht. Man bestimmt einen sogenannten **Hauptnenner**. Der Hauptnenner ist der einfachste Term, der alle vorkommenden Nenner als Faktoren enthält. Man stellt deshalb alle Nenner als Produkte nicht weiter zerlegbarer Faktoren dar.
Der Hauptnenner ist das Produkt aller Faktoren, bei gemeinsamen Faktoren jeweils mit der höchsten Potenz (kgV der vorkommenden Terme).

Beispiel: *Vereinfachen Sie folgenden Term:* $\frac{2}{x}+\frac{x+4}{x^2+3x}-\frac{2x+4}{x^2-9}=?$

Zerlegung der einzelnen Nenner:	*Erweiterungsfaktor*
1. Nenner: x	$(x+3)\cdot(x-3)$
2. Nenner: $x^2+3x=x\cdot(x+3)$	$(x-3)$
3. Nenner: $x^2-9=(x+3)\cdot(x-3)$	x
Bestimmung des Hauptnenners (HN):	$x\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

$$=\frac{2(x+3)\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}+\frac{(x+4)\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}-\frac{(2x+4)\cdot x}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}=$$
$$=\frac{(2x^2-18)+(x^2+x-12)-(2x^2+4x)}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}=$$
$$=\frac{x^2-3x-30}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}$$

Multiplikation und Division von Bruchtermen

Es sind alle Regeln des Bruchrechnens gültig!

$\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_1 \cdot T_3}{T_2 \cdot T_4}$	$\frac{T_1}{T_2} \div \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_4}{T_3}$

Beispiel:

$$\frac{xy^2}{xy - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{xy^2 \cdot (x+y) \cdot (x-y)}{y \cdot (x-y) \cdot x^2} = \frac{y \cdot (x+y)}{x}$$

Beispiel:

$$\frac{a^2 - b^2}{3r - 9} \div \frac{5a - 5b}{r - 3} = \frac{a^2 - b^2}{3r - 9} \cdot \frac{r - 3}{5a - 5b} =$$
$$= \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{3 \cdot (r-3)} \cdot \frac{r-3}{5 \cdot (a-b)} = \frac{a+b}{3 \cdot 5} = \frac{a+b}{15}$$

(c) Polynomdivision

Polynome werden zunächst nach fallenden Potenzen der Variablen geordnet und dann schrittweise dividiert.

Beispiel: $\left(20x + 12x^3 - 31x^2\right) \div \left(-4 + 3x\right) =$

Ordnen: $\left(12x^3 - 31x^2 + 20x\right) \div \left(3x - 4\right) =$

Die weitere Division erfolgt ähnlich der Division von Zahlen:

Wie oft ist 3x in $12x^3$ enthalten? $4x^2$ *mal*

$$\begin{array}{l}
\left(12x^3 - 31x^2 + 20x\right) \div \left(3x - 4\right) = 4x^2 - 5x \\
\underline{-(12x^3 - 16x^2)} \\
\qquad \underline{-15x^2 + 20x} \\
\qquad \underline{-(15x^2 + 20x)} \\
\qquad\qquad\qquad 0\,R.
\end{array}$$

Anhang: Übungsbeispiele zum 1. Kapitel

1/1 Gegeben sind die Zahlen: $0; 17; -\frac{3}{4}; 1{,}3; -8; \sqrt{16}; \frac{7}{9}$.

Stellen Sie bei jeder Zahl fest, ob sie Element der Mengen N, P, N_g, N_u, Z^+, Z^-, Q ist oder nicht. Tragen Sie das Ergebnis mit Hilfe von $\in$ bzw. $\notin$ in eine Tabelle ein.

1/2 Die folgenden Mengen sind im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren festzulegen:

a) die Menge der durch zwei teilbaren Zahlen, die kleiner als –3 sind,

b) die Menge der natürlichen Zahlen, die Vielfache von 3 und kleiner als 29 sind,

c) die Menge der Quadratzahlen zwischen 1 und 101,

d) die Menge der Primzahlen zwischen 1 und 50.

1/3 Die folgenden Mengen sind im beschreibenden Verfahren festzulegen:

a) $A = \{4,6,8,10,12,14,16\}$

b) $B = \{-8,-6,-4,-2\}$

c) $C = \{5,7,9,11,13,15\}$

d) $D = \{-3,-4,-5,-6,...\}$

1/4 Die folgenden Mengen sind im aufzählenden Verfahren festzulegen:

a) $A = \{x \in Z^- \mid x > -10\}$

b) $B = \{x \in Z \mid -3 < x < 5\}$

c) $C = \{x \in N \mid (x \text{ ist Vielfaches von } 4) \wedge (10 < x < 50)\}$

d) $D = \{x \in N_g \mid (x \text{ ist Kubikzahl}) \wedge (1 < x < 100)\}$

1/5 Stellen Sie fest, ob die folgenden Mengen gleichmächtig sind oder nicht:

a) $A = \{x \in N \mid x < 5\}$, $B = \{y \in N \mid y^2 < 16\}$

b) $C = \{s \in Z \mid s \leq 4\}$, $D = \{t \in N \mid t^3 \leq 125\}$

c) $E = \{r \in Z \mid -5 \leq r < 3\}$, $F = \{z \in Z \mid -2 < z \leq 6\}$

d) $G = \{v \in N \mid 6 < v < 12\}$, $H = \{w \in Z \mid 0 \geq w > -5\}$

1/6 Welche der folgenden Aussagen ist wahr:

a) $\{\ \} = \{0\}$

b) $\{\{\ \}\} \neq \{\ \}$

c) $\{\ \} \sim \{0\}$

d) $\{\{\ \}\} \sim \{0\}$

1/7 Gegeben ist die Menge $M = \{x \in N \mid 20 < x < 30\}$. Bestimmen Sie die folgenden Teilmengen von M:

a) T_1, die Teilmenge aller ungeraden Zahlen von M,

b) T_2, die Teilmenge aller durch 7 teilbaren Zahlen von M,

c) T_3, die Teilmenge aller Primzahlen von M,

d) T_4, die Teilmenge aller Kubikzahlen von M

Geben Sie die Teilmengen jeweils im aufzählenden Verfahren und in einem Mengendiagramm an.

1/8 Geben Sie den Durchschnitt der folgenden Mengen im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren an:

a) $A = \{x \in N \mid 2 \leq x < 12\}$, $B = \{x \in Z \mid -5 \leq x < 6\}$

b) $C = \{x \in Z \mid -6 < x < 10\}$, $D = \{x \in Z \mid -4 \leq x < 15\}$

c) $Z \cap N$

d) $Q \cup Z$

1/9 Gegeben sind die Mengen $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ und $C = \{1,4,5,6,9,10\}$. Überprüfen Sie folgende Aussagen:

a) $A \cap B = B \cap A$

b) $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

d) $A \cap B = B \cap C$

1/10 Vereinfachen Sie unter Beachtung der Gesetze für die Durchschnittsbildung:

a) $A \cap (B \cap A)$

b) $A \cap [(A \cap B) \cap B]$

c) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$

d) $\{\ \} \cap (A \cap B)$

1/11 Gegeben sind die Mengen $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ und $C = \{1,4,5,6,9,10\}$. Überprüfen Sie folgende Aussagen:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cup B \cup C \subseteq A \cup B$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $A \cup B = B \cup C$

1/12 Vereinfachen Sie unter Beachtung der Gesetze für die Bildung der Vereinigung:

a) $A \cup (B \cup A)$

b) $A \cup [(A \cup B) \cup B]$

c) $(A \cup B) \cup (B \cup C)$

d) $\{\ \} \cup (A \cup B)$

1/13 Überprüfen Sie mittels Zugehörigkeitstafel das Distributivgesetz:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1/14 Ermitteln Sie folgende Differenzmengen:

a) $N_g \setminus P$

b) $V(6) \setminus V(3)$

c) $T(24) \setminus T(8)$

d) $N \setminus Q$

e) $Q \setminus N$

f) $R \setminus Q$

1/15 Gegeben sind die Mengen A = {1,2,3,4,5,6,7}, B = {2,4,6,8,10} und C = {3,6,9}. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap C) \setminus (A \cap C)$

1/16 Gegeben sind die Mengen M = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, A = {1,2,3,4,5,6,7,8} und B = {2,4,5,7,9,10}. Ermitteln Sie folgende Komplementärmengen:

a) $A \cap B'$

b) $A' \cup B'$

c) $A' \cap B'$

1/17 Überprüfen Sie die folgende Aussagen:

a) $A \setminus B = (A' \cup B')'$

b) $A \setminus B = A \cap B'$

1/18 Gegeben sind die Mengen A = {2,3,5,7,11,13,17,19}, B = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} und C = {1,4,7,10,13,16,19}. Geben Sie die Mengen im beschreibenden Verfahren an. Überprüfen Sie weiters alle Gesetze der Mengenalgebra (Seite 12).

1/19 Überprüfen Sie mit den Mengen aus Beispiel 1/18 folgende Aussagen bezüglich der Mächtigkeit von Mengen:

a) $z(A \cup B) = z(A) + z(B) - z(A \cap B)$

b) $z(A \cup B \cup C) = z(A) + z(B) + z(C) - z(A \cap B) - z(A \cap C) - z(B \cap C) + z(A \cap B \cap C)$

1/20 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $[(-28):7-3]\cdot[2+8\cdot(-1)]=$

b) $[35:(-5)+5]\cdot[48:(-12)+2]=$

1/21 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $(-5)\cdot 3-(-1)\cdot 4\cdot(-2)+(-1)\cdot(-10)-(-3)\cdot(-1)=$

b) $[2\cdot(-8)\cdot 3-(-6)\cdot(-7)\cdot(-7)]\cdot 5-(-8)\cdot 6=$

1/22 Setzen Sie mit den Zahlen 7,(–8),11,–23 für x in den folgenden Ausdrücken ein:

a) $x\cdot(-x)+x\cdot|x|=$

b) $|x|\cdot(-x)-|(-x)|\cdot x=$

1/23 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $12\cdot(-2)^3+9\cdot(-1)^3+4\cdot6^2-[5\cdot(-6)]:(-2)^2=$

b) $(-10)\cdot(-3)^4-(-2)^3.15+(-4)^2\cdot(-20)+[7\cdot(-25)]:5^2=$

c) $(-5)\cdot3^2-(-1)^3\cdot4\cdot(-2)^4+(-1)\cdot(-10)-(-3)^2\cdot(-1)^3=$

d) $(-10)\cdot(-3)^4-[(-2)^3.15+(-4)^2\cdot(-20)+7\cdot(-25)]:5^2=$

1/24 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $10^3\cdot10^5=$

b) $(6\cdot10^7):(1{,}2\cdot10^3)=$

c) $10^4-10^3=$

d) $(5\cdot10^4-4\cdot10^3):10^2=$

1/25 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[4]{81}-\sqrt{25}=$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=$

c) $3\cdot\sqrt[3]{2}=$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=$

1/26 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $\left(3^5\cdot4^6\cdot5^{-3}\right):\left(2^3\cdot10^2\cdot6^{-1}\right)=$

b) $(-2^{-2})^3=$

c) $\sqrt[3]{2^{-4}}\cdot\sqrt[6]{4^{-2}\cdot8}=$

d) $\sqrt[3]{27^{-3}\sqrt{9}}=$

1/27 Ermitteln Sie den ggT und das kgV folgender Zahlen:

a) 18, 42, 72

b) 33, 81, 243

c) 28, 57, 99

d) 100, 252, 243, 400

1/28 Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Rechenaufgaben:

a) $2\tfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{2}{3}}{5}=$

b) $\dfrac{9}{2-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}=$

c) $\dfrac{4\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}:2\tfrac{2}{5}=$

d) $\left(12\tfrac{1}{2}-\dfrac{2\frac{5}{8}}{1\frac{3}{6}}\right):3\tfrac{7}{12}=$

1/29 Versuchen Sie die folgenden periodischen bzw. gemischtperiodischen Zahlen als Brüche anzuschreiben:

a) $0,\dot{4}=$

b) $0,\dot{2}\dot{5}=$

c) $0,80\dot{3}=$

d) $0,\dot{6}0\dot{9}=$

1/30 Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $a-c-\{2a+b+[a-c-(3a-b)]\}=$

b) $(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot b+a\cdot(-b)+a\cdot b=$

c) $a-b-(-1)\cdot\{2a+c+(-1)\cdot[b-2c-(a+2b)]\}=$

d) $a-b-\{2+[a-(b-a)]-7\}=$

1/31 Vereinfachen Sie folgende Terme und bestimmen Sie - soweit das derzeit möglich ist - die Definitionsmengen (G = R):

a) $a^{-3} \cdot a^{4} : a^{-5} =$

b) $\left(\frac{a^{-2} \cdot b^{5}}{c^{2}} \right)^{3} =$

c) $\left(\frac{x^{m} \cdot y^{-n+1}}{2z^{3}} \right)^{-2} =$

d) $\left(\frac{4x^{3}y}{ab^{2}} \right)^{3} : \left(\frac{x^{4}}{ab^{3}} \right)^{2} =$

1/32 Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $5ab-[(a+b)^2-a^2-b^2]=$

b) $(x^2+2)\cdot(x^2-2)-(x^2-2)^2=$

c) $(3x^2+2y^6)^2-(3x^2-2y^6)\cdot(3x^2+2y^6)=$

d) $(s^3-t)\cdot(s^6+s^3t+t^2)=$

1/33 Vereinfachen Sie folgende Terme und bestimmen Sie - soweit das derzeit möglich ist - die Definitionsmengen (G = R):

a) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a}{a-b} =$

b) $\left(1 - \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{2y}{x-y} =$

c) $\left(\frac{a^{2}-1}{a^{3}+a^{2}} - \frac{1}{a+1} \right) \cdot \left(a^{2}+a \right) =$

d) $\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} =$

e) $\left(\frac{\frac{x}{2}}{3} - \frac{x}{\frac{3}{2}} \right) : \frac{x}{6} =$

1/34 Vereinfachen Sie folgende Terme und bestimmen Sie - soweit das derzeit möglich ist - die Definitionsmengen (G = R):

a) $\dfrac{\dfrac{a^3}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}} =$

b) $\dfrac{\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{c^3}}{\dfrac{7a-21b}{c^3}} =$

c) $\dfrac{\dfrac{2a+3b}{2b}-\dfrac{5a+6b}{4b}}{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}} : \dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{8a}{2}+\dfrac{4b^2}{a}} =$

d) $\dfrac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{2xy}{y\ -x^2}-\dfrac{x}{y-x}}{\dfrac{1}{(x+y)^2}-\dfrac{1}{(y-x)^2}} : \dfrac{\dfrac{(x+y)\cdot(y^2-x^2)}{2y}}{\dfrac{2x-4y}{2\cdot(x-2y)}} =$

1/35 Führen Sie bei folgenden Termen die Polynomdivision durch und bestimmen Sie - soweit das derzeit möglich ist - die Definitionsmengen (G = R):

a) $(6x^2-10x-4):(2x-4)=$

b) $(125x^3+75x^2+45x+27):(5x+3)=$

c) $(15x^3-31x^2+19x-7):(3x^2-2x+1)=$

d) $(8x^3+10x^2-23x+5):(2x^2+3x-5)=$

e) $(x^3-1):(x-1)=$

1/36 Versuchen Sie nun, nach Durcharbeiten des 1. Kapitels, erneut die Grundbegriffe des 0. Kapitels mathematisch zu definieren:

Ziffer	Zahl	Null
Rechnen	Rechenoperationen	Stellenwert
Zahlensystem	Einheit	Unbekannte
Variable	Formel	Gleichung
Ungleichung		