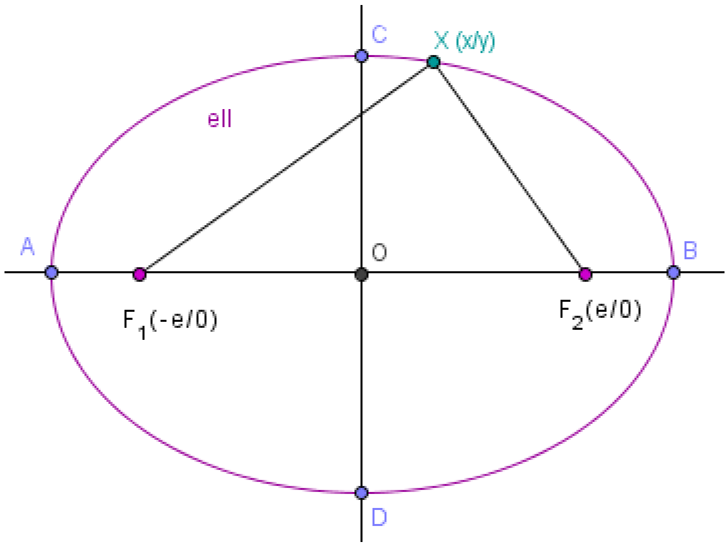
Die Ellipse

DEFINITION der Ellipse
Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 den konstanten Wert 2a hat.

$$ell = \{X | \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a\}$$

Ellipsengleichung



$$\overrightarrow{F_1X} = \binom{x+e}{y} \qquad \left|\overrightarrow{F_1X}\right| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{F_2X} = \binom{x-e}{y} \qquad \left|\overrightarrow{F_2X}\right| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Laut Definition der Ellipse gilt: Die Summe der Längen der Brennstrecken ist 2a.

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{F_1X}\right| + \left|\overrightarrow{F_2X}\right| &= 2a \\
\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \\
(x-e)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + 2ex + e^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2 \\
x^2 - 2ex + e^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + 2ex + e^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2 \\
-4a^2 - 4ex &= -4a\sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} \\
a^2 + ex &= a\sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} \\
a^4 + 2a^2ex + e^2x^2 &= a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) \\
a^4 + 2a^2ex + e^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 \\
a^4 - a^2e^2 &= a^2e^2 - e^2x^2 + a^2y^2 \\
a^2(a^2 - e^2) &= x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $a^2 - e^2 = b^2$ folgt:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

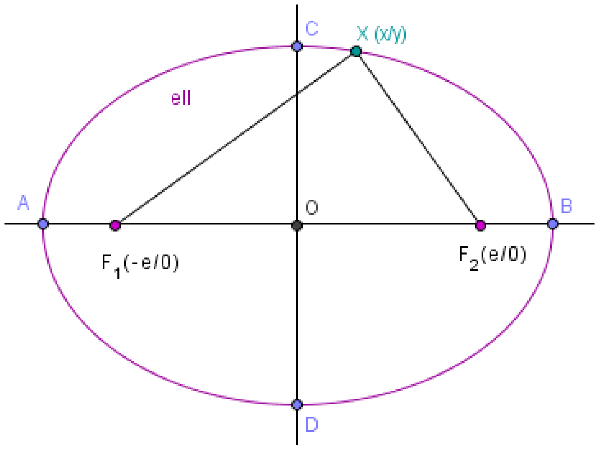
$$\boxed{ell: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$$

oder

$$\boxed{ell: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Man unterscheidet:

1) Ellipse in erster Hauptlage

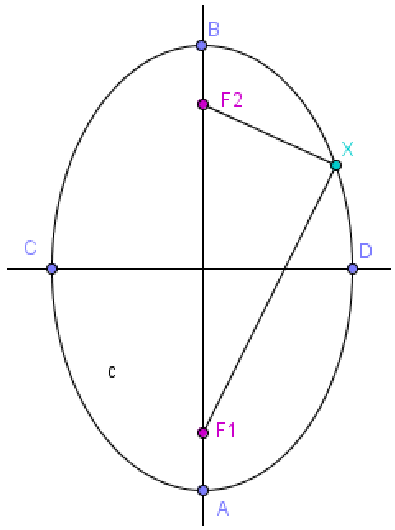


Gleichung der Ellipse in erster Hauptlage:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Ellipse in zweiter Hauptlage



Gleichung der Ellipse in zweiter Hauptlage:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Lagebeziehung Ellipse – Gerade

Auch hier treten wieder Sekanten, Tangenten und Passanten auf! Fertige jeweils eine Skizze an!

Berührbedingung:

Um eine allgemeine Bedingung für die Lagebeziehung der Ellipse

$$ell: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

und der Geraden g: y = kx + d zu finden, geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
& ell: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
& g: y = kx + d \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = (kx+d)^2 \\
ell \cap g: \quad & b^2x^2 + a^2(kx+d)^2 = a^2b^2 \\
& b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2dkx + d^2) = a^2b^2 \\
& b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2dkx + a^2d^2 = a^2b^2 \\
& (b^2 + a^2k^2) \cdot x^2 + 2a^2dk \cdot x + a^2d^2 - a^2b^2 = 0 \\
& x = \frac{-2a^2dk \pm \sqrt{(-2a^2dk)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2)}}{2(b^2 + a^2k^2)}
\end{aligned}$$

Die Lagebeziehung hängt nun von der Diskriminante ab:

$D = (-2a^2dk)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2)$

$$\begin{aligned}
(-2a^2dk)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2) &= 0 \qquad Bedingung\ f\text{ü}r\ Tangente \\
4a^2d^2k^2 - 4(a^2b^2d^2 + a^4d^2k^2 - a^2b^4 - a^4b^2k^2) &= 0 \qquad |:4 \\
a^2d^2k^2 - a^2b^2d^2 - a^4d^2k^2 + a^2b^4 + a^4b^2k^2 &= 0 \qquad |: a^2b\text{^}2 \neq 0 \\
-d^2 + b^2 + a^2k^2 &= 0 \\
a^2k^2 + b^2 &= d^2 \qquad Ber\text{ü}hrbedingnung
\end{aligned}$$

<u>Berührbedingung:</u>

Berührt eine Gerade g: y = kx + d die Ellipse $ell: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, so gilt:

$$a^2k^2 + b^2 = d^2$$

Gleichung der Tangente im Punkt T einer Ellipse

Wie beim Kreis kann auch bei der Ellipse die Tangentengleichung direkt, ausgehend von der Ellipsengleichung, aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
b^2x^2 \quad &+ a^2y^2 \quad &= a^2b^2 \\
b^2 \cdot x \cdot x \quad &+ a^2 \cdot y \cdot y \quad &= a^2b^2 \\
b^2 \cdot x \cdot x_T &+ a^2 \cdot y \cdot y_T &= a^2b^2
\end{aligned}$$

<u>Gleichung der Tangente in einem Punkt T (x_T/y_T) der Ellipse:</u>

Tangente: $b^2x_Tx + a^2y_Ty = a^2b^2$