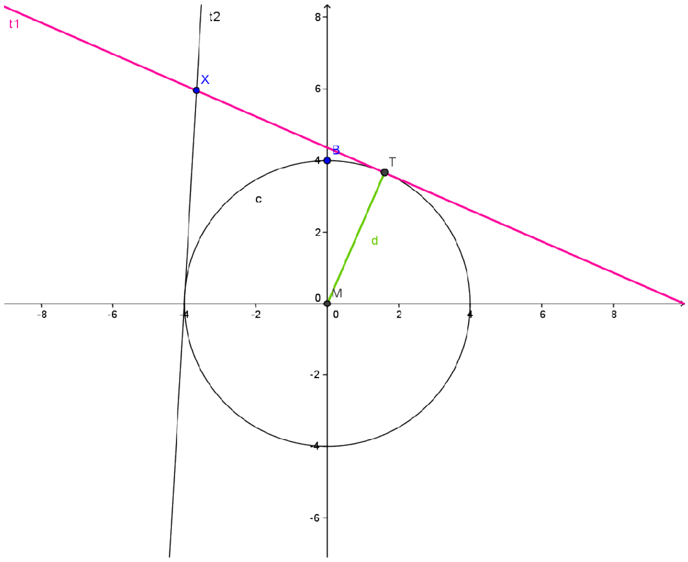
Der Kreis



Spaltform der Tangentengleichung

M…Mittelpunkt des Kreises
T…Berührpunkt
t1…Tangente im Berührpunkt T
X…beliebiger Punkt der Tangente t1
Wir wissen bereits, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann 0 ergibt, wenn die beiden Vektoren zueinander im rechten Winkel stehen.
In diesem Fall: $\overline{\mathrm{MT}} \perp \overline{TX} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{MT}} * \overline{TX} = 0$ Also: $(T - M) * (X - T) = 0$

Mit einem kleinen Trick können wir diese Gleichung noch umformen. $\overrightarrow{\mathrm{MT}} = r$ also ist $(T - M)^2 = r^2$
Wenn wir also diese Gleichung zur obigen addieren, erhalten wir: $(T - M) * (X - T) + (T - M)^2 = r^2$
Nun wird $(T - M)$herausgehoben und übrig bleib die Spaltform der Tangentengleichung:

$$(T - M) * (X - M) = r^2$$

Berührbedingung

Gegeben sind eine Gerade g: y = kx + d und ein Kreis k[M;r]. Wir suchen nun ein Kriterium, welches uns möglichst schnell verrät, ob die Gerade eine Tangente ist, also den Kreis berührt. Dazu ist es erforderlich, dass der Abstand zwischen dem Mittelpunkt M und der Geraden g exakt dem Radius r entspricht.

R = d(M,g) = $|\overline{\mathrm{AM}} * \overrightarrow{n_0}|$ = $\left|\left(\binom{x_M}{y_M} - \binom{0}{d}\right) * \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \binom{k}{-1}\right| = \left|\frac{k*x_M - y_M + d}{\sqrt{k^2+1}}\right| \Rightarrow$

$$r\sqrt{k^2+1} = |k * x_M - y_M + d|$$

Daraus ergibt sich die Berührbedingung: $(k * x_M - y_M + d)^2 = r^2(k^2 + 1)$

Überlege dir zu den folgenden Beispielen, in welchem Fall du die Berührbedingung bzw. die Tangentengleichung brauchst und löse sie!

1. Ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt T des Kreises k
   a. M(2/1), r = 5, T(-1/y>0)
   b. $x^2 + y^2 - x + 5y + 4 = 0$. T(x<0/2)

2. Ermittle die Gleichung der Tangenten, die aus dem Punkt P(6/8) an den Kreis k: $x^2 + y^2 = 10$ gelegt werden können.

3. Ermittle die Tangente t an den Kreis k: $(x + 12)^2 + (y - 8)^2 = 36$, die zur Geraden g: $5x – 12y = 71$ parallel ist.

4. Bestimme den Radius r des Kreises k so, dass die Gerade t Tangente wird und ermittle die Koordinaten des Berührpunktes T!
   a. $t: X = \binom{1}{7} + t * \binom{3}{1}, k: x^2 + y^2 = r^2$
   b. T: $3x + 4y = 7$, M(2/-3)

5. Ermittle die Gleichungen der Kreise, die durch die Punkte A und B gehen und die Gerade g berühren. A(-4/0), B(4/0), g: $3x – 4y = -20$

6. Berechne den Schnittwinkel der Gerade g: $2x – 3y = -23$ mit dem Kreis k: $x^2 + y^2 = 58$

7. Gegeben sind der Kreis k: $x^2 + y^2 = 13$ und ein Punkt P(1/5). Berechne die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2, die man vom Punkt P an den Kreis legen kann, die Koordinaten der Berührpunkt T_1 und T_2, den Winkel ϕ den T_1 und T_2 miteinander einschließen, sowie den Flächeninhalt des Dreiecks PT_1 T_2 und die Seitenlängen dieses Dreiecks.

8. Berechne den Schnittwinkel zwischen den beiden Kreisen $k_1[M(4/-2);\sqrt{10}]$ und $k_2[M(-1/3);\sqrt{20}]$
   Hinweis: Es gibt zwei Möglichkeiten den Schnittwinkel zu berechnen. Rechne auf die eine Art exakt und überlege dir, wie es mit der anderen funktionieren würde!