Bestimme das Bild der Abbildungen!

Angaben:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$

Loesungen:

1. Bestimme die Matrix von f:

   $$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

   Bestimme nun die Bilder der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 $((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$:

   $$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Diese Vektoren spannen nun also das Bild von f auf. Somit sind nur mehr die linear unabhaengigen herauszusuchen, die dann eine Basis des Bildes von f bilden:
   Durch zweimal scharf Hinschauen sieht man, dass $f(e_2) = f(e_1) + f(e_3)$ gilt, d.h. $f(e_2)$ befindet sich in der linearen Huelle von $f(e_1), f(e_3)$.

   Somit bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $bild(f)$.

2. Bestimme die Matrix von f:

   $$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

   Bestimme nun die Bilder der Standardbasisvektoren e_1, e_2 $((1,0)^T, (0,1)^T)$:

   $$f(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},.$$

   Diese Vektoren spannen nun also das Bild von f auf. Offensichtlich sind diese Vektoren linear unabhaengig (da sogar orthogonal). Zwei linear unabhaengige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ spannen den gesamten Raum auf. Also kann eine noch einfachere Basis von $bild(f)$ gewaehlt werden:

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$