Schnittmengen im $\mathbb{R}^3$

Angabe:

Die Menge h sei wie folgt definiert: $h := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y > -3 \}$

Die Menge g sei wie folgt definiert:

g sei eine Gerade durch den Punkt $P(0, 0, 12957)^T$ normal auf die Ebene $\varepsilon := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123456 \\ 15243 \\ 321 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 240610 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2492377 \\ 127 \\ 0 \end{pmatrix} | \mu, \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Skizziere beide Mengen!

1. Gib eine schoene Charakterisierung von $g \cap h$ an.Ist $g \cap h$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Falls ja, gib eine moeglichst einfache Basis an!
2. Gib eine schoene Charakterisierung von $g \cup h$ an. Ist $g \cup h$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Falls ja, gib eine moeglichst einfache Basis an!

Loesungen:

Skizze von h: Zeichen zuerst die Gerade $x-y=-3$ bzw. $y=-3+x$ in der xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$ ein. Bestimme nun jene Region, wo die obige Ungleichung zutrifft. Achtung: Die vorhin gezeichnete Gerade selbst ist nicht in h. Da nun die z-Werte beliebig sind (da keine Einschrnkungen bzgl. z in der Definition von h vorkommen), entsteht jetzt praktisch ein Quader! Wir haben praktisch den $\mathbb{R}^3$ in zwei Haelften geteilt.

Skizze von g: Der Punkt P liegt (offensichtlich)auf der z-Achse. Die beiden Richtungsvektoren der Ebene ε haben z-Koordinaten 0, sie ragen daher nicht aus der xy-Ebene heraus. Somit ist der Normalvektor von ε auch der Normalvektor der xy-Ebene, also z.B. $(0,0,1)^T$. Daher ist also die Gerade h einfach nur die z-Achse.

1. Fr jeden Punkt auf der Gerade h gilt nun: Die Differenz der $x-$ und y-Koordinate ist stehts 0, da sowohl x als auch y 0 sind. Somit liegt jeder Punkt von h auch in g. Also:
   $h \subset g$ aber $h \neq g$ (Wieso nicht?)

   Daher ist $g \cap h = h$. Da h eine Gerade durch den Ursprung ist, ist sie ein Unterraum. Somit ist der Durchschnitt von g und h ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
   Der Vektor $e_3 := (0,0,1)^T$ spannt die z-Achse auf, daher ist e_3 eine Basis von $g \cap h$.

2. Wegen $h \subset g$ gilt: $g \cup h = g$. Ist nun g ein Unterraum - also abgeschlossen bzgl. der Addition und der Multiplikation?

   Betrachte $v := (0,2,0)^T$. v ist in g, da die Ungleichung $x-y > -3$ erfllt ist, da $-2-34$.
   Betrachte $v+v = (0,4,0)^T$: $v+v$ ist nicht mehr in g, da die Ungleichung nicht mehr erfuellt ist: $-4 > -3$ stimmt nicht! Also ist g nicht abgeschlossen bzgl. der Addition und somit kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.