Beispiel eines reellen Vektorraums

K = $\mathbb{R}$., $V :=\ \mathbb{R}^2 := \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}$

Wir wollen uns nun einige Details anschauen:

1.) Seien $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $v + w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + s \\ y + t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dh. Vektoren werden addiert, indem man die einzelnen Komponenten addiert.
2.) Durch die Rechenregel oben ergibt sich der Nullvektor: $o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3.) Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wie sieht der inverse Vektor aus? Der inverse Vektor ist $-v := \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, denn wenn man die beiden Vektoren addiert, erhält man den Nullvektor.
4.) $\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$. Ein Vektor wird also mit einem Skalar multipliziert, indem jede Komponente mit dem Skalar multipliziert wird.
5.) Beweis von Vektorraum-Axiom 1: $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v, w \in \mathbb{R}^2\ mit\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ gilt:

$$\alpha(v + w) = \alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x + s \\ y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x + s) \\ \alpha(y + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha s \\ \alpha y + \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha s \\ \alpha t \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \alpha v + \alpha w$$