Raumkurven 2

Wie kann man die Länge einer krummen Kurve berechnen? Ähnlich wie der Absolutbetrag eines (einfachen) Vektors kann man sogenannte Normen für ganz allgemeine Vektoren bzw. Vektorfunktionen mathematisch einführen. Ebenso kann man zum Beispiel ein Skalarprodukt für Funktionen einführen. Dies geht aber weit darüber hinaus, was wir hier behandeln können (und was für die Schule sinnvoll wäre).

Für unseren relativ speziellen Fall einer parametrisierten Kurve im drei-dimensionalen Raum gibt es aber auch einen weiteren Zugang: Einerseits weiß man ja, dass der zurückgelegte Weg d gerade die Geschwindigkeit v mal Zeit t ist, bzw. falls die Geschwindigkeit nicht konstant ist, $d = \int v(t)\,dt$. Andererseits kann man aus der Position durch Ableiten ja die Geschwindigkeit berechnen – man erhält zwar die parametrisierte Geschwindigkeit aber aus dieser kann man mit dem ganz normalen aus der Schule bekannten Absolutbetrag die absolute Geschwindigkeit (= Schnelligkeit) berechnen. Zugegeben, dass dies für allgemeine Vektorfunktionen auch funktioniert ist nicht a priori klar, aber wir wollen an dieser Stelle mathematisch ein Auge zu drücken. Folglich kann man die Länge d schreiben als:

$$d = \int |v(t)|\,dt = \int \left|\frac{d}{dt}s(t)\right| dt = \int \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}z(t)\right)^2}\,dt$$

Diese Formel kann auch mit Schulwissen berechnet werden.

Dazu ein Beispiel:

Wir wollen die Länge der Raumkurve $\vec{s}(t) = (\,x(t),\ y(t),\ z(t)\,) = (\,\sin(t),\ 3t,\ \cos(t)\,)$ berechnen für t = 0 bis t = 5. Einsetzen in die Formel liefert:

$$d = \int_{t=0}^{t=5} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}z(t)\right)^2}\,dt = \int_0^5 \sqrt{\cos(t)^2 + 3^2 + (-\sin(t))^2}\,dt$$

$$= \int_0^5 \sqrt{10}\,dt = \sqrt{10} * 5 - \sqrt{10} * 0 = 5\sqrt{10} \approx 15.81$$

Weil ja sin² + cos² = 1 gilt. Das Beispiel ist natürlich so gewählt, dass sich relativ schöne Zahlen ergeben. In Echt kann das Integral natürlich ausgesprochen schwer zu lösen sein.

In Echt kann es natürlich auch passieren, dass man das Integral gar nicht lösen kann, weil man nicht einmal explizite Funktionen gegeben hat, sondern nur einen Haufen Messwerte. In diesem Fall müssen, wie schon im vorherigen Kapitel beim nummerischen Differenzieren beschrieben, die Differenzialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden und das Integral wird durch eine Summe ersetzt. Für jeden Messwert muss einzeln für jede Raumrichtung der (zentrale) Differenzenquotient berechnet werden, gemäß der Formel quadriert und summiert werden und die Wurzel gezogen. Und schließlich muss man über alle diese summieren.

Das ist zwar grundsätzlich nicht schwer, aber so richtig viel Arbeit. Wirklich richtig viel. Daher rechnet so etwas auch niemand mit der Hand – für Computer ist das aber genau ihr Spezialgebiet: Viele viele einfache Rechnungen ohne viel Nachdenken schnell und richtig lösen. Wenn man sich überlegt, dass der obige Sachverhalt von der Physik bzw. Mathematik aus gesehen noch ausgesprochen einfach ist und damit auch die Formel ausgesprochen einfach und kurz, kann man sich überlegen wie aufwendig es wird, größere Problemstellungen mit vielen Milliarden (oder noch viel mehr) Messpunkten zu rechnen. Kein Wunder, dass Forschungseinrichtungen riesige Serveranlagen mit gewaltiger Rechenleistung besitzen (müssen).

Für weitere Informationen zu Raumkurven siehe z.B.
http://de.wikipedia.org/wiki/Raumkurve