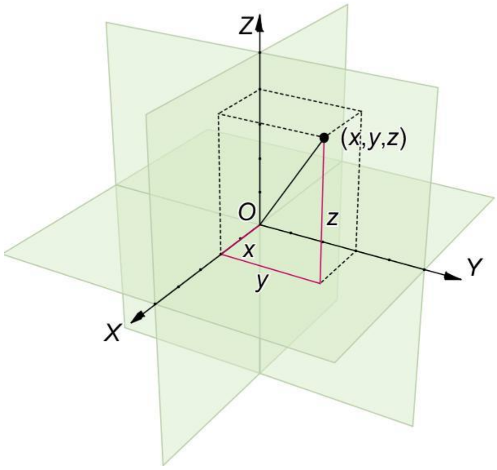
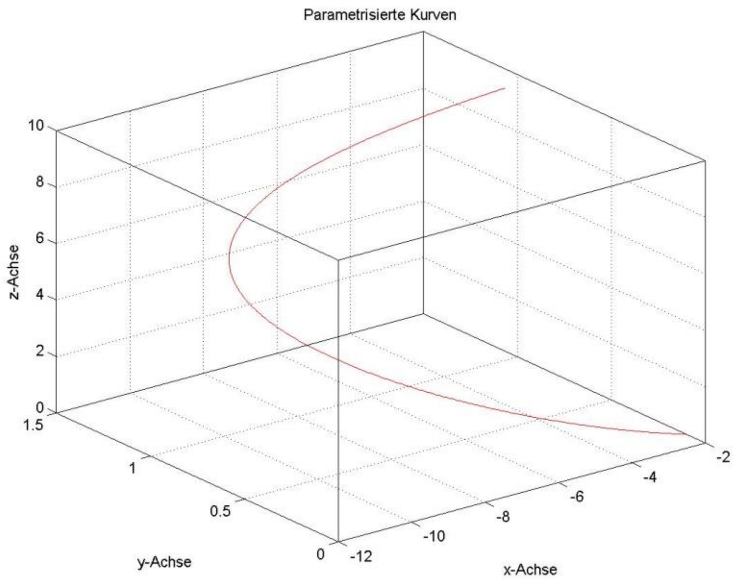
# Raumkurven

Bis jetzt haben wir Bewegungen, Kräfte etc. nur in einer Dimension betrachtet. In der realen Welt erleben wir aber stets drei Raumdimensionen. Im Allgemeinen werden sich Objekte jeder Art – fallende Steine, Vögel, Rennautos, Planeten… – weder strikt gleichförmig bewegen, noch entlang genau einer Koordinatenachse.

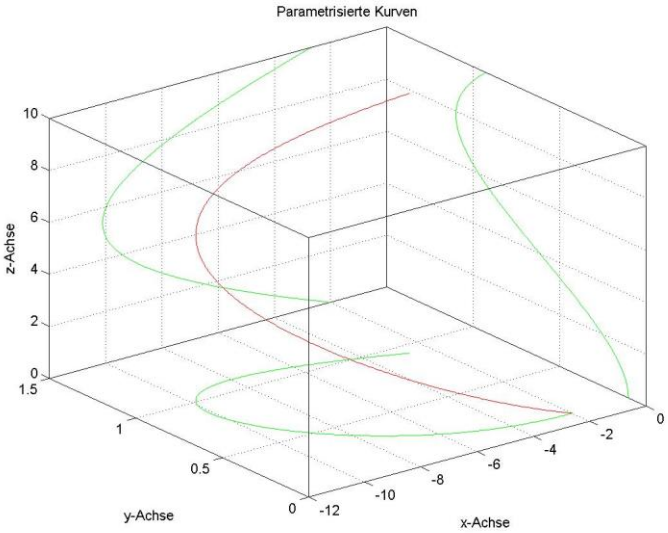
Wie man Positionen im Raum beschreibt, wissen wir schon: mit den Vektoren. Man gibt dem Objekt eine x- ein y- und eine z-Koordinate, und gemeinsam beschreiben sie die genaue Position im Koordinatensystem. Anders ausgedrückt könnte man auch sagen, man projiziert den Ortsvektor auf die einzelnen Achsen und erhält so die zugehörigen x-, y- und z-Koordinaten.




Hat man eine Bewegung im Raum, so ändern sich die x-, y- und z-Koordinaten mit der Zeit, aber an der Idee der Beschreibung ändert sich nichts. Die Koordinaten sind nun jeweils Funktionen der Zeit. Das heißt anstatt einem (zeitlich konstanten) Vektor (x, y, z) hat man nun einen (zeitlich veränderlichen) Vektor ( x(t), y(t), z(t) ), dessen Einträge beliebige Funktionen von t sind. Insbesondere bedeutet das, dass die einzelnen Funktionen nur von einer einzigen Variablen abhängen: nämlich von t. Wir haben also ein drei-dimensionales Problem in drei ein-dimensionale Probleme umgewandelt, und von den eindimensionalen Problemstellungen wissen wir ja schon wie man sie löst. Diese Kurven im drei-dimensionalen Raum nennt man einfach Raumkurven, bzw. weil man sie mit nur einem einzigen Parameter beschreiben kann, parametrisierte Kurven. Eine mögliche Raumkurve kann zum Beispiel so aussehen wie im Bild nebenan.



Alternativ kann man sich natürlich auch wieder vorstellen, dass man eine Kurve im Raum gegeben hat und diese dann auf die einzelnen Ebenen projiziert. In einer Ebene ist sie dann bloß eine Funktion von zwei Variablen, x und y zum Beispiel, und man kann eine Funktion f = y(x) bzw. f = y(t) finden, die diese projizierte Kurve beschreibt.




Die Kurve aus der oberen Grafik hat zum Beispiel die Vorschrift:
$\vec{s}(t) = (\, x(t),\ y(t),\ z(t)\,) = (\cos(t) + t^2 - 5t - 3\ ,\ \ \sin(0.4t)^2 + 0.1\ ,\ \ 2t\,),$
t nimmt dabei Werte von 0 bis 5 an.

Man kann solch eine Raumkurve zum Beispiel als den Weg eines Staubkörnchens in der Luft interpretieren. Für den eindimensionalen Fall haben wir uns schon im vorigen Kapitel überlegt, dass dann die Geschwindigkeit gerade die Ableitung des Ortes nach der Zeit ist. Im drei-dimensionalen ist das natürlich genau das Gleiche, mit dem feinen Unterschied, dass eben nach den drei Koordinaten-Funktionen abgeleitet werden muss. Jede wird für sich nach t abgeleitet. Für unser Beispiel von vorhin würde das bedeuten:

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{s}(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \qquad \frac{d}{dt}y(t), \qquad \frac{d}{dt}z(t)\right) =$$

$$= (-\sin(t) + 2t - 5\,, \qquad 0.8 * \sin(0.4t)\ , \qquad 2)$$

Das Gleiche kann man für die Beschleunigung weiterspielen:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = (-\cos(t) + 2\,, \qquad 0.32 * \sin(0.4t)\ , \qquad 0)$$

Eine Beschleunigung wird üblicherweise von einer Kraft hervorgerufen. Das heißt nach $\vec{F} = m\vec{a}$ folgt für unser Beispiel, bei einer Masse m = 2 sofort:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 2\vec{a} = (-2\cos(t) + 4\,, \qquad 0.64 * \sin(0.4t)\ , \qquad 0)$$

Offensichtlich ändert sich die Kraft mit der Zeit in x- und y-Richtung, in z-Richtung wirkt keine Kraft. Dies ist zugegebener Maßen keine Kraft die man in der Natur erwarten würde, aber sie eignet sich gut zur mathematischen Illustration. Und wenn man Reibung, Luftströmungen und ähnliche Effekte mit in die Rechnung einbezieht, können durchaus seltsam anmutende Dinge dabei herauskommen.