

Numerisches Differenzieren

Anbei findest du ein GeoGebra-file. In diesem sind konkrete Daten des Akkustandes eines Mobiltelefons dargestellt: In der Tabelle findest du die Werte, in der Graphik sind sie gezeichnet.

Aufgabe:

1. Erstelle in diesem GeoGebra-file eine Kurve über die vom Gerät erbrachte bzw. verbrauchte Leistung!

Lösungsweg:

Hintergrundinfo: Die Leistung ist bekanntlich $P = dE/dt$ die Ableitung der Energie nach der Zeit. Das Ziel ist also den „Graphen der Energie des Mobiltelefons abzuleiten“. Leider haben wir keine explizite Funktion für die Energie gegeben. Aus den 60 Datenpunkten könnte man zwar eine Funktion aufstellen – diese hätte dann den Grad 59 – was aber eine ungeheure Rechenarbeit wäre. Außerdem sind die Messwerte nicht beliebig genau, eine Funktion wäre ohnehin nur eine Näherung des tatsächlichen Verlaufs. Daher bleibt man gleich bei einer einfacheren numerischen Näherung: Man verwendet den Differenzenquotienten. Diesen kann man numerisch auf (mindestens) 3 verschiedene Arten bestimmen, siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Differenzenquotient>. Beim Grenzübergang zum Differenzialquotienten liefern alle drei das selbe Ergebnis, aber schlaue Mathematiker haben herausgefunden, dass für numerische Lösungen – wie wir hier eine suchen – der Zentrale Differenzenquotient am besten geeignet ist. Er ist numerisch am stabilsten (das heißt „am wenigsten fehleranfällig“ und am genauesten für diskrete Daten).

Der Zentrale Differenzenquotient ist folgendermaßen definiert: $\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Auf gut Deutsch: Man möchte die Ableitung in einem Punkt x berechnen. Dazu schaut man sich den Funktionswert ein Stück h davor an, und ein Stück h dahinter. Die Differenz der beiden teilt man durch die Strecke dazwischen – ein Stück h nach vor plus ein Stück h nach hinten sind $2h$ Distanz.

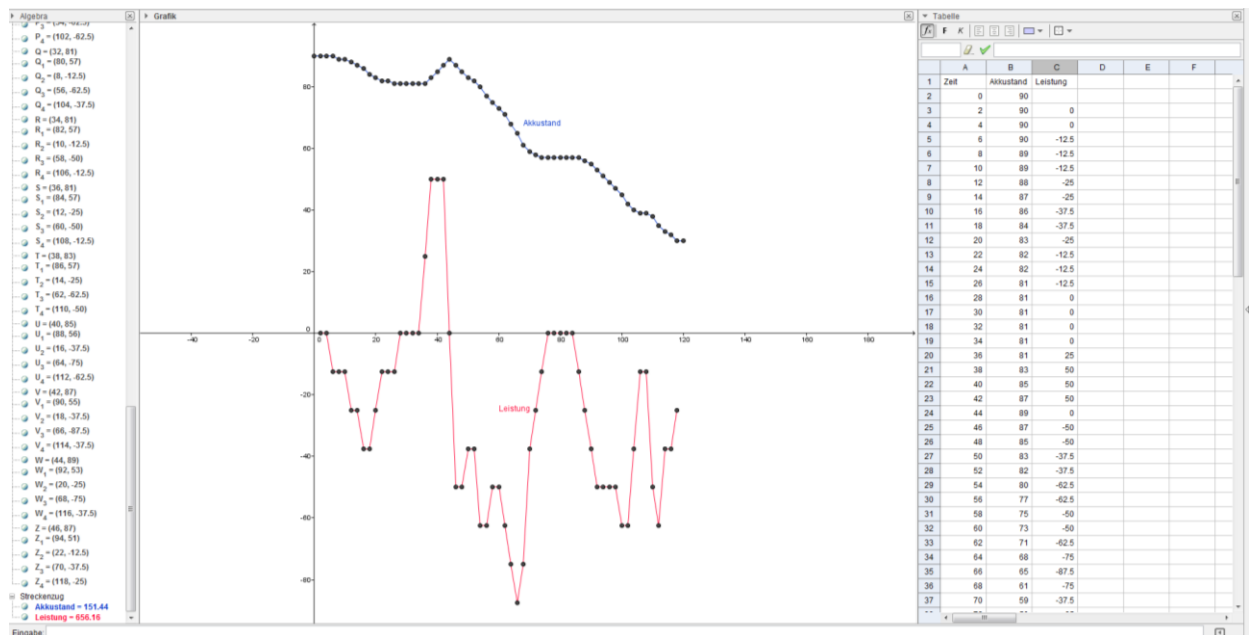
Konkreter: In unserem Beispiel haben wir eine ganze Reihe von x -Werten – von 0 bis 120. Da auf der x -Achse die Zeit aufgetragen wird, sollten wir sie eher t -Werte bzw. t -Achse nennen. Die Zeitschritte sind in den Daten schon automatisch in zweier-Schritten gegeben. Folglich ist der kleinste Zahlenwert für h gerade 2. Diesen wollen wir verwenden. Und wir haben die zu den t -Werten zugehörigen y -Werte, unseren Akkuladestand. Die Formel des Differenzenquotienten kann man daher für unseren Fall folgendermaßen umschreiben: $\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k} := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$

Die Steigung des Graphen an der Stelle t_k ist der Funktionswert von t_{k+1} (also $f(t_{k+1}) = y_{k+1}$) minus dem Funktionswert von t_{k-1} ($= y_{k-1}$) und das ganze geteilt durch den Abstand $t_{k+1} - t_{k-1} = 4$. Diese Werte haben wir alle gegeben!

Wie gibt man dies nun explizit ein? Angenommen, die Zeitwerte stehen in der Spalte B und die Werte des Akkustandes in der Spalte C. Wollen wir z.B. die Ableitung für den fünften Zeitpunkt $t = 10$ in der Spalte D berechnen, so nehmen wir dafür den Funktionswert von $t = 12$ (dieser steht vermutlich in der Zelle C6) subtrahieren von diesem den Funktionswert von $t = 8$ (welcher vermutlich in der Zelle C4 steht) und dividieren das ganze durch 4. Also steht im Feld D5 folgende Formel: $=(C6 - C4)/4$.

Beachte:

- Beim vorliegenden GeoGebra-File sind die Spalten um eines verschoben im Vergleich zum obigen Text.
- Die Formel muss natürlich nicht für alle Werte eingegeben werden, sondern nur einmal und dann mit der Maus nach oben bzw. unten gezogen werden.
- Auch kann man auf diese Weise die Ableitung NICHT für die Randpunkte, also $t = 0$ und $t = 120$ berechnen. Diese müssen ausgelassen werden.
- Um eine Graphen zu zeichnen, markiert man mit der linken Maustaste alle benötigten t -Werte (also von 2 bis 118), drückt dann auf der Tastatur die STRG-Taste und kann nun zugleich mit der Maus die zweiten benötigten Werte der Leistung markieren. Sind die Werte in beide Spalten markiert, so klickt man mit der rechten Maustaste drauf und wählt den Befehl Erzeuge -> Streckenzug.
- Man kann die Beschriftung der Punkte ausschalten, indem man im Algebra-Fenster ganz oben das Wort „Punkt“ mit der rechten Maustaste anklickt und bei Eigenschaften das Häkchen bei „Beschriftung anzeigen“ entfernt.
- Im Algebra-Fenster bei „Streckenzug“ kann man wieder mit Rechtsklick die Farbe der Linie und ähnliches ändern.
- Da die Leistung vom Zahlenwert her sehr klein ist, könnte man die Werte zum Beispiel mit 50 multiplizieren, um so den Graphen besser erkennen zu können.
- Die Zeichnung sollte zum Schluss in etwa so aussehen:



2. Interpretiere die erzeugte Grafik über die Leistung: Eine negative Leistung bedeutet, dass das Gerät Energie verbraucht hat – zum Beispiel durch Telefonieren. Was bedeutet dann eine positive Leistung? Was bedeutet eine Leistung von 0? Zu welchem Zeitpunkt war die Leistung am größten? Wie viel Energie hat das Mobiltelefon in dem gesamten Zeitraum selbst „verbraucht“, wenn man vereinfacht annimmt, dass 100% genau 100 Joule entsprechen?