Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Bis jetzt haben wir konkrete Differenzialgleichungen (folgend als DG abgekürzt) in verschiedenster Form kennen gelernt und bis jetzt immer mit einem expliziten Integral gelöst. Kennt man die Anfangsbedingungen nicht, so kann man die DG natürlich auch lösen – man löst einfach das unbestimmte Integral auf beiden Seiten. Dabei braucht man nur auf einer Seite eine Integrationskonstante annehmen, da man die beiden ursprünglichen ja zu einer zusammenfassen kann. Aber gehen wir nun einen Schritt tiefer, was ist eine DG im strengen mathematischen Sinn?

In einer „normalen“ Gleichung kommen Variablen und Zahlen vor, gesucht ist eine Zahl welche die Gleichung löst. Bei Differenzialgleichungen sind die gesuchten Lösungen Funktionen. Eine Funktion die den radioaktiven Zerfall beschreibt, zum Beispiel. In einer DG kommen Zahlen vor, Konstanten, Funktionen, deren Ableitungen oder entsprechende Differenziale. Eine sehr einfache DG wäre z.B. $f'(x) = 2x$ bzw. äquivalent $\frac{dy}{dx} = 2x$. Welche Funktion f(x) ergibt, wenn man sie ableitet, genau 2x? Offensichtlich y = x^2. Damit ist die Funktion y = x^2 EINE Lösung von $\frac{dy}{dx} = 2x$. Will man die DG mathematischer lösen, so integriert man einfach. Hier wissen wir, dass bei dem unbestimmten Integral eine Integrationskonstante hinzukommt: y = x^2 + c. Diese Funktion erfüllt die DG für alle beliebigen c aus den reellen Zahlen. Welches c dies tatsächlich ist, kann man meistens aus gegebenen Anfangswerten bestimmen. Weiß man zB. dass y(1) = 3, so folgt 3 = 1^2 + c und damit c = 2.

Differenzialgleichungen werden in verschiedene Typen eingeteilt. Diese Typen weisen jeweils bestimmte Eigenschaften auf, z.B. dass man sie durch einfaches Integrieren lösen kann, oder z.B. dass man sie analytisch gar nicht lösen kann. Die wichtigsten Unterscheidungen sind:

Gewöhnlich: Es wird nur nach einer Variablen differenziert. Z.B.: $z''(t) + 2 * z(t)^2 = \sin(3 * t)$

Linear: Die Funktionen kommen nur als einfache Potenz vor. Das vorige Bsp. Ist nicht linear, da im zweiten Term z(t)² steht. $z''(t) + 2 * z(t) = 3$ wäre aber linear.

Homogen: Auf der linken Seite steht nur die Funktion und ihre Ableitungen, auf der rechten Seite steht 0. Das vorige Bsp. Ist daher nicht homogen; $z''(t) + 2 * z(t) = 0$ wäre aber homogen.

Partiell: Es wird nach mehreren Variablen differenziert. Z.B.: $\frac{dz(x,y)}{dx} + 3\frac{dz(x,y)}{dy} - 4 * z(x,y) = 0$. Dieses Bsp. Ist zugleich auch linear und homogen. Partiell, nicht linear und nicht homogen wäre z.B. $\frac{dz(x,y)}{dx} + 3\frac{d^2z(x,y)}{dy^2} - 4 * \sin\big(z(x,y)\big) + 47 = 0$, da der Sinus nicht linear ist, und auf der linken Seite nicht NUR die Funktion z und deren Ableitungen stehen, sondern auch die 47.

Die einfachsten DG sind jene, die gewöhnlich, linear und homogen sind. Diese kann man manchmal sogar durch hinschauen lösen. So wie das Beispiel f'(x) – f(x) = 0. Offensichtlich löst e^x diese DG. Diese gewöhnlichen, linearen und homogenen DGen haben auch eine sehr praktische Eigenschaft: Die

Lösung ist eindeutig (bis auf die Konstante). Hat man mal eine Funktion erraten, die die DG löst, so ist es bereits die richtige und einzige die das tut (bis auf eine Konstante). Um zu überprüfen, ob eine Funktion Lösung der Differenzialgleichung ist, braucht man die Funktion nur einsetzen und entsprechend ableiten; kommt eine wahre Aussage heraus, so ist die Funktion eine Lösung.

Bsp.: Löst $f(x) = e^{2x}$ die Differenzialgleichung $f''(x) - 4f(x) = 0$?
Ja, denn $f'(x) = 2e^{2x}\ und\ f''(x) = 4e^{2x}$ und $4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$.

Für gewöhnliche, die nicht homogen sind gibt es spezielle Lösungsverfahren, auf die wir hier nicht näher eingehen können. Bei partiellen linearen DGen wird es noch um einiges schwieriger. Nicht lineare, partielle DGen sind meistens überhaupt nicht mehr analytisch lösbar. Man kann sich aber über numerische Rechenalgorithmen helfen und Näherungen für diese bestimmen. Daran wird selbst heute noch intensiv geforscht.

Zum Schluss noch eine in der Physik übliche Konvention:

Da in der Physik die meisten Größen von zahlreichen Variablen abhängen, gibt es auch zahlreiche verschiedene Möglichkeiten nach welcher Variable „partiell“ abgeleitet werden kann. Folglich reicht es nicht einfach nur ein Apostroph für die Ableitung zu schreiben, sondern es wird immer explizit angegeben wonach abgeleitet wird. Einziger Sonderfall: Eine Ableitung nach der Zeit schreibt man mit einem Punkt über der Größe. Also ist die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ bzw. die Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$. Da der Apostroph in der Physik nicht für die Ableitung verwendet wird, kann er ohne Verwechslungsgefahr zum Anzeigen von Integrationsvariablen verwendet werden – zumindest solange man nicht die physikalische und mathematische Notation zu vermischen beginnt.