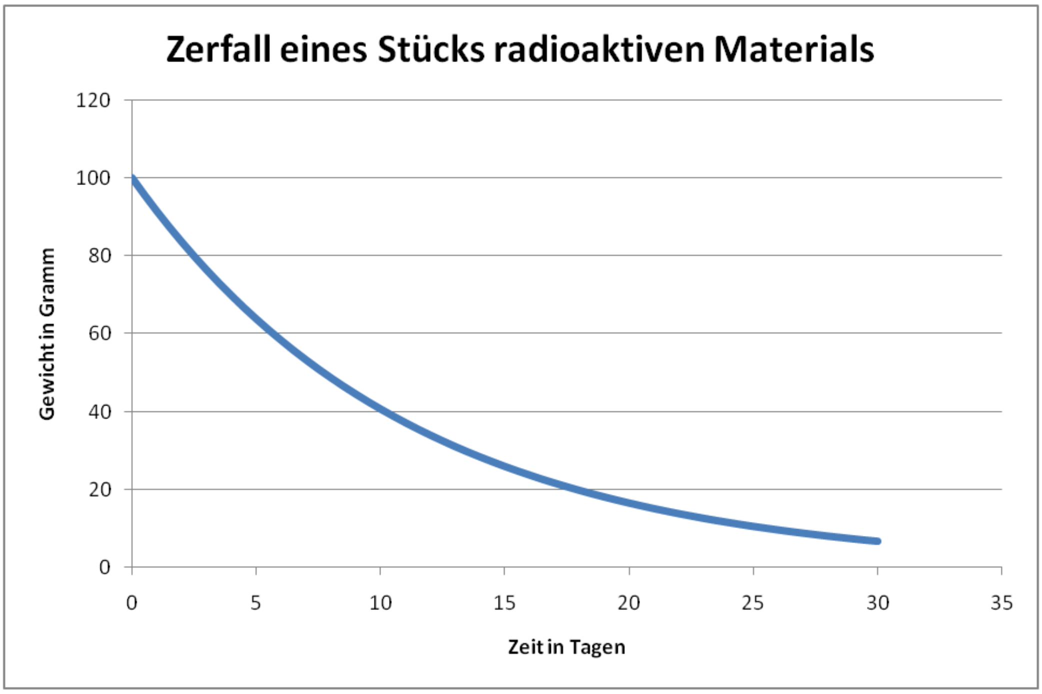
Das radioaktive Zerfallsgesetz

Aus Experimenten weiß man, dass beim radioaktiven Zerfall die Anzahl der in einer gewissen Zeitspanne zerfallenen Atome proportional ist zur Anzahl der Atome. Und natürlich auch zur Länge der Zeitspanne. Es gilt: $\Delta n \sim n * \Delta t$. Sprich: die Veränderung von n ist proportional zur Anzahl n mal der Veränderung der Zeit t. Wie groß die Proportionalität ist, hängt vom jeweiligen Material ab; man führt eine allgemeine Zerfallskonstante λ ein. Da die Änderung der Atome negativ ist und wenn man die Differenzen Δn und Δt durch deren Differenziale ersetzt, so erhält man die fertige Differenzialgleichung: $dn = -\lambda * n * dt$



Eine solche einfache Differenzialgleichung löst man durch „Separation der Variablen“. Die „Variablen“ der Differenzialgleichung sind n und t - jene Größen die in den Differenzialen vorkommen. Alle anderen Größen können als konstant angenommen werden. Die beiden Variablen n und t wollen wir aber voneinander trennen und formen die Gleichung um: $\frac{1}{n} dn = -\lambda * dt$. Nun dürfen wir auf beiden Seiten integrieren. Die Teilchenzahl wird integriert von einer Anfangsteilchenzahl N_0 bis zu einer Endteilchenzahl N(t) während zugleich die Zeit integriert wird von der Anfangszeit t_0 bis zur Endzeit t. Die ursprünglichen Integrationsvariablen erhalten wieder den Apostroph:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{n'} dn' = -\lambda * \int_{t_0}^{t} dt' \quad => \quad \ln(N(t)) - \ln(N_0) = -\lambda t + \lambda t_0 \quad => \quad \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\lambda(t - t_0)$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)} \quad => \quad N(t) = N_0 * e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Üblicherweise setzt man den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$. Dann erhält man das bekannte radioaktive Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 * e^{-\lambda t}$