Permutationen

1 Permutationen ohne Wiederholung

Wir betrachten eine Menge von n **Objekten** (meist sind diese mathematischer Natur, es kann sich aber genauso um Dinge des alltäglichen Lebens, wie Bilder, Schüler, usw. handeln). Diese Objekte kann man in einer gewissen Reihenfolge anordnen.

Ein Beispiel dazu: Ein Student muss im Laufe eines Semesters 3 Prüfungen ablegen, wir nennen sie der Einfachheit halber A, B und C. Die Reihenfolge, in der er die Prüfungen ablegt, ist *beliebig*. Wieviele mögliche Reihenfolgen gibt es?

Wenn man mit "$A\ B\ C$" den Fall bezeichnet, dass der Student zuerst Prüfung A, dann B, und zum Schluss C ablegt, dann gibt es insgesamt folgende Möglichkeiten:

- $A\ B\ C$
- $A\ C\ B$
- $B\ A\ C$
- $B\ C\ A$
- $C\ A\ B$
- $C\ B\ A$

Die Frage ist natürlich, warum es gerade 6 Möglichkeiten gibt, bzw. inwieweit eine Gesetzmäßigkeit vorhanden ist.

Die Zahl der Reihenfolgen (= **Permutationen**) bestimmt man folgendermaßen: Der Student unseres Beispiels hat für die Wahl der 1. Prüfung **3** Möglichkeiten (also A, B oder C). Egal wie er sich entscheidet, für die Wahl der 2. Prüfung bleiben nur noch **2** zum Auswählen (wenn er zum Beispiel zuerst Prüfung B ablegt, kann er als 2. Prüfung A oder C absolvieren, also 2 Varianten). Für die letzte Prüfung bleibt nur noch **1** zur Auswahl übrig.

Die Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen der 3 Prüfungen ist dann $3 * 2 * 1 = 6$.

Für allgemein n Objekte ist also die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung
$\underline{n * (n-1) * \ldots * 1}$.

Für $n*(n-1)*\ldots*1$ gibt es auch die kurze Schreibweise $n!$. Dieses Symbol wird "n Fakultät" oder "n faktorielle" gesprochen. Es ist für alle ganzzahlige n definiert, wobei $0! = 1$. Die Anzahl der Permutationen wollen wir mit P_n bezeichnen.

Wir fassen zusammen

$$n! := n * (n-1) * \ldots * 1 = P_n.$$

Dies ist die Anzahl der Permutationen *ohne Wiederholung*.

2 Permutationen mit Wiederholung

Angenommen, wir haben eine Menge von Objekten, die aus mehreren *Teilmengen* besteht, wobei innerhalb jeder Teilmenge die Objekte gleich sind. Ein Beispiel dafür ist eine Gruppe von n Menschen, die aus k_1 Frauen und k_2 Männern besteht, also die Elemente der Teilmenge 1 sind Frauen, die Elemente der Teilmenge 2 sind Männer.

Wenn man die Frauen und Männer auf einer langen Sitzbank anordnen will, stellt sich die Frage: wieviele Möglichkeiten gibt es?

Dazu ein Beispiel: nehmen wir an unsere "Menge" besteht aus 2 Frauen und 2 Männern.
$MMFF$ symbolisiert eine Anordnung von "Mann Mann Frau Frau".

Alle möglichen Anordnungsvarianten sind:

- $MMFF$
- $MFMF$
- $MFFM$
- $FFMM$
- $FMFM$
- $FMMF$

Also insgesamt $\underline{6}$ Möglichkeiten einer "Sitzordnung". Auch hier stellt sich die Frage, warum gerade 6, bzw. wie schaut die Systematik aus?

Falls man die 2 Frauen als voneinander verschieden betrachten würde (Frau 1 = F_1, Frau 2 = F_2), dann würde sich die Anzahl der Möglichkeiten der Sitzordnung verdoppeln ($MMFF$ z.B. wird zu MMF_1F_2 und MMF_2F_1), da innerhalb der Teilmenge Frauen $2! = 2 * 1 = 2$ neue Permutationen dazukommen (F_1F_2 und F_2F_1).
Falls man die Männer ebenfalls als voneinander verschieden betrachtet, haben wir den Fall einer Permutation *ohne* Wiederholung!
Man kommt auf insgesamt $x*2*2 = \underline{x*4}$ Sitzordnungsvarianten (wenn x die unbekannte Anzahl der Permutationen mit Wiederholung ist). Weiters muss $x * 4 = \underline{24}$ sein, da eine Permutation *ohne* Wiederholung von einer Menge von 4 Objekten $4! = 4 * 3 * 2 * 1 = \underline{24}$ ist. Also ist

$$x * 4 = 24 => x = \underline{6}.$$

Wenn man allgemein eine Menge von n Objekten hat, die aus m Klassen besteht (mit $k_1, k_2, \ldots, k_m$ Objekten je Klasse), dann berechnet sich die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung (bezeichnet durch $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$) durch die Gleichung

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} * k_1! * k_2! * \ldots * k_m! = n!$$

woraus folgt

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \ldots * k_m!}.$$

Besonders häufig tritt der Spezialfall mit 2 Klassen auf. Die Bezeichnung ist dann

$$P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$