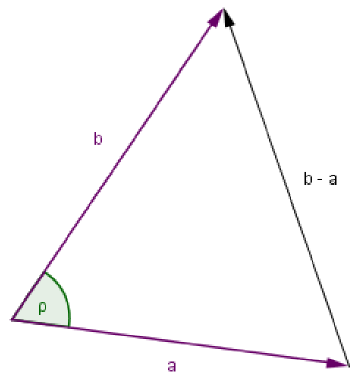
Das Winkelmaß zwischen zwei Vektoren - Beweis der Formel

Unsere Ausgangssituation ist folgende: Wir haben zwei Vektoren in der Ebene und suchen den Winkel, den diese beiden Vektoren einschließen. Betrachten wir dazu eine Zeichnung:



Wenden wir hier nun den Kosinussatz an. Damit erhalten wir:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos\rho \quad (*)$$

Um die nächsten Beweisschritte führen zu können, muss man zwei kleine Nebenbeweise zeigen:

1) $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})^2$

2) $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \; und \; \vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$

ad 1)

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\right)^2 = (b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$(\vec{b}-\vec{a})^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix} = (b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$\rightarrow |\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})^2$$

ad 2)

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2$$

$$|\vec{a}|^{\,2} = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,)^{\,2} = a_1^2 + a_2^2$$

$$\rightarrow \ \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^{\,2}$$

………………………………

$$\vec{b}^{\,2} = \vec{b} \cdot \vec{b} = b_1^2 + b_2^2$$

$$|\vec{b}|^{2} = (\sqrt{b_1^2 + b_2^2})^{\,2} = b_1^2 + b_2^2$$

$$\rightarrow \ \vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^{\,2}$$

Da wir diese zwei Schritte bewiesen haben, können wir sie auch benutzen.

Also unsere Formel (*) lautet:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^{2} \ = \ |\vec{a}|^{\,2} + |\vec{b}|^{2} - 2 \cdot |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^{\,2} \cdot \cos\rho$$

Bewiesen haben wir diese beiden Gleichungen:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^{\,2} \ = \ (\vec{b}-\vec{a})^{2} \quad \text{und} \quad \vec{a}^{\,2} \ = \ |\vec{a}|^{2} \ \ und \ \ \vec{b}^{\,2} \ = \ |\vec{b}|^{2}$$

Nun ersetzen wir in unserer Gleichung:

$$(\vec{b}-\vec{a})^{\,2} \ = \ \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2 \cdot |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^{\,2} \cdot \cos\rho$$

Als nächsten Schritt quadrieren wir die linke Seite aus:

$$\vec{b}^{\,2} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^{\,2} \ = \ \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2 \cdot |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^{\,2} \cdot \cos\rho$$

Einige Terme fallen weg und wir erhalten:

$$-\,2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \ = \ -\,2 \cdot |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^{\,2} \cdot \cos\rho$$

Jetzt dividieren wir durch 2:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \ = \ |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^{\,2} \cdot \cos\rho$$

Durch eine Umformung erhalten wir: $\boxed{\cos\,\rho \ = \ \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$