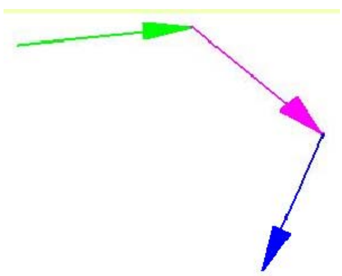


Lösungen zum Übungsblatt: Skalarprodukt, Orthogonalität

1. AUFGABE:

a) Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-4\end{pmatrix} = (-3)\cdot4 + 4\cdot(-3) + (-6)\cdot(-4) = 0$$

Somit sind die Vektoren senkrecht aufeinander.

b) Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn das Skalarprodukt ihrer Richtungsvektoren Null ist.

$$\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = 9 - 1 - 8 = 0.$$ Die Geraden sind orthogonal.

Schnittpunkt ist übrigens S(2|2|1) (Setze bei g s=-1)

c) Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn das Skalarprodukt ihrer Normalvektoren Null ist.

$E_1 : 2x - 4z = 7$ $E_2 : 8x + 11x + 4x = 0$

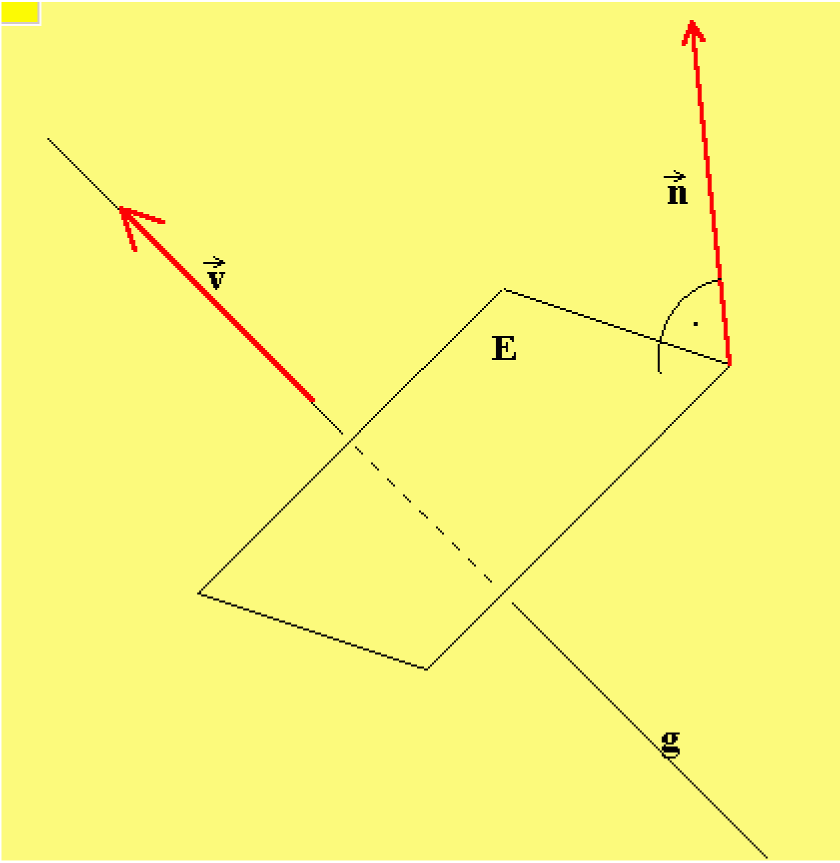
Die Koordinaten der Normalvektoren sind die Koeffizienten der Gleichung.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\11\\4\end{pmatrix} = 16 + 0 - 16 = 0.$$ Die Ebenen sind orthogonal.

2. AUFGABE:

Stell Dir vor: g parallel zu E oder g senkrecht zu E?

Welche Lage haben dann der Normalvektor von E und der Richtungsvektor von g zueinander?



Allgemein: Ist $\vec{v}$ der Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ der Normalvektor von E,

dann gilt: g ist parallel zu E wenn $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ist.

Und: g ist senkrecht zu E wenn $\vec{v}$ und $\vec{n}$ linear abhängig sind.

Hier ist $\vec{v} = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$.

Es ist $\vec{v} \cdot \vec{n} = -9 -4 + 8 \neq 0$, also ist g nicht parallel zu E.

$\vec{n}$ ist auch kein Vielfaches von $\vec{v}$, also sind $\vec{v}$ und $\vec{n}$ linear unabhängig.

Folgerung: g schneidet E nicht rechtwinklig.

3. AUFGABE:

Ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P(p_1|p_2|p_3) = P(3|-7|11) \in E$, dann kann man

die Ebenengleichung sofort folgendermaßen angeben:

I $\quad E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow E: \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 7 \\ z - 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow E: 2(x - 3) + (-5)(y + 7) + 0(z - 11) = 0 \Rightarrow E: 2x - 5y = 41$

II $E: ax + by + cz = d$, wobei a,b,c durch $\vec{n}$ und d durch P bestimmt ist.

Also: $E: 2x - 5y = d$.
Punktprobe mit $P(3|-7|11)$ ergibt $2 \cdot 3 - 5 \cdot (-7) = d$

Somit $E: 2x - 5y = 41$.

4. AUFGABE:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

5. AUFGABE:

$E: -y + 2z = -8$

6. AUFGABE:

$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 2 \\ z - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2(x - 1) - 6(y + 2) + 3(z - 3) = 0$

$\Rightarrow E: 2x - 6y + 3z = 23$.

Die Koordinatengleichung kann man auch als "Normalgleichung" betrachten.