



Lösung zum Übungsblatt: Gerade und Ebene

1. AUFGABE:

Vektorgleichung

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
 \text{a) E: } \begin{array}{l} |x| \quad |4| \quad |-3| \quad |-5| \\ |y| = |2| + s|-1| + t|-4| \\ |z| \quad |3| \quad |2| \quad |1| \end{array} \\
 \begin{array}{l} \text{I. } x = 4 - 3s - 5t \\ \text{II: } y = 2 - s - 4t \\ \text{III: } z = 3 + 2s + t \end{array}
 \end{array}$$

Elimination von s und t führt auf die Koordinatengleichung von E .

Zunächst: zwei Gleichungen ohne t :

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} + 5 \cdot \text{III.} & \text{II.} + 4 \cdot \text{III.} \\
 x + 5z = 19 + 7s & y + 4z = 14 + 7s
 \end{array}$$

Nun eine Gleichung ohne t und s ergibt die Koordinatengleichung von E .
Wir setzen die beiden neu erhaltenen Gleichungen gleich:

$$(x + 5z) - (y + 4z) = 19 - 14$$

$$\text{Somit: E: } x - y + z = 5$$

Zweiter Lösungsweg:

Mit Hilfe des Vektorproduktes kann man

$$\text{aus den Richtungsvektoren } \begin{array}{l} |-3| \quad |-5| \\ |-1| \quad \text{und} \quad |-4| \\ |2| \quad \quad \quad |1| \end{array} \text{ der Ebene } E: ax + by + cz = d$$

$$\text{sofort berechnen: } \begin{array}{l} |a| \quad |-3| \quad |-5| \quad |-1 + 8| \quad |7| \\ |b| = |-1| \times |-4| = |-10 + 3| = |-7|. \\ |c| \quad |2| \quad |1| \quad |12 - 5| \quad |7| \end{array}$$

Die Ebene hat also die Gleichung: $7x - 7y + 7z = d$.

Punktprobe mit dem Aufpunkt $P(4|2|3)$ ergibt $7 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 35 = d$.

Somit $E: 7x - 7y + 7z = 35$ oder (besser) $E: x - y + z = 5$.

b) Für die Ebene durch $A(-1|3|-4)$, $B(2|-5|3)$ und $C(1|-3|2)$ stellen wir zunächst die Parameterform auf:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \vec{A} & \vec{AB} & \vec{AC} \end{matrix}$ (Aufpunkt und Richtungsvektoren von E)

Lösung mit Hilfe der Elimination von s und t (oder mit Hilfe des Vektorproduktes):

Lösung: $E: 3x + 2y + z = -1$