Die Geradengleichung

1) Die Parameterform und die Normalform

P und Q seien zwei Punkte in der Ebene. Setzt man in die Gleichung

$$X = P + t * \overrightarrow{PQ}$$

für t verschiedene Zahlen ein, so erhält man für X immer einen Punkt auf der Geraden durch P und Q. Umgekehrt kann man zu jedem Punkt auf der Geraden eine passende Zahl t finden. Wir haben also eine Gleichung für die Gerade erhalten. t bezeichnet man als Parameter.

Das heißt:
Ist von einer Geraden g ein Punkt P und ein Richtungsvektor **a** gegeben, so lautet die Gleichung der Geraden in **Parameterform**:

$$\boxed{g: X = P + t * \vec{a}}$$

Beispiel: $P = \langle 2|-1\rangle, \vec{a} = \binom{1}{5}$

$$g: X = \binom{2}{-1} + t * \binom{1}{5}$$

Das können wir zeilenweise aufschreiben und parameterfrei machen:

I. $x = 2 + t \quad | * 5$
II. $y = -1 + 5t \quad | * (-1)$

$$\Longrightarrow 5x - y = 11$$

Das ist die **Normalform** (Hauptform) der Geradengleichung.

$$\boxed{y = mx + d}$$

Im Raum erhält man die Parameterform genauso. Es ist aber nicht möglich, eine Gerade durch eine einzige parameterfreie Gleichung darzustellen.

Bringt man nun alle Komponenten auf eine Seite, sodass auf der anderen Seite nur noch die 0 steht, so erhält man die **allgemeine Form** der Geradengleichung:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

2) Die Normalvektorform

Ist von einer Geraden g ein Punkt P und ein Normalvektor $\vec{n}$ gegeben, so gilt für alle Punkte X der Geraden: Die Vektoren $\vec{n}$ und $\overrightarrow{PX}$ stehen normal aufeinander, ihr Skalarprodukt ist also 0:

$\vec{n} * \overrightarrow{PX} = 0$
$\vec{n} * (X - P) = 0$
$\vec{n} * X - \vec{n} * P = 0$

Die Gleichung der Geraden in **Normalvektorform** lautet daher*:*

$$\boxed{g: \vec{n} * X = \vec{n} * P}$$

Beispiel: $P = \langle 2|-1\rangle, \vec{n} = \binom{4}{3}$

$g: \binom{4}{3} * X = \binom{4}{3} * \binom{2}{-1}$

Durch ausmultiplizieren erhält man die Normalform der Geradengleichung:

$4x + 3y = 5$

ZUSAMMENHANG: Die Koordinaten des Normalvektors sind also die Koeffizienten von x und y in der Normalform.

Eine Gerade im Raum kann man nicht in der Normalvektorform darstellen, weil es im Raum keinen eindeutigen Normalvektor gibt.