Inneres (skalares) Produkt zweier Vektoren

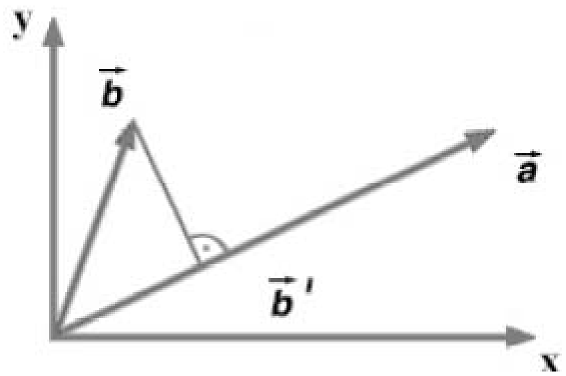
1) Definition

Das **skalare Produkt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist eine reelle Zahl, die gegeben ist durch das Produkt der Länge der vektoriellen Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ mal der Länge des Vektors $\vec{a}$.
Das skalare Produkt wird auch geschrieben als: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

<u>Vektorielle Projektion:</u>

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die vektorielle Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist der Vektor $\vec{b}'$, der parallel zu $\vec{a}$ ist und dessen Länge durch die orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gegeben ist. Es gilt

$$\overrightarrow{|b|} = |\vec{b}| * \cos\varphi$$

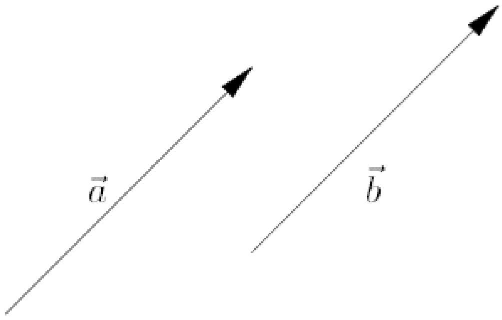


$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b'}|$$
$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\varphi$$

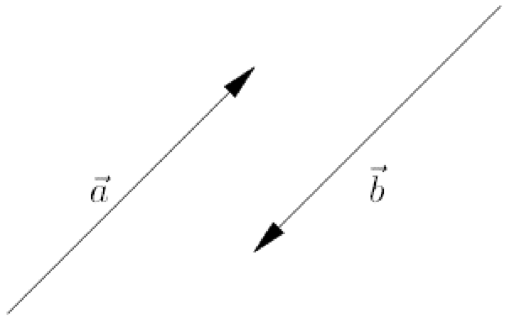
<u>Orthogonalitätsbedingung:</u>

Das skalare Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor ist, oder wenn die Länge der Projektion des einen Vektors auf den anderen gleich Null ist. Das ist nur dann der Fall, wenn die beiden Vektoren aufeinander normal stehen, d.h. wenn der Winkel, den die Vektoren einschließen, gleich $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} = 90°$ ist.

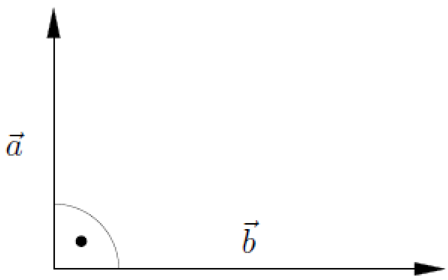
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0$$



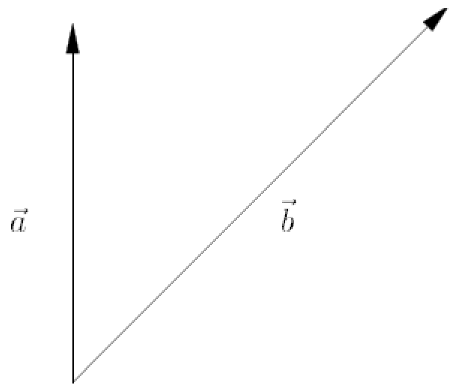
$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$



$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$



$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$



$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

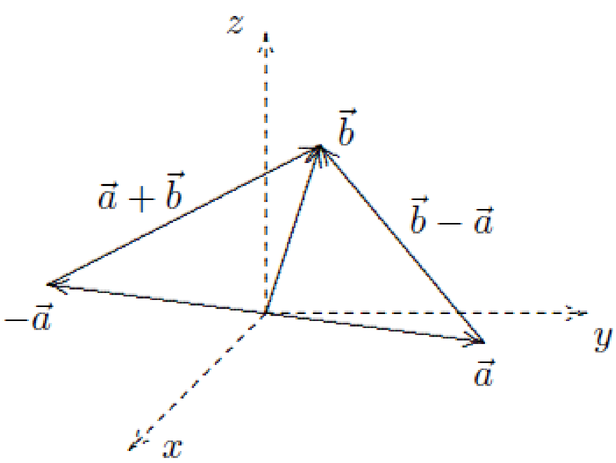
Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ gleiche Länge besitzen.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \; \Leftrightarrow a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0$$



2) Wie berechnet man das innere Produkt von zwei Vektoren?

Beim **inneren Produkt** werden die Vektoren wie folgt multipliziert:

$$\vec{a} * \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2$$

Es gilt:

- Kommutativgesetz: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
- Distributivgesetz: $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$
- $(\lambda * \vec{a}) * \vec{b} = \lambda * (\vec{a} * \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 * \vec{a} * \vec{b} + \vec{b}^2$ wobei gilt: $\vec{a}^2 = \vec{a} * \vec{a}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 * 4 + 2 * 6 = 0$ → Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.