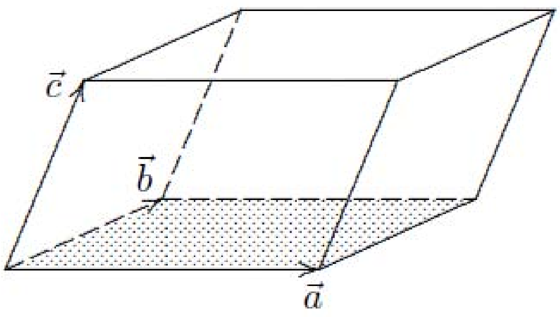
Das gemischte Produkt dreier Vektoren

Geometrisch kann das gemischte Produkt dreier Vektoren $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$ als das Volumen des von den drei Vektoren auf gespannten Körpers (Parallelepiped) sein.



<u>Beispiel</u>: Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ kollinear?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1) * 9 + 3 * 3 \\ (-12) * 3 + 4 * 9 \\ 4 * 3 + (-1) * (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

→ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear

Anmerkung: Möchte man sich das Ausrechnen des Kreuzproduktes ersparen, so kann man sich auch ganz einfach überlegen, dass „kollinear" eigentlich nichts anderes bedeutet als, dass ein Vektor ein Vielfaches des anderen sein muss. Daraus folgt, dass es ein Skalar λ geben muss, mit welchem man durch skalare Multiplikation (Vektor komponentenweise mit Skalar multiplizieren) den einen Vektor in den anderen überführen kann.

hier: Gemäß der 1.Komponente nehme man λ=-3

es gilt: $\lambda * \vec{a} = \vec{b}$

$$(-3) * \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ \mathbf{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

Dabei sieht man die letzte Komponente stimmt nicht überein. ⇔ $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ sind nicht kollinear

AUFGABE:

Prüfe selbst, ob die folgenden Vektoren kollinear sind.

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{c} = (-2) * \vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) * \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c}\ und\ \vec{d}$$ sind kollinear.

ZUSATZAUFGABE:

a. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

b. $\vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$ und $\vec{h} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$