Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

© 2004 by Claudia Steinwender <csteinwender@hotmail.com>

Potenzen

Definition . $a^n = a.a.a.....a, \quad$ wobei $a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$
$a^1 = a$
$a^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
a^n heißt *Potenz*, a heißt *Basis*, n heißt *Exponent*.

Rechenregeln

$$\boxed{\begin{array}{l} a^r.a^s = a^{r+s} \\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ a^r.b^r = (a.b)^r \\ \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \\ (a^r)^s = a^{r.s} \end{array}}$$

Wurzeln

Definition . Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist jene nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist:

$$a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

a heißt *Radikand*, n heißt *Wurzelexponent* und b heißt *Wurzel(wert)*.
Außerdem gilt

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Rechenregeln

$$\boxed{\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}}$$

Logarithmen

Definition . Die Lösung der Gleichung

$$a^x = b(a \in \mathbb{R}^+ \setminus 0, b \in \mathbb{R}^+)$$

nennt man den *Logarithmus von b zur Basis a*. Es gilt

$$a^x = b \Leftrightarrow \mathbf{x} =^a \log b$$

Rechenregeln

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^a\log u.v =^a \log u +^a \log v \\ {}^a\log \frac{u}{v} =^a \log u -^a \log v \\ {}^a\log u^r = r.{}^a\log u \\ {}^a\log \sqrt[r]{u} = \frac{1}{r}.{}^a\log u \end{array}}$$

Umrechnung von $log x$ (natürlicher Logarithmus zur Basis e) auf ${}^a\log x$

$$\boxed{{}^a\log x = \frac{\log x}{{}^a\log a}}$$

Beispiele

1. **Vereinfache:** $a^3 - 2a^2 + 3a^3 - a + 5a^2 - 2a^3$
2. **Berechne für $n \in \mathbb{N}$ (Fallunterscheidung):** $\frac{2+(-1)^{n+1}}{2-(-1)^{n+2}}$
3. **Vereinfache:** $x^a.y^{b-1}.z^c.y^2.z.x^2$
4. **Vereinfache:** $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$
5. **Vereinfache:** $\frac{18b^z}{12b^{2.z+1}}$
6. **Vereinfache bzw. fasse zusammen:** $z^4.(-z)^4$
7. **Berechne und vergleiche:** $\left(5^3\right)^2$ **und** 5^{3^2}
8. **Vereinfache:** $\left[\left(\frac{2n^6}{3v^3}\right)^4 : \left(\frac{-4n^2}{9v}\right)^2\right] : \left(\frac{3n^2}{2v^3}\right)^2$
9. **Berechne:** $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-3}$
10. **Vereinfache und stelle die Ergebnisse mit positiven Hochzahlen dar:** $\frac{60x^0y^{-3}z^{-4}}{12x^{-2}y^3z^{-3}}$
11. **Vereinfache:** $\frac{\sqrt[2]{a^{3n}}}{\sqrt[3]{a^n}}$
12. **Berechne:** $\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}.\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt[6]{2}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}}$
13. **Was ist falsch?**

$$-3 = \sqrt[3]{-27} = (-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{27^2} = 27^{\frac{2}{6}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt{27} = +3$$

14. $4^x = 1024$
15. $\log_{12}144$
16. $9^{\log_3 4}$

Literatur zum Nachschlagen
Reichel et al: Lehrbuch der Mathematik 6
- Potenz- und Wurzelfunktionen, Kapitel 1
- Exponential- und Logarithmusfunktion, Kapitel 7