Christian Kathrein
25.01.2016

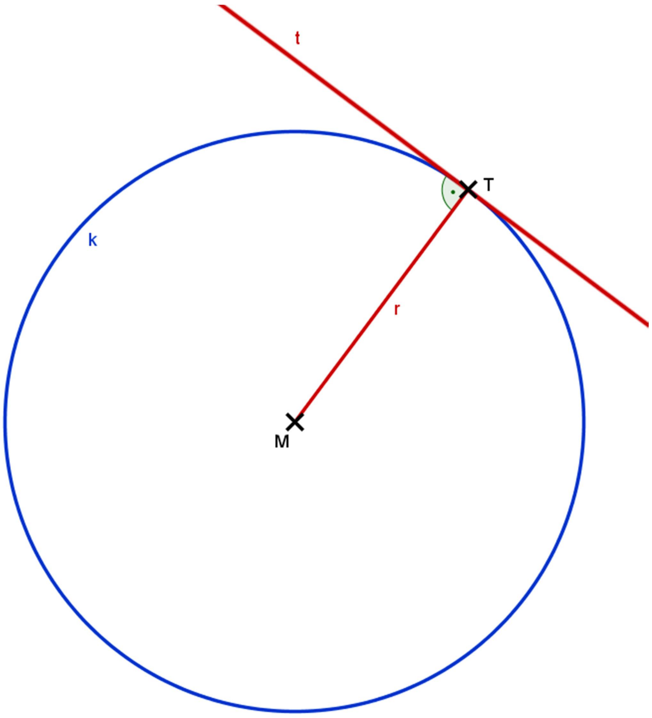
Kreistangenten

Wir überlegen uns, wie man Tangenten von einem Punkt an einen Kreis legen kann. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

1.) Der Punkt liegt auf dem Kreis
2.) Der Punkt liegt außerhalb des Kreises

Tangente von Punkt auf Kreises

Wir kennen den Kreis k mit Mittelpunkt $M = (x_M|y_M)$ und einen Punkt $T = (x_T|y_T)$, welcher auf dem Kreis liegt. Gesucht ist die Gerade t, sodass t eine Tangente von k ist und durch T verläuft.



Wir wissen, dass $\overrightarrow{MT} \perp t$ steht und setzen in die Normalvektordarstellung der Geraden t ein:

$$\overrightarrow{MT} \cdot \vec{X} = \overrightarrow{MT} \cdot T$$

$$\begin{pmatrix} x_T - x_M \\ y_T - y_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T - x_M \\ y_T - y_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$$

$$x(x_T - x_M) + y(y_T - y_M) = x_T(x_T - x_M) + y_T(y_T - y_M)$$

Nach Umformen und herausheben erhalten die Tangentengleichung:

$$(x_T - x_M)(x - x_T) + (y_T - y_M)(y - y_T) = 0$$

Wenn wir nun $r^2 = (x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2$ zu dieser Gleichung addieren, erhalten wir:

$$(x_T - x_M)(x - x_T) + (y_T - y_M)(y - y_T) + (x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2 = r^2$$

Wir formen weiter um:

$$(x_T - x_M)\big((x - x_T) + (x_T - x_M)\big) + (y_T - y_M)\big((y - y_T) + (y_T - y_M)\big) = r^2$$

Und wir erhalten die sogenannte **Spaltform der Tangentengleichung**:

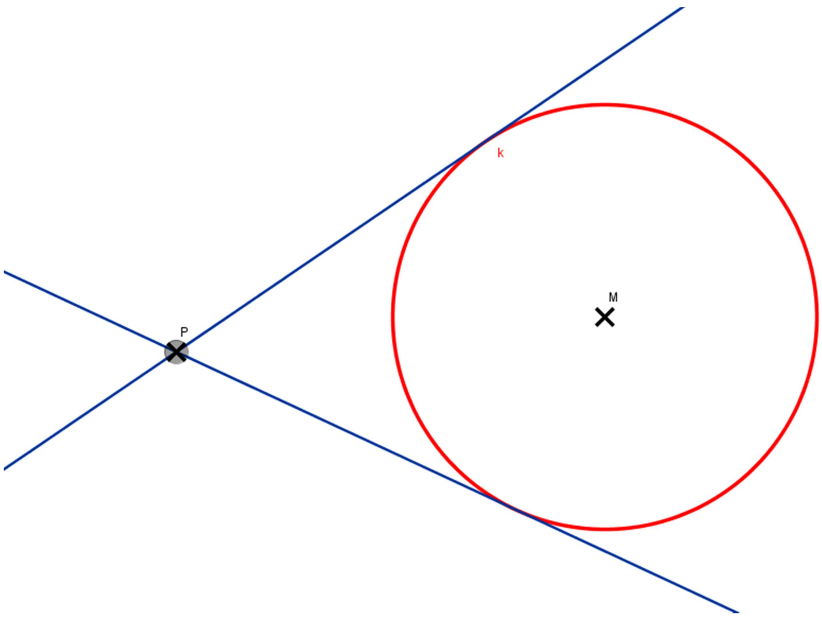
$$(x_T - x_M)(x - x_M) + (y_T - y_M)(y - y_M) = r^2$$

Tangente von einem Punkt außerhalb des Kreises

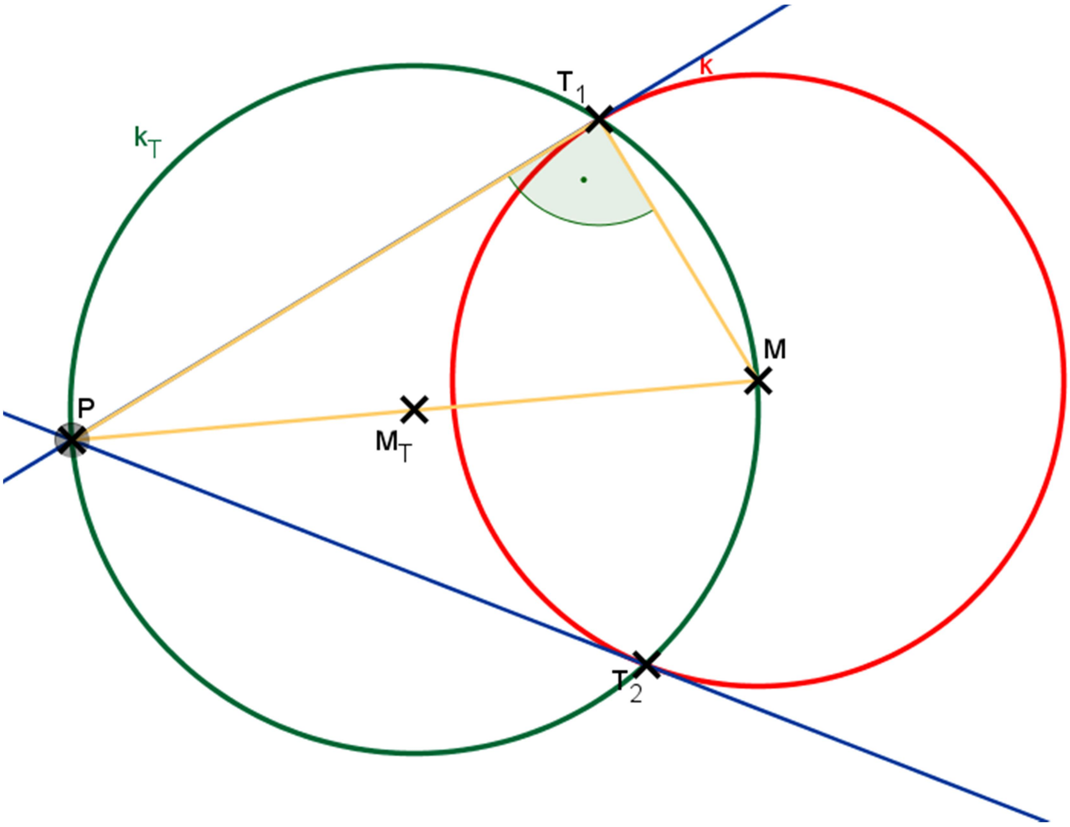
Wir kennen den Kreis k mit Mittelpunkt $M = (x_M|y_M)$ und einen Punkt $P = (x_P|y_P)$, welcher außerhalb des Kreises liegt (d.h. $|MP| > r$). Gesucht ist die Gerade t, sodass t eine Tangente von k ist und durch P verläuft.

Um dieses Problem lösen zu können, müssen wir uns den Satz des Thales in Erinnerung rufen: Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke AB, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.

Wir wollen folgendes Ergebnis erhalten:



Da wir den Satz des Thales kennen und wissen, dass jeder Tangente eines Kreises normal zum Radiusvektor steht, können wir mithilfe eines Kreises durch M und P mit Durchmesser $|MP|$ folgendes erkennen:



Aufgrund des Satz des Thales, können wir erkennen, dass die Schnittpunkte dieser beiden Kreise (k und k_T) die Berührpunkte der beiden Tangenten sind. Diese Berührpunkte T_1 und T_2brauchen wir nur mehr in die Spaltform der Tangentengleichung einsetzen und wir sind fertig.

Wir stellen die Gleichung von k_T auf. Wir wissen, dass $M_T = \frac{P+M}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_P + \ x_M \\ y_P + \ y_M \end{pmatrix}$ und $r_T = \frac{|PM|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}$ und daraus folgt:

$$k_T\colon \left(x - \frac{1}{2}(x_P + \ x_M)\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y_P + \ y_M)\right)^2 = \frac{1}{4}(x_M - x_P)^2 + \frac{1}{4}(y_M - y_P)^2$$

Nach ausmultiplizieren und umformen erhalten wir:

$$k_T\colon x^2 + y^2 + x_M x_P + y_M y_P - x(x_P + x_M) - y(y_P + y_M) = 0$$

Um die Kreise zu schneiden setzen wir k_T mit $k\colon (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$ gleich:

$$x^2 + y^2 + x_M x_P + y_M y_P - x(x_P + x_M) - y(y_P + y_M) = \ (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2$$

Nach einigen weiteren Umformungen (Übung!) kommen wir auf folgende Form:

$$(x_P - x_M)(x - x_M) + \ (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$$

Obige Gleichung beschreibt die Gerade durch die beiden Berührpunkte T_1 und T_2. Diese Gerade ist nun nur mehr mit dem Kreis k zu schneiden.