Christian Kathrein

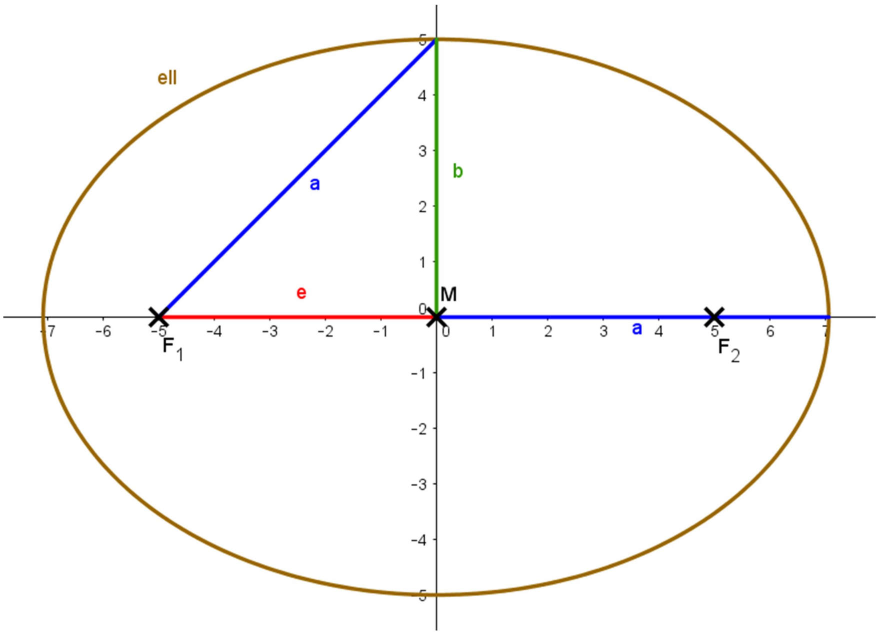
Die Ellipsengleichung

Im Folgenden wollen wir die allgemeine Gleichung der Ellipse im $\mathbb{R}^2$ in 1.Hauptlage herleiten.

Die Definition der Ellipse ell mit festen Brennpunkten F_1 und F_2 sowie der Hauptachsenlänge a ist:

$$ell = \{X \in \mathbb{R}^2 | \, |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$$

Aus folgender Grafik entnehmen wir entsprechende Werte:



Aus der Grafik erkennen wir, dass $F_1 = (-e|0)$ und $F_2 = (e|0)$. Daraus folgt, dass für alle Punkte $X = (x|y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\overrightarrow{XF_1} = -\binom{x+e}{y} \; und \; \overrightarrow{XF_2} = -\binom{x-e}{y}$$

Draus folgt:

$$|XF_1| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \; und \; |XF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Nun setzen wir in die Definition ein und berechnen:

$$|XF_1| + |XF_2| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(x+e)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\ (x-e)^2+y^2$$

$$(x+e)^2-\ (x-e)^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$4ex-4a^2=\ -4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$a^2-ex=a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$e^2x^2-2a^2ex+a^4=a^2(x^2-2ex+e^2+y^2)$$

$$e^2x^2-2a^2ex+a^4=a^2x^2-2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2$$

$$e^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2e^2+a^2y^2$$

$$a^4-a^2e^2-a^2y^2=a^2x^2-e^2x^2$$

$$a^2(a^2-e^2)-a^2y^2=x^2(a^2-e^2)$$

Nun wissen wir, dass $b^2=a^2-e^2$ und setzen in die Gleichung ein:

$$a^2b^2-a^2y^2=x^2b^2$$

Und nach umformen erhalten wir:

$$b^2x^2+a^2y^2=\ a^2b^2 \quad bzw. \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$