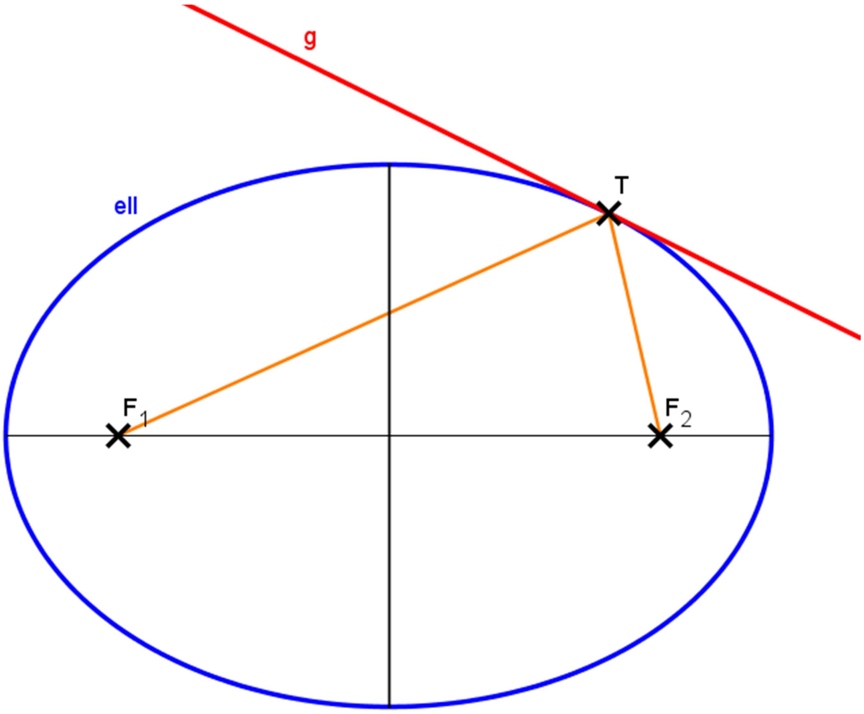
Christian Kathrein

Die Berührbedingung der Ellipse

Wir wollen uns überlegen, welche Bedingung erfüllt sein muss, um zu bestimmen ob eine Gerade g eine Tangente einer Ellipse ell ist.

Dazu sehen wir uns folgende Skizze an:



Wir nehmen die Gerade sei $g: y = kx + d$ und setzen in die Ellipsengleichung ein (d.h. wir berechnen die Schnittpunkte der Gerade und der Ellipse):

$$b^2x^2 + a^2(kx + d)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2kxd + a^2d^2 - a^2b^2 = 0$$

$$x^2(b^2 - a^2k^2) + x(2a^2kd) + (a^2d^2 - a^2b^2) = 0$$

Nun setzen wir in die quadratische Lösungsformel ein und berechnen x:

$$x_{1,2} = \frac{-2a^2kd \pm \sqrt{(2a^2kd)^2 - 4(b^2 - a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2)}}{2(b^2 - a^2k^2)}$$

Da wir annehmen, dass g eine Tangente ist, gibt es nur einen Schnittpunkt, also muss die Diskriminante $D = 0$ sein.

$$D = (2a^2kd)^2 - 4(b^2 - a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2) = 0$$

$$4a^4d^2k^2 - 4(a^2b^2d^2 - a^2b^4 - a^4d^2k^2 + a^4b^2k^2) = 0$$

$$a^4d^2k^2 - a^2b^2d^2 + a^2b^4 + a^4d^2k^2 - a^4b^2k^2 = 0$$

$$a^2b^2(d^2 - b^2 + a^2k^2) = 0$$

Nach Division durch a^2b^2 erhalten wir die Berührbedingung:

$$d^2 = a^2k^2 + b^2$$