Folgen und Reihen

Petra Grell, WS 2004/05

Folgen

1 Einführung

Beispiel 1.1. Setze fort:

$1, 2, 3, \dots \quad \longrightarrow \quad 4, 5, 6, \dots$ natürliche Zahlen

$\longrightarrow \quad 5, 8, 13, \dots$ Fibonacci-Zahlen

Wir können nicht eindeutig sagen, wie es weiter geht.

Beispiel 1.2. Setze fort.

$E, Z, D, V, \dots$

$O, T, T, F, \dots$

$M, D, M, D, \dots$

Lösung: F, S, S Warum?

Wir haben eine Aneinanderreihung von Zahlen $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle$.

Die 1. Zahl nennen wir x_1, die 2. Zahl nennen wir x_2, die 3. Zahl nennen wir x_3, usw. Die n-te Zahl nennen wir x_n.

Die Zahl die bei x steht, nennt man **Index**. Er gibt an, wie viele Zahlen wir bereits hingeschrieben haben.

z.B.: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8, x_6 = 13, \dots$$

Diese Zahlenschlange $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle$ nennt man **Zahlenfolge**. Diese kann endlich oder unendlich sein.

x_1 heißt das **erste Glied** der Folge, x_2 das **zweite Glied**, usw. x_n heißt das **n-te Glied** der Folge, auch **„allgemeines Glied“**.

n ist eben der **Index**. Dieser zeigt an, das wievielte Glied der Folge gemeint ist. n ist eine natürliche Zahl ($n = 1, 2, 3, \dots$). Jedem n wird genau ein Folgenglied x_n zugeordnet.

Für die Folge $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle$ schreiben wir zur Abkürzung $\langle x_n \rangle$.

Definition 1.3. Eine Abbildung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen nennt man eine unendliche **Folge** von reellen Zahlen. Der natürlichen Zahl n wird die reelle Zahl x_n zugeordnet.

Wie man z.B. aus IQ-Tests oder ähnlichem kennt, gibt es für viele Folgen ein Bildungsgesetz. Es gibt an, wie die Glieder der Folge zu berechnen sind.

z.B.: 1, 3, 5, 7, ... man addiert immer 2

Darstellungsarten

1. verbal: „Addiere stets 2, beginnend bei 1.“
   „Alle ungeraden natürlichen Zahlen.“

   Beides liefert $\langle 1,\ 3,\ 5,\ 7, \dots \rangle$

2. explizit: Gibt einen Term zur Berechnung des n-ten Gliedes x_n aus dem Index n an.

   z.B.: $x_n = 2n - 1 \quad \longrightarrow \quad \langle 1,\ 3,\ 5,\ 7, \dots \rangle$
   z.B.: $x_n = (-1)^n \quad \longrightarrow \quad \langle -1,\ 1,\ -1,\ 1, \dots \rangle$

3. rekursiv: Gibt an, wie ein Folgenglied aus dem (den) vorhergehenden Folgenglied(ern) zu bilden ist. Die Folge kann dann schrittweise berechnet werden. Die benötigten Anfangsglieder $x_1,\ x_2, \dots$ müssen angegeben werden, da diese aus der Rekursion nicht berechnet werden können.

   z.B.: $x_{n+1} = x_n + 2,\ x_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad \langle 1,\ 3,\ 5,\ 7, \dots \rangle$
   z.B.: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$
   $\longrightarrow \quad \langle 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \dots \rangle$

ACHTUNG: Es gibt nicht immer alle Darstellungsarten (insbesondere sind sie nicht immer einfach zu bestimmen).

ACHTUNG: Reihenfolge der Aufzählung der Folge ist wichtig!

Folge $\langle x_n \mid n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots \rangle$ und

Menge $\{x_n \mid n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$ der Zahlen dieser Folge

sind im allgemeinen NICHT gleich!

z.B.: $\langle 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \dots \rangle$

Menge: $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \dots\} = \{4,\ 6,\ 2,\ 8,\ \dots\}$

ABER: $\langle 2,\ 4,\ 6,\ 8, \dots \rangle \neq \langle 4,\ 6,\ 2,\ 8,\ \dots \rangle$

(anderes Bildungsgesetz)

Als nächstes werden wir zwei spezielle Folgen behandeln: die arithmetische Folge und die geometrische Folge.

2 Arithmetische Folge

Ein gewisser Anfangswert wird laufend um einen festen Wert vermehrt oder vermindert.

z.B.: $\langle 1,\ 3,\ 5,\ 7, \dots \rangle$ 2 dazu, beginnend bei 1

z.B.: $\langle 6,\ 3,\ 0,\ -3, \dots \rangle$ 3 weg, beginnend bei 6

Definition 2.1. Eine Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ heißt **arithmetische Folge**, wenn die *Differenz* je zweier aufeinanderfolgender Glieder *konstant* ist, d.h. für jedes n gilt:

$$x_{n+1} - x_n = d \qquad \text{(konstant)}$$

d ... Differenz der Folge

rekursive Darstellung: x_1 gegeben

$$x_{n+1} = x_n + d$$

explizite Darstellung: $x_n = x_1 + (n-1) \cdot d$

Beispiel 2.2. $\langle x_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$ ist arithmetische Folge, denn:

$$x_{n+1} = 2(n+1) - 7 = 2n + 2 - 7 = 2n - 5$$
$$x_n = 2n - 7$$
$$x_{n+1} - x_n = 2n - 5 - (2n - 7) = 2 \quad \text{konstant mit d=2}$$

3 Geometrische Folge

Ein gewisser Anfangswert wird laufend um einen festen Wert vervielfacht (multipliziert) oder reduziert (dividiert).

z.B.: $\langle 3,\ 12,\ 48,\ 192, \dots \rangle$ mal 4, beginnend bei 3

z.B.: $\langle 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}, \dots \rangle$ durch 2, beginnend bei 1

Definition 3.1. Eine Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ heißt **geometrische Folge**, wenn der *Quotient* je zweier aufeinanderfolgender Glieder *konstant* ist, d.h. für jedes n gilt:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = q \qquad \text{(konstant)}$$

q ... Quotient der Folge

rekursive Darstellung: x_1 gegeben

$$x_{n+1} = x_n \cdot q$$

explizite Darstellung: $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$

geometrisches / exponentielles Wachstum:

wenn sich in gleichen Zeiten die vorhandene Menge stets um den gleichen Faktor vervielfacht und, wenn dem Wachstum prinzipiell keine Schranken gesetzt sind.

4 Monotonie von Folgen

Frage: Liegen Regelmäßigkeiten im Wachstumsverhalten vor oder wächst und fällt die Folge zufällig?

Definition 4.1. Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt

(1) **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \leq x_{n+1}$$

(2) **streng monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n < x_{n+1}$$

(3) **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \geq x_{n+1}$$

(4) **streng monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n > x_{n+1}$$

Definition 4.2. Stimmen alle Glieder einer Folge überein, so heißt die Folge **konstante Folge**.

Folgen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißen **alternierende Folgen**.

Beispiel 4.3. Behauptung: $\langle \frac{2n-1}{n+1} \rangle$ ist streng monoton wachsend.
Zeige dies!

Beweis. zu zeigen: $x_n < x_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &< x_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+1} &< \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} \\ \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+1} &< \frac{2n+1}{n+2} \\ \Leftrightarrow (2n-1)(n+2) &< (2n+1)(n+1) \\ \Leftrightarrow 2n^2+3n-2 &< 2n^2+3n+1 \\ \Leftrightarrow -2 &< 1 \quad \text{w.A. } \forall\, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung stimmt. ☐

5 Beschränktheit von Folgen

z.B.: $\langle 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \rangle$ ist nach oben unbeschränkt, da sie unendlich wächst.

Sie ist jedoch nach unten beschränkt.

mögliche untere Schranken: -10, -1, 0, 1, und viele andere

Definition 5.1. Eine Folge x_n heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl b gibt, sodass alle Glieder x_n kleiner oder gleich b sind:

$$x_n \leq b \quad \forall\, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

b heißt **obere Schranke**.

Graphisch:

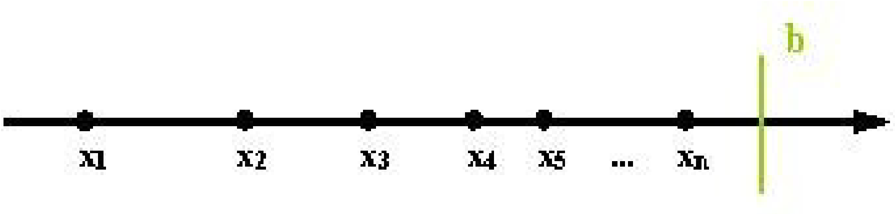


Abbildung 1: b ist obere Schranke

Definition 5.2. Eine Folge x_n heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl c gibt, sodass alle Glieder x_n größer oder gleich b sind:

$$x_n \geq c \quad \forall\, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

c heißt **untere Schranke**.

Graphisch:

ACHTUNG: Erfüllt auch nur 1 Folgenglied die Eigenschaft nicht, d.h., wenn es ein Folgenglied x_i gibt, sodass $x_i > b$ bzw. $x_i < c$, so ist b keine obere bzw. c keine untere Schranke! Denn wir haben ja ein Element gefunden, welches darüber bzw. darunter liegt.

Beispiel 5.3. Behauptung: 1 ist obere Schranke von $\langle \frac{6n-2}{4n+1} \rangle$

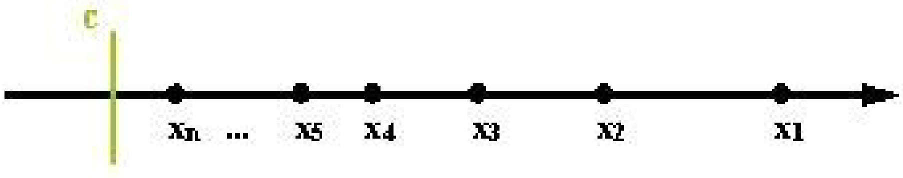


Abbildung 2: c ist untere Schranke

Beweis. zu zeigen: $1 \geq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, d.h. $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$1 \geq \frac{6n-2}{4n+1} \qquad | \cdot (4n+1)$$

$$4n+1 \geq 6n-2 \qquad | -4n \quad | +2$$

$$3 \geq 2n \qquad | : 2$$

$$n \leq \frac{3}{2} = 1.5$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen n, die die Ungleichung $n \leq 1.5$ erfüllen, besteht nur aus $n = 1$. Wir benötigen aber, dass $1 \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Somit ist 1 keine obere Schranke. ☐

Beispiel 5.4. Behauptung: $\frac{1}{2}$ ist untere Schranke von $\langle \frac{8n+1}{6n-3} \rangle$

Beweis. zu zeigen: $\frac{1}{2} \leq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, d.h. $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{8n+1}{6n-3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq -\frac{1}{2}$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen n, die die Ungleichung $n \geq -\frac{1}{2}$ erfüllen, ist gerade $\mathbb{N}$. Also gilt die Ungleichung $\frac{1}{2} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ist untere Schranke. ☐

6 Konvergenz von Folgen

Beispiel 6.1. Gegeben sei eine Folge a_n mit $a_n = \frac{1}{n}$.

Einige Glieder sind:

$a_1 = 1$
$a_2 = \frac{1}{2} = 0.5$
$a_3 = \frac{1}{3} = 0.\dot{3}$
$a_4 = \frac{1}{4} = 0.25$
$\vdots$
$a_{1999} = \frac{1}{1999} = 0.00050025$
$a_{2000} = \frac{1}{2000} = 0.0005$
$a_{2001} = \frac{1}{2001} = 0.00049975$
$a_{2002} = \frac{1}{2002} = 0.0004995$
$\vdots$
$a_{20000} = 0.00005$
$a_{123.456.789} = 0.0000000081$

Man könnte sagen, dass die Glieder a_n mit wachsendem Index n der Zahl $a = 0$ „immer näher kommen“.

Betrachten wir nun den Abstand zwischen a_n und a:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Hiernach gilt z.B.:

$$|a_n - a| < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \iff n > 2$$

Dies bedeutet, dass die Folgenglieder a_n für $n > 2$, also ab a_3, weniger als $\frac{1}{2}$ von $a = 0$ entfernt sind.

$$|a_n - a| < 10^{-3} \iff \frac{1}{n} < 10^{-3} \iff n > 10^3$$

Zu der „Abstandszahl“ $\varepsilon = 10^{-3} = (0.001)$ können wir also den Index $n_0 = 1001$ wählen und dann gilt:

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_0}$$

Dies bedeutet, dass die Folgenglieder a_n für $n > 1000$, also ab a_{1001}, weniger als 10^{-3} von $a = 0$ entfernt sind.

Was heißt <u>Abstand</u>, was bedeutet $|a_n - a| < \varepsilon$?

$|x| < \varepsilon$ heißt:

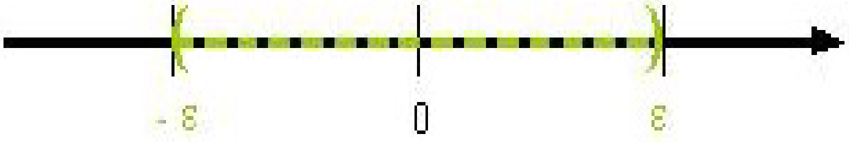


Abbildung 3: ε-Umgebung von 0

Die grün eingezeichneten Punkte sind genau die Menge $\{x \in \mathbb{R} : |x| < \varepsilon\}$.
Das entspricht dem Intervall $(-\varepsilon\ ,\ \varepsilon)$.

Definition 6.2. Das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ heißt eine ε-**Umgebung** von 0. Wir schreiben:

$$(-\varepsilon, \varepsilon) = \{x : -\varepsilon < x < \varepsilon\} = \{x : |x| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(0)$$

$|a_n - a| < \varepsilon$ heißt:

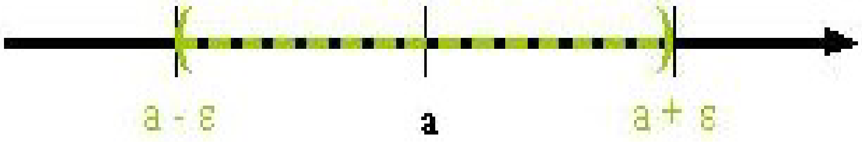


Abbildung 4: ε-Umgebung von a

Die grün eingezeichneten Punkte sind genau die Menge $\{a_n\ : |a_n - a| < \varepsilon\}$.
Das entspricht dem Intervall $(a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon)$.

Definition 6.3. Das Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ heißt eine ε-**Umgebung** von a. Wir schreiben:

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{a_n : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\} = \{a_n : |a_n - a| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(a)$$

Entscheidend ist nun, dass es zu jeder (insbesondere zu jeder noch so kleinen) positiven Zahl ε einen Index n_0 gibt, sodass

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0}$$

Eine Folge wie diese, die sich immer mehr 0 annähert, bekommt einen eigenen Namen.

Definition 6.4. Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **Nullfolge**, wenn es zu jedem (auch noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle späteren (größeren) Indizes $n > n_0$ gilt:

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

Ganz formal schreibt man:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \ : \ |x_n - 0| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0$$

Die Eigenschaft, dass die Folgenglieder x_n mit wachsendem Index n einer Zahl x „immer näher kommen“, d.h. der Abstand $|x_n - x|$ zwischen x_n und x wird immer kleiner (nämlich beliebig klein, er kann auch 0 sein), erhält ebenfalls einen Namen.

Definition 6.5. Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **konvergent** gegen eine Zahl x für $n \to \infty$, wenn gilt:
Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle späteren (größeren) Indizes $n > n_0$ gilt:

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Formal:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0\ :\ |x_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\ n > n_0$$

Die Zahl x nennt man **Grenzwert**.

Formal:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$n \to \infty$ heißt, dass n immer größer wird, genau das wollen wir.

Folgen, die keinen Grenzwert haben, heißen **divergent**.

Anders formuliert: Eine Folge $\langle x_n \rangle$ konvergiert gegen x für $n \to \infty$, wenn in jeder (auch noch so kleinen) ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x fast alle Glieder der Folge (bis auf endlich viele) liegen.

denn: $\boxed{\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0\ :\ |x_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\ n > n_0}$

heißt auch: ab einem gewissen n_0 erfüllen alle weiteren Folgenglieder die Ungleichung $|x_n - x| < \varepsilon$.

heißt auch: fast alle, d.h. bis auf höchstens endlich viele (das sind die Glieder vor dem Index n_0), der Folgenglieder x_n erfüllen die Ungleichung $|x_n - x| < \varepsilon$, d.h. sie nähern sich beliebig nahe an.

Bemerkung 6.6. Betrachten wir die konstante Folge $\langle 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \rangle$. Man könnte sagen, dass sich diese Folge der Zahl 1 beliebig nahe annähert, da sie ja sogar immer diese Zahl 1 ist. Man darf also nicht fälschlicherweise glauben, dass eine Folge ihren Grenzwert nicht annehmen kann.

Behauptung: 1 ist Grenzwert dieser Folge.

zu zeigen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0\ :\ |x_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\ n > n_0$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \; : \; |1-1| < \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \; : \; 0 < \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0$$

In dieser Ungleichung kommt gar kein n mehr vor und $\varepsilon > 0$ gilt aber immer, da dies unsere Voraussetzung ist.

Somit ist 1 Grenzwert der konstanten Folge $\langle 1,\ 1,\ 1,\ \dots \rangle$.

Beispiel 6.7. Beweise: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+5} = 0$ $\qquad$ $\displaystyle x_n = \frac{3}{n+5},\ x = 0$

Beweis. zu zeigen: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \; : \; |x_n - x| < \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0$

Setzen ein: $\displaystyle\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \; : \; \left|\frac{3}{n+5} - 0\right| < \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0$

$$\left|\frac{3}{n+5} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{3}{n+5}\right| < \varepsilon \iff \frac{3}{n+5} < \varepsilon \iff$$

$$3 < n \cdot \varepsilon + 5 \cdot \varepsilon \iff 3 - 5 \cdot \varepsilon < n \cdot \varepsilon \iff \frac{3-5\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

D.h. für $n > \frac{3-5\varepsilon}{\varepsilon}$ gilt die Ungleichung $\left|\frac{3}{n+5} - 0\right| < \varepsilon$.

z.B. für $\varepsilon = 0.01 \;\; \Rightarrow \;\; n > \frac{3-5\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{3-5\cdot 0.01}{0.01} = 295 \Rightarrow n_0 = 295.$

Man sieht, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index erhält (indem man jeden beliebigen Wert für ε in die letzte Ungleichung einsetzt), der angibt, ab welchem Folgenglied die Ungleichung $|x_n - x| < \varepsilon$ erfüllt ist. Das heißt, dass die Folgenglieder nach dem Glied x_{n_0} weniger als ε vom Grenzwert x entfernt sind. □

Bemerkung 6.8. Dass eine Folge keinen Grenzwert hat, also divergent ist, heißt, dass es keinen eindeutigen Wert gibt, gegen den die Folge strebt.

Beispiele:

1) $\langle -2,\ +2,\ -2,\ +2,\ -2,\ \dots \rangle$ springt immer zwischen 2 und -2 hin und her.

   Wir könnten behaupten, dass z.B. $x = 2$ ein Grenzwert der Folge ist. Wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so können wir keinen Index n_0 finden, sodass $|x_n - 2| < \frac{1}{2}$, denn wenn das Folgenglied gerade -2 ist, so erhalten wir $|-2-2| = 4 < \frac{1}{2}$. Dies ist aber ein Widerspruch. Ist das Folgenglied gerade 2, so erhalten wir zwar ein wahre Aussage, nämlich $0 < \frac{1}{2}$, wir benötigen aber, dass ab einem gewissen Zeitpunkt (ab dem Index n_0)

alle Folgenglieder in der ε-Umgebung sind, und das zu jedem beliebigen ε. Somit kann $x = 2$ und analog auch $x = -2$ kein Grenzwert der Folge sein.

Damit eine Zahl x Grenzwert einer Folge $\langle x_n \rangle$ ist, muss man zu jedem beliebigen ε so einen Index n_0 finden. Gibt es auch nur ein einziges ε, für das wir kein n_0 finden, sodass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle nachfolgenden Glieder, so ist x kein Grenzwert der Folge.

2) $\langle 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \dots \rangle$ ist die Folge $\langle 3^n \rangle$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$.

Je weiter wir in der Folge nach hinten wandern, das heißt n größer und größer machen, umso größer werden die Folgenglieder. Das Wachsen hört nie auf. Ganz im Gegenteil, es wird immer stärker.

Man kann sagen, dass die Folgenglieder „gegen ∞ streben“. ∞ ist aber keine Zahl, somit haben wir eine Folge, die keinen echten Grenzwert hat, also ist sie divergent.

7 Berechnung von Grenzwerten

Eine sehr wichtige Folge ist $\langle \frac{1}{n} \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sie ist „die“ Nullfolge und wird zur Berechnung von Grenzwerten anderer Folgen herangezogen.

Beispiel 7.1. $\langle \frac{n-1}{n} \rangle$, $x_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

Da $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt, dass x_n gegen $x = 1$ strebt. Dies ist aber nur eine Behauptung!

Müssen unsere Vermutung auch beweisen:

Beweis. wir geben ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor und zeigen, dass ab einem gewissen n_0 alle Glieder der Folge $\langle x_n \rangle$ die Bedingung $|x_n - 1| < \varepsilon$ erfüllen. Dieses n_0 kann man leicht berechnen:

$$|x_n - x| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\iff \left| 1 - \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Das heißt $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. z.B.: für $\varepsilon = 0.01$ erhält man $n_0 = 100$. $\square$

Beispiel 7.2. $\langle \frac{3n+2}{2n-1} \rangle$, $x_n = \frac{3n+2}{2n-1}$

Diesen Ausdruck können wir nicht mehr so leicht umformen wie im Beispiel davor. Wir wissen aber schon folgendes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{denn:} \quad n^2 > n \text{ und somit } \tfrac{1}{n^2} < \tfrac{1}{n}$$

Nun ist die „größere" Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ bereits eine Nullfolge, somit ist $\langle \frac{1}{n^2} \rangle$ ebenfalls eine Nullfolge (ihre Werte gehen noch schneller gegen 0, als die von $\langle \frac{1}{n} \rangle$).

Frage: Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n}$? $\quad \frac{5}{n} = 5 \cdot \frac{1}{n}$

Durch den Faktor 5 wird zwar der Wert von $\frac{1}{n}$ verfünffacht, das Streben gegen 0 von $\langle \frac{1}{n} \rangle$ lässt sich dadurch aber trotzdem nicht aufhalten.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$$

Diese Kenntnisse wollen wir jetzt verwenden, um $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{2n-1}$ zu berechnen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+2}{n}}{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Hier haben wir im ersten Schritt Nenner und Zähler durch n dividiert. Dieser Schritt ändert nichts am Bruch, da wir den Bruch nur mit $\frac{1}{n}$ erweitert haben. Im vorletzten Schritt, haben wir verwendet, dass $\langle \frac{1}{n} \rangle$ und alle ihre Vielfachen Nullfolgen sind. Außerdem gilt $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$, da 3 nicht mehr von n abhängt. Egal welchen Wert n annimmt, 3 bleibt 3.

Wieder müssen wir diese Behauptung beweisen, da wir die Rechenregeln, die wir gerade verwendet haben, noch nicht bewiesen haben. Dies passiert in der Vorlesung Analysis 1.

Beweis. wir geben $\varepsilon > 0$ vor und berechnen n_0 wie immer:

$$\left| x_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6n+4-6n+3}{4n-2} \right| = \left| \frac{7}{4n-2} \right| = \frac{7}{4n-2} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{7}{\varepsilon} < 4n-2 \iff \frac{\frac{7}{\varepsilon}+2}{4} < n \iff n > \frac{7+2\varepsilon}{4\varepsilon} \implies n_0 = \frac{7+2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

$\square$

z.B.: $\varepsilon = 0.01 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{702}{4} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 176$

Beispiel 7.3. $\langle \frac{2n^2-3n+1}{n^3+2} \rangle$

Wieder erweitern wir den Bruch. Dieses Mal mit $\frac{1}{n^3}$, denn n^3 ist die höchste Potenz von n, die vorkommt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2-3n+1}{n^3}}{\frac{n^3+2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^3}} = \frac{0-0+0}{1+0} = 0$$

Regel: Wir verwenden, dass $\langle \frac{1}{n} \rangle$ eine Nullfolge ist. Um diese Folge bzw. Potenzen und Vielfach von ihr ($\frac{1}{n^2}, \ \frac{2}{n^3}, \ \ldots$) ins Spiel zu bringen, müssen wir den Bruch mit Potenzen von $\frac{1}{n}$ erweitern. Dazu verwendet man die „höchste“ auftretende Potenz von n aus Zähler und Nenner (in Beispiel 7.3 war das n^3).

8 Die Eulersche Zahl e

$e = 2.718281828459045\ldots$

e ist die Zahl, die Grenzwert der Folge $\left\langle \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ ist.

Definition von $\boxed{e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Sehen wir uns ein paar Folgenglieder an:

$n = 1: \ \ x_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2$
$n = 2: \ \ x_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$
$n = 3: \ \ x_3 = (1+\frac{1}{3})^3 = 2.370370370\ldots$
$n = 4: \ \ x_4 = (1+\frac{1}{4})^4 = 2.44140625$
$n = 5: \ \ x_5 = (1+\frac{1}{5})^5 = 2.48832$
$n = 10: \ \ x_{10} = (1+\frac{1}{10})^{10} = 2.5937424601\ldots$
$n = 50: \ \ x_{50} = (1+\frac{1}{50})^{50} = 2.69158802907\ldots$
$n = 100: \ \ x_{100} = (1+\frac{1}{100})^{100} = 2.70481382942\ldots$ 1. Dezimalstelle
$n = 500: \ \ x_{500} = (1+\frac{1}{500})^{500} = 2.71556852065\ldots$
$n = 4822: \ \ x_{4822} = (1+\frac{1}{4822})^{4822} = 2.71800001952\ldots$ 3. Dezimalstelle
$n = 766508: \ \ x_{766508} = (1+\frac{1}{766508})^{766508} = 2.71828000268\ldots$ 5. Dst.

Reihen

9 Einführung

Beispiel 9.1. Folge $\langle \frac{1}{10^n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots \rangle = \langle 1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots \rangle$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0.1,\ x_3 = 0.01,\ x_4 = 0.001,\ \dots$

Wir wollen die Folgenglieder nun zusammenzählen:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 1.111\cdots = 1.\dot{1}$

Definition 9.2. Sei $\langle x_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge reeller Zahlen. Verbindet man die Folgenglieder durch ein Pluszeichen, so entsteht eine **Reihe**. Diese ist **endlich**, wenn man nur endlich viele Glieder der Folge addiert und **unendlich**, wenn man alle Folgenglieder zusammenzählt.

Die 3 Punkte am Ende von $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots$ heißen, dass es unendlich lang weitergeht, das heißt man hört nie auf mit dem Summieren.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{100}$ heißt, dass man die ersten 100 Glieder addiert. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_m$ heißt, dass die ersten m Glieder aufsummiert werden.

Kürzere Schreibweise:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = \sum_{i=1}^{100} x_i$$

$\sum$ ist das Summenzeichen (griechisch: sigma)

i ist der Laufindex. Unter dem $\sum$ steht, wo i zu laufen beginnt, nämlich bei $i = 1$. Oberhalb von $\sum$ steht, bis wohin i läuft, hier bis 100.

wichtig: Der Laufindex i muss auch nach dem Summenzeichen $\sum$ im Summanden vorkommen, denn nach $\sum$ steht, was aufsummiert wird, hier x_i für das jeweilige i. Würden wir z.B. $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_n$ schreiben so würde dies $x_n + x_n + x_n + \cdots + x_n$ (100 mal x_n addiert) bedeuten. Das wollen wir aber normalerweise nicht, wenn wir Folgenglieder aufsummieren.

Bei $i = 1$ haben wir x_1, bei $i = 2$ haben wir x_2, welches zu x_1 dazugezählt wird, also $x_1 + x_2$. Bei $i = 3$ kommt x_3 zu $x_1 + x_2$ dazu. Somit erhalten wir

$x_1 + x_2 + x_3$, usw.
Das Ganze endet bei $i = 100$ und zu $x_1+x_2+\dots+x_{99}$, die wir bereits addiert haben, kommt noch x_{100} dazu. Also haben wir $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = \sum_{i=1}^{100} x_i$

allgemein: **endliche Summe:**

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + x_m$$

hier werden die ersten m Glieder aufsummiert (z.B. $m = 100$)

unendliche Summe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1} + \dots$$

hier werden alle Folgenglieder aufsummiert, das heißt m ist ∞. Die Summe bricht nie ab.

Summen können einen endlichen Wert annehmen oder unaufhaltsam immer größer (kleiner) werden oder unkontrolliert herumspringen.

Beispiel 9.3. verschiedene Summen

1) $x_n = n$, d.h. $\langle 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots \rangle$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty, \quad \text{da immer größere Zahlen dazukommen}$$

2) $x_n = (-2)^n$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - 512 = -342$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 682 \qquad \sum_{i=1}^{11} x_i = -1366$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 2730 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_i = -5462$$

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ kann nichts darüber sagen, da die Werte herumspringen

10 Arithmetische Reihe

Definition 10.1. Wenn $\langle x_n \rangle$ eine arithmetische Folge ist, nennt man die Summe $s_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ eine **endliche arithmetische Reihe**.

Summenformel:

$s_1 = 1+2+3+4+\cdots+98+99+100$ umschreiben (100 Summanden)

$s_1 = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)$

$s_1 = \quad 101 \quad + \quad 101 \quad + \quad 101 \quad + \cdots + \quad 101$

$s_1 = 101 \cdot 50 = 101 \cdot \frac{100}{2} = 5050$

$101 = 1 + 100$ „=“ $x_1 + x_m$, $50 = \frac{100}{2}$ „=“ $\frac{m}{2}$ $\Rightarrow$ $s_1 = (x_1 + x_m) \cdot \frac{m}{2}$

$s_2 = 2+4+6+8+\cdots+96+98+100$ umschreiben (50 Summanden)

$s_2 = (2+100)+(4+98)+(6+96)+\cdots+(50+52)$

$s_2 = \quad 102 \quad + \quad 102 \quad + \quad 102 \quad + \cdots + \quad 102$

$s_2 = 25 \cdot 102 = 102 \cdot \frac{50}{2} = 2550$

$102 = 2 + 100$ „=“ $x_1 + x_m$, $25 = \frac{50}{2}$ „=“ $\frac{m}{2}$ $\Rightarrow$ $s_2 = (x_1 + x_m) \cdot \frac{m}{2}$

Theorem 10.1. $$s_m = \sum_{i=1}^{m} x_i = (x_1 + x_m) \cdot \frac{m}{2}$$

Beweis. Siehe Lernpfad zu Folgen und Reihen. ☐

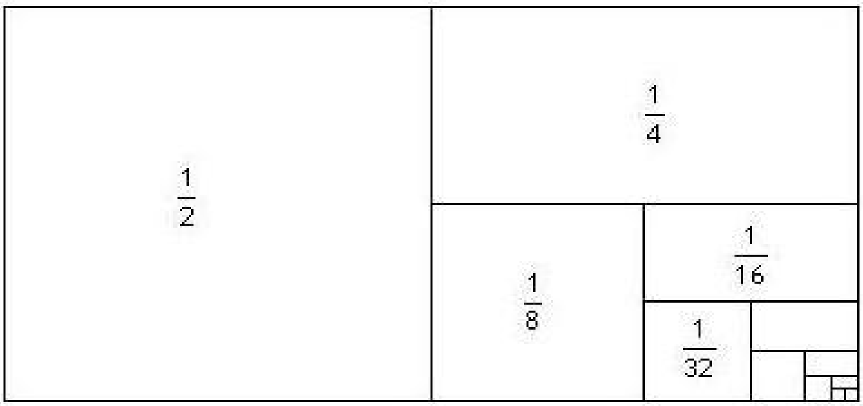
11 Geometrische Reihe & Konvergenz

Macht es überhaupt Sinn unendlich viele Zahlen zu addieren? Kann bei einer solchen Summe eine endliche Zahl heraus kommen oder steigt der Wert der Summe immer weiter (bis unendlich) an?

z.B.: $2 + 4 + 6 + \dots + 2m + \dots$ hat keinen endlichen Wert

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots$ ist die Reihe, die aus der Folge $\langle \frac{1}{2^n} \rangle$ für $n \geq 1$ entsteht.

Nehmen wir ein Blatt Papier. Sagen wir, dass dessen Gesamtfläche 1 ist. Nun teilen wir es in der Mitte. Wir wählen eine Hälfte aus und halbieren diese wieder, usw.



Wir können zwar in der Praxis irgendwann keine neuen Unterteilungen mehr einzeichnen, da der Stift zu grob und das Papier zu klein ist. Rein theoretisch könnten wir aber einen beliebig feinen Stift verwenden und den Ausschnitt des Blattes vergrößern, sodass wir immer und immer wieder neue Unterteilungen machen können, unendlich oft.

Zählen wir alle Unterteilungen zusammen, erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots$$

Wir sehen aber, dass die Gesamtsumme aller dieser kleinen Unterteilungen 1 ist, da wir ja nur unser Blatt (=1) immer wieder halbieren. Somit kommen wir nie über die Gesamtfläche des Blattes hinaus, wenn wir alle einzelnen Flächenstücke addieren.

Also hat diese unendliche Summe den Wert 1, also einen endlichen Wert.

Nimmt man z.B. die ersten 100 Summanden der Reihe, so bekommt man eine Teilsumme (Partialsumme):

$$s_{100} = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$$

Dies ist natürlich eine endliche Summe, da nur endlich viele Zahlen addiert werden.

Das ganze kann man natürlich mit beliebig vielen Summanden machen.

Definition 11.1. Addiert man die ersten m Summanden der Reihe, so erhält man die **m-te Partialsumme** (Teilsumme)

$$s_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$$

Wir können die Teilsummen $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_m,\ s_{m+1},\ \ldots$ als Folge schreiben:

$$\langle s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m,\ \ldots\rangle = \langle x_1,\ x_1 + x_2,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m,\ \ldots\rangle$$

In unserem Beispiel:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = 0.75$$
$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8} = 0.875$$
$$s_4 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16} = 0.9375$$
$$s_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = \tfrac{31}{32} = 0.96875$$
$$s_{10} = \tfrac{1023}{1024} = 0.9990234375$$
$$s_{30} = \tfrac{1073741823}{1073741824} = 0.9999999991$$

In jedem Schritt kommt zum vorherigen Ergebnis ein immer kleinerer Teil dazu.

s_{30} ist schon ganz nahe bei 1. Im nächsten Schritt kommt $\frac{1}{2^{31}} = \frac{1}{2147483648}$ dazu, was wohl wirklich schon sehr wenig ist. Auf 1 fehlt aber noch das andere $\frac{1}{2^{31}}$ (wir haben ja halbiert und eine Hälfte dazugezählt, die andere fehlt noch).

Machen wir das ewig weiter, so werden die dazukommenden Teile immer kleiner, die Summen nähern sich 1 immer weiter an (auf 1 fehlt bei s_m nur $\frac{1}{2^m}$), aber erreichen können diese Summen 1 nie. Warum?

> Betrachten wir unser Blatt Papier. Wir haben es halbiert, somit bleibt die Hälfte übrig. Diese Hälfte halbieren wir wieder und erhalten so $\frac{1}{4}$. Also fallen $\frac{3}{4}$ vom Papier für weitere Unterteilungen weg, da diese

> $\frac{3}{4}$ schon verwendet wurden. Das eine Viertel bleibt uns aber. Dieses wird wieder geteilt und es bleibt ein Achtel übrig.
>
> Das können wir immer wieder machen und jedes Mal bleibt ein Teil übrig, den wir weiter unterteilen. Dieser Teil wird zwar immer kleiner und kleiner, aber verschwinden wird er nie. Somit können wir auch nie die Gesamtfläche bekommen, aber wir sind ganz ganz nahe dran.

Man kann also sagen, dass die Folge unserer Teilsummen gegen 1 strebt oder, mathematisch gesagt, konvergiert.

Oder man sagt, dass 1 der Grenzwert (Limes) der Folge der Teilsummen ist:

$$\lim_{m\to\infty} s_m = 1$$

Definition 11.2. Der Grenzwert der Folge der Teilsummen heißt **Summe der unendlichen Reihe** und wird mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ bezeichnet.

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

$$s_m = x_1 + \cdots + x_m = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

Lassen wir nun m gegen ∞ gehen, erhalten wir:

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} s_m = x_1 + \cdots + x_m + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i}$$

Definition 11.3. Wenn also die Summe der Reihe endlich ist, heißt die Reihe **konvergent**.
Ist dies nicht der Fall, das heißt entweder wird der Wert der Summe in jedem Schritt größer (kleiner) ohne zu stoppen oder der Wert der Summe springt Schritt für Schritt unkontrollierbar herum, dann heißt die Reihe **divergent**.

Kehren wir zurück zu unserem Beispiel:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$$

Die Folge $\langle\frac{1}{2^n}\rangle$ ist eine geoemtrische Folge mit $q=\frac{1}{2}$ und Startwert $b=\frac{1}{2}$. Das heißt in jedem Schritt wird mit $\frac{1}{2}$ multipliziert, beginnend bei $\frac{1}{2}$.

Definition 11.4. Bilden die Summanden einer Reihe eine geometrische Folge $\langle b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots, bq^n,\ \ldots\rangle$, so nennt man diese Reihe **geoemtrische Reihe**.

Sie hat folgende Gestalt:

$$b+bq+bq^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}bq^i$$

Die Frage ist nun, ob alle geometrischen Reihen, wie unser Beispiel, eine endliche Summe besitzen.

endliche geometrische Reihen:

z.B.: Folge $\langle 3^n\rangle$ für $n\geq 0$

$1+3+9+27+\cdots+3^8=s_9$

diese hat bestimmt einen endlichen Wert.

Durch Eingeben in den Taschenrechner erhält man $s_9=9841$

Für 9 Glieder ist eine direkte Berechnung ja noch in relativ kurzer Zeit möglich. Was macht man aber, wenn man z.B. die ersten 1000 Folgenglieder addieren möchte?

Wir wenden einen kleinen „Trick“ an, um eine Formel für s_9 zu bekommen:

$$\left.\begin{array}{lr} 1+3+9+27+\cdots+3^8 \qquad\quad = s_9 & \mid\cdot 3 \\ \quad\ \ 3+9+27+\cdots+3^8+3^9=3\cdot s_9 & \\ \hline \end{array}\right\}-$$

$$1 \qquad\qquad\qquad\qquad -3^9=s_9-3\cdot s_9$$

$$\Longrightarrow\quad 1-3^9=s_9-3\cdot s_9$$

$$\Longrightarrow \quad s_9 = \frac{1-3^9}{1-3} = 9841$$

Dies können wir uns auch allgemein überlegen mit der geometrischen Folge $\langle b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots \rangle$

Wie sieht eine allgemeine geometrische Reihe aus?

$$\boxed{s_m = b + bq + bq^2 + bq^3 + \cdots + bq^{m-1}}$$

Die Teilsumme s_m muss m Summanden haben. Aus diesem Grund ist der letzte Summand bq^{m-1}, da wir ja bei bq^0 begonnen haben.

Wir verwenden wieder unseren „Trick“ und multiplizieren s_m mit q:

$$\left.\begin{array}{lrl} b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{m-1} & = s_m & |\cdot q \\ \quad bq + bq^2 + \cdots + bq^{m-1} + bq^m & = q \cdot s_m & \\ \hline b \qquad\qquad\qquad - bq^m & = s_m - q \cdot s_m & \end{array}\right\} -$$

$$\Longrightarrow \quad b - bq^m = s_m - q \cdot s_m$$

$$\Longrightarrow \quad s_m = \frac{b - bq^m}{1-q} = b \cdot \frac{1-q^m}{1-q}$$

s_m ist also die Summe der ersten m Glieder der geometrischen Folge $\langle b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots \rangle$

Theorem 11.1. *Summenformel der endlichen geometrischen Reihe*

$$s_m = b \cdot \frac{1-q^m}{1-q}$$

Beweis. Siehe Zeilen darüber. □

unendliche geometrische Reihen:

Für die endliche geometrische Reihe haben wir bereits eine Formel:

$$\boxed{s_m = b \cdot \frac{1-q^m}{1-q}}$$

Um zur unendlichen geoemtrischen Reihe zu kommen, müssen wir uns vorstellen, dass m schrittweise immer größer wird und schließlich über alle Grenzen wächst, das heißt m geht gegen ∞, kurz: $m \to \infty$.

Wie man aus der Formel für die endliche geometrische Reihe erkennen kann, hängt das Verhalten von s_m für $m \to \infty$ nur von dem Term q^m im Zähler ab.

Was kann mit q^m passieren, wenn m gegen ∞ geht? Was bedeutet das für unsere geometrische Reihe? Für unsere Überlegungen nehmen wir $b = 1$ an.

- $\underline{q = 1}$: $\quad q^m = 1^m = 1 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} bq^i = \sum_{i=0}^{\infty} b = 1 + 1 + \dots = \infty \qquad \text{da } b = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty}$$

- $\underline{q > 1}$: $\quad 1 < q \qquad | \cdot q$

$$q < q^2 \qquad | \cdot q$$

$$q^2 < q^3 \qquad \text{usw.}$$

$$\Rightarrow \;\; 1 < q < q^2 < q^3 < \dots$$

  Die Folge $\langle q^n \rangle$ ist monoton wachsend und wächst schließlich über alle Grenzen, da immer größere Potenzen genommen werden.

  Somit gilt: $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$

  Unsere Reihe sieht für $b = 1$ folgendermaßen aus:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

  Nun ist $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, somit muss auch die Reihe, die ja aus den Gliedern der Folge $\langle q^n \rangle$ besteht, gegen ∞ streben.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty}$$

  D.h. die geometrische Reihe $b + bq + bq^2 + \dots$ hat <u>keine</u> (endliche) Summe, wenn $q > 1$.

- <u>$0 < q < 1$:</u> $q < 1 \qquad | \cdot q > 0$

$$\begin{aligned} q^2 &< q \qquad | \cdot q \\ q^3 &< q^2 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \;\; 0 < \cdots < q^3 < q^2 < q < 1$$

Die Folge $\langle q^n \rangle$ ist monoton fallend und nähert sich 0 beliebig an, da der Nenner beliebig groß wird.

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1$

Daher folgt: $\boxed{\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = b \cdot \frac{1}{1-q} := s}$

D.h. die geometrische Reihe besitzt eine <u>endliche Summe s</u>.

- <u>$q < -1$:</u> z.B. $q = -2,\; b = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \langle (-2)^n \rangle = \langle 1,\; -2,\; 4,\; -8,\; \ldots \rangle$

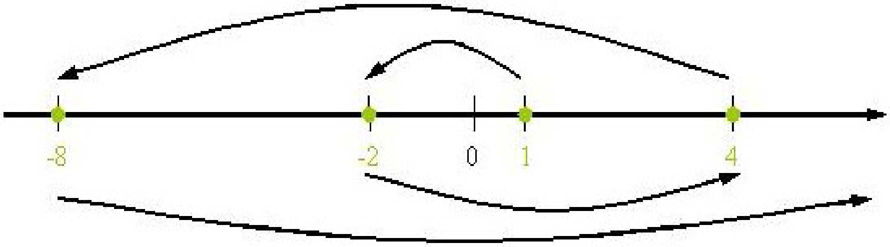


Abbildung 5: $q = -2,\; b = 1$

Man sieht, dass die Werte zwar immer zwischen + und − herumspringen, aber trotzdem immer mehr gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben, somit kann aber auch keine endliche Summe entstehen.

Daher folgt: $\boxed{\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = \infty}$

- <u>$-1 < q < 0$:</u> z.B. $q = -\frac{1}{2},\; b = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \langle \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rangle = \langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots \rangle$

Die Werte der Folge springen wieder zwischen + und − herum.

Jetzt werden sie aber immer kleiner, sie streben sogar gegen 0.

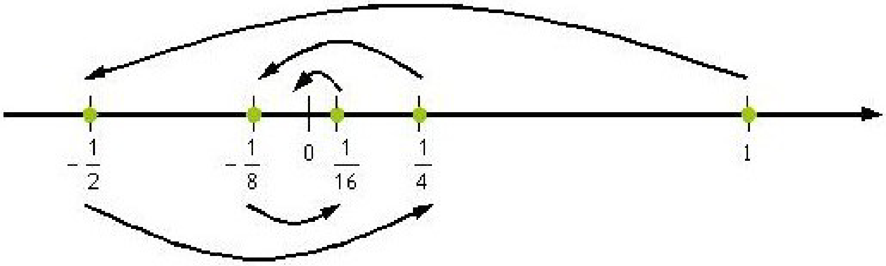


Abbildung 6: $q = -\frac{1}{2},\ b = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad s := \lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = b \cdot \frac{1}{1-q}$$

Das heißt wir haben hier wieder eine Summe mit <u>endlichem</u> Wert.

- <u>$q = -1$:</u> $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1,\ \ldots$

$$\langle(-1)^n\rangle = \langle 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\rangle \quad \text{für } n \geq 0$$

$$\begin{aligned} s_{10} = \sum_{i=1}^{10} x_i &= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1 \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1) = 0 \end{aligned}$$

$$s_{11} = \sum_{i=1}^{11} x_i = 1$$

$$s_{12} = 0 \qquad s_{13} = 1 \qquad s_{1000} = 0 \qquad s_{1001} = 1$$

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wir haben also eine alternierende Folge $\langle s_m\rangle$ für $m \geq 1$.

$$\langle s_m\rangle_{m\geq 1} = \langle 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots\rangle$$

Eine alternierende Folge hat aber keinen Grenzwert, also gibt es auch <u>keine</u> (endliche) <u>Summe</u>.

Daher folgt: $\boxed{\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \quad \text{existiert nicht}}$

Insgesamt erhalten wir:

Theorem 11.2. unendliche geometrische Reihe

$\underline{|q| > 1}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty$ *keine endliche Summe*

$\Rightarrow$ **divergente** *geometrische Reihe*

$\underline{|q| < 1}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$ *endliche Summe mit*

$$\boxed{s = \frac{b}{1-q}}$$

$\Rightarrow$ **konvergente** *geometrische Reihe*

$\underline{|q| = 1}$ **divergente** *Reihe*

12 Schreibweisen

Unterscheide:

- $s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$

  bedeutet, dass wir alle Folgenglieder aufsummieren, egal wie diese aussehen.

  $s_m = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$

  bedeutet, dass wir die ersten m Folgenglieder aufsummieren, egal wie diese aussehen.

- $s = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b \cdot q^i = b + bq + bq^2 + \dots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = \dfrac{b}{1-q}$

  bedeutet, dass wir alle Glieder einer geometrischen Folge aufsummieren mit:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b\\
x_2 &= bq\\
&\vdots\\
x_i &= bq^{i-1}
\end{aligned}
$$

$$s_m = \sum_{i=0}^{m-1} b \cdot q^i = b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{m-1} = \sum_{i=1}^{m} x_i = b \cdot \frac{1-q^m}{1-q}$$

bedeutet, dass wir die ersten m Glieder einer geometrischen Folge aufsummieren mit:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b\\
x_2 &= bq\\
&\vdots\\
x_i &= bq^{i-1}\\
&\vdots\\
x_m &= bq^{m-1}
\end{aligned}
$$

13 Die Eulersche Zahl e - Teil 2

Wir wissen bereits, wie e definiert ist:

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Es gibt aber auch noch andere Folgen, die e als Grenzwert haben:

$$\boxed{x_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}}$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} x_m = e}$$

(mehr in der Vorlesung Analysis 1)

Betrachten wir ein paar Folgendglieder:

$x_0 = \frac{1}{0!} = 1$

$x_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$

$x_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5$

$x_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.6\dot{6}$

$x_4 = 2.6\dot{6} + \frac{1}{4!} = 2.708\dot{3}$ 1. Dezimalstelle

$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} = 2.71\dot{6}$ 2. Dezimalstelle

$x_6 = x_5 + \frac{1}{6!} = 2.7180\dot{5}$ 3. Dezimalstelle

$x_7 = x_6 + \frac{1}{7!} = 2.71825396\ldots$ 4. Dezimalstelle

$x_8 = 2.71827876984\ldots$

$x_9 = 2.71828152557\ldots$ 6. Dezimalstelle

$x_{10} = 2.71828180115\ldots$ 7. Dezimalstelle

Geht viel schneller gegen e!

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}$$