Workshop Analysis WS 2004/05

Folgen und Reihen - Konvergenz von Folgen

Petra Grell

1. Zeige:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{4n+5} = 0$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$

   Ab welchem Folgenindex n_0 liegen alle späteren Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwerts x für $\varepsilon = 0.05$.

   Hinweis: Setze in die Ungleichung $|x_n - x| < \varepsilon$ ein, wobei x der Grenzwert der Folge ist. ε ist beliebig. Forme die Bedingung nach n um. Nun könnten man jeden beliebigen Wert größer 0 für ε einsetzen und erhielte so den Index n_0, ab welchem die Folgenglieder in der ε-Umgebung von x liegen.

2. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{4n+5} = 3$. Wahr oder falsch?
   Versuche, wie oben in die Ungleichung einzusetzen: $x_n = \frac{2}{4n+5}$, $x = 3$. Was erhälst du als Lösung? Was bedeutet sie?

3. Was stimmt an folgender Aussage nicht: „Der Grenzwert einer Folge ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig annähern, sie aber nie erreichen."
   Gib ein Beispiel einer konvergenten Folge an, für die diese Aussage nicht stimmt (nicht kompliziert denken!).

4. Betrachten wir die Folge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Hat diese alternierende Folge einen Grenzwert? Wenn ja, stelle eine Vermutung auf und beweise diese wie oben.

   Hinweis: Was ist der Betrag von $(-1)^n$?

5. Zeige: $a_n \to a$ bedeutet dasselbe wie $a_n - a \to 0$.

   Hinweis: Setze beide Aussagen in die Definition der Konvergenz ein (Ungleichung). Achte darauf, dass du korrekt argumentierst (exakte Defintion hinschreiben, keine Quantoren vergessen, usw.).