Workshop Analysis WS 2004/05

Folgen und Reihen - Geometrische Folge

Petra Grell

Lösung zur Expliziten Darstellung der geometrischen Folge

Eine geometrische Folge hat die Eigenschaft, dass der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder immer eine Konstante q ist. Dies heißt für die rekursive Darstellung folgendes:

$$x_{n+1} = x_n \cdot q$$

Startwert der Folge ist x_1.

Um daraus nun eine explizite Darstellung zu gewinnen, geht man wie folgt vor:

$$x_n = x_{n-1} \cdot q \tag{1}$$

Nun gilt aber $x_{n-1} = x_{n-2} \cdot q$, da die rekursive Darstellung für jedes Folgenglied gilt, also auch für x_{n-1}.

Dies setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$x_n = x_{n-1} \cdot q = x_{n-2} \cdot q \cdot q = x_{n-2} \cdot q^2$$

Dasselbe können wir nun mit $x_{n-2} = x_{n-3} \cdot q$ machen: Um daraus nun eine explizite Darstellung zu gewinnen, geht man wie folgt vor:

$$x_n = x_{n-2} \cdot q^2 = x_{n-3} \cdot q \cdot q^2 = x_{n-3} \cdot q^3 \tag{2}$$

Diesen Vorgang wiederholt man nun so oft, bis man bei $x_{n-(n-2)} = x_2$ angekommen ist.

Betrachtet man den letzten Teil der Gleichung (2), so sieht man, dass die Summe aus dem Index, nämlich $n-3$, und der Hochzahl von q, nämlich 3, genau n ergibt. Will man, dass statt x_{n-3} nun x_2 steht, so muss man die Hochzahl von q durch $n-2$ ersetzen, damit die Summe wieder n ist.

Man erreicht also Folgendes:

$$x_n = x_2 \cdot q^{n-2}$$

Nun gilt wie vorher, dass $x_2 = x_1 \cdot q$ ist. Somit haben wir

$$x_n = x_2 \cdot q^{n-2} = x_1 \cdot q^{n-1}$$

Dies ist nun unsere explizite Darstellung der geometrischen Folge.

Insgesamt erhält man also

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$