Workshop Analysis WS 2004/05

Folgen und Reihen - Geometrische Reihen

Petra Grell

1. Wiederhole aus der Vorlesung:
   Nimm ein Blatt Papier und halbiere es durch einen Strich. Wähle ein Hälfte und teile diese wieder in zwei Hälften, usw. Mache dies ein paar Mal. Was bedeutet das?
   Wir können die einzelnen Rechtecke nun zusammenzählen und erhalten somit eine Summe. Schreibe diese Summe mathematisch (Summe von Brüchen) auf. Ist diese endlich oder unendlich, wenn wir annehmen, dass wir ewig weiter halbieren können? Welchen Wert hat diese Summe?
   Betrachte die einzelnen Summanden. Bilden diese eine Folge? Wenn ja, welche Bestimmungseigenschaften hat sie?

2. Wiederhole, wann eine geometrische Reihe eine endliche Summe hat und wann nicht!

3. Wie lautet die Formel für die endliche geometrische Reihe? Wie erhält man sie? Was ist das b in der Formel?

4. Wie lautet die Formel für die unendliche geometrische Reihe? Wie leitet man diese aus der Formel für die endliche geometrische Reihe her?

5. Schreibe mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$:

   (a) $2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 9 \cdot 2^9$

   (b) $3 + 12 + 48 + \ldots$ Hinweis: Hebe 3 heraus.

6. Wie lautet die Summe? Hinweis: Schreibe die Summe aus und fasse geschickt zusammen.
   $$\sum_{i=0}^{100} (-1)^i$$

7. Von einer geometrischen Reihe sind die ersten beiden Summanden $b_1 = 4$, $b_2 = 6$ gegeben. Berechne s_5 und s_{15}.

8. Von einer geometrischen Reihe kennt man $b_3 = 9$ und $b_6 = -\frac{64}{3}$. Berechne s_{11} und s_n.

9. Drei Zahlen sind aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Reihe. Ihr Produkt ist 1728, die Summe aus dem zweiten und dritten Glied ist 28. Wie groß ist die Summe der drei Glieder?

10. Berechne:

    (a) $\sum_{i=1}^{10} 0.2^i$

    (b) $\sum_{i=1}^{8} \left(\frac{3}{4}\right)^i$

    (c) $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^i$

    Hinweis: Achte auf den richtigen Startwert!

11. Berechne die Summe der folgenden unendlichen geometrischen Reihen:

    (a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$

    (b) $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$

    (c) $2^2 \cdot 3^{-4} + 2^4 \cdot 3^{-6} + \ldots$

    (d) $0.64 - 0.08 + 0.01 - + \ldots$

12. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1}}{2^{n-1}}$.

    Hinweis: Verwende für den Zähler die Formel für die endliche geometrische Reihe.

13. Unter welchen Bedingungen sind die folgenden Ausdrücke (als „Summe“) sinnvoll? Gib eine Formel für die Summe an!

    (a) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \ldots$

    (b) $2 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + \ldots$

    (c) $-x - 2x^2 - 4x^3 - 8x^4 - \ldots$

    Hinweis: Für welches q konvergiert die Summe?

14. Beweise die angeführten Formeln, indem du die Formeln für geometrische Reihen anwendest:

    (a) $\frac{a+a^2+a^3+\ldots}{1+a} = \frac{a}{1-a^2}$, falls $|a| < 1$.

    (b) $(z^2 - 1)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) = -1$, falls $|z| < 1$.

15. Stelle die folgenden Terme als unendliche Summe dar und entscheide, unter welchen Bedingungen das sinnvoll ist:

    (a) $\frac{2}{1-y}$

    (b) $\frac{2x}{1-2x}$

    (c) $a - \frac{a}{1-2a}$

    (d) $3 \cdot \frac{u}{u^3-1}$