Name: ______________________________

Beispiel	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	10	10	15	4	11	50
Erreicht						

1. Theoriefragen

   (a) Erkläre den Begriff „exponentielles Wachstum“? Wie unterscheidet sich diese Form des Wachstums insbesondere vom „linearen Wachstum“? (3)

   Lösung:
   Exponentielles Wachstum einer Menge N besteht, wenn sich N pro Zeiteinheit t entsprechend einem konstanten Faktor a ändert. Der neu berechnete Wert hängt von N im vorhergehenden Zeitpunkt, sowie vom Wachstumsfaktor selbst ab: $N_t = N_{t-1} * a$
   Allgemein ergibt sich die Funktion: $N_t = N_0 * a^t$, wobei N_0 für die Ursprungsmenge steht. Insbesondert handelt es sich um ein Wachstum, wenn $a > 1$ gilt.
   Im Vergleich zum linearen Wachstum ändert sich der Betrag, der sich pro Zeiteinheit erhöht.

   (b) Was ist der „natürliche Logarithmus“ und wofür wird er beispielsweise verwendet? (2)

   Lösung: Der natürliche Logarithmus, auch „logarithmus naturalis“ ist der Logarithmus zur Basis e, wobei dies der „euler'schen Zahl“ entspricht. Verwendet wird er beispielsweise für exponentielle Wachstumsfunktionen der Form: $N_t = N_0 * e^{\lambda t}$, um λ zu berechnen.

   (c) Was beschreibt folgender Ausdruck? (1)

   $$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n$$

   Lösung: Diese Grenzwertbildung liefert als Ergebnis die Euler'sche Zahl e.

   (d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Stelle einen Zusammenhang zwischen der Länge von n (Anzahl der Ziffern von n), und $log_{10}(n)$ her. (4)

Lösung: Der Zehnerlogarithmus beschreibt die Länge einer Zahl im Dezimalsystem. Pro Erhöhung der Kardinalität von n, erhöht sich $log_{10}(n)$ um 1.

2. Eine Bakterienkultur besteht anfangs aus 1000 Bakterien, wobei sich deren Anzahl jede Stunde verdoppelt.

   (a) Stelle die Anzahl der Bakterien N_t nach t Stunden als Exponentialfunktion abhängig von der Zeit dar. (2)

   Lösung: $N_t = 1000 * 2^t$

   (b) Wieviele Bakterien sind nach 2,5 Stunden bereits vorhanden? (2)

   Lösung: $N_{2,5} = 1000 * 2^{2,5} \Rightarrow N_{2,5} = 5657$

   (c) Zu welchem Zeitpunkt wird sich die Bakterienanzahl verzehnfacht haben? (3)

   Lösung: $10000 = 1000 * 2^t \Rightarrow t = log_2(10) = 3,32$

   (d) Das Bakterienwachstum lässt sich auch durch folgende Formel ausdrücken: (3)

   $$N_t = N_0 * e^{\lambda * t}$$

   Setze in die Formel ein und berechne λ. Beschreibe weiters den Prozess, der vorliegt, falls man $-\lambda$ einsetzt.

   Lösung: $\lambda = log_e(2) = 0,69$
   Setzt man $-\lambda$ ein, so ergibt sich ein negatives Wachstum, dh. exponentielle Abnahme.

3. Die Temperatur einer Tasse Tee beträgt anfangs 100°C. In 10 Minuten kühlt sie bei einer Zimmertemperatur von 20°C auf 30°C ab. Dieser exponentielle Abnahmeprozess lässt sich durch die Gleichung darstellen:

$$T_t = 20 + (T_0 - 20) * e^{-\lambda t}$$

(a) Berechne λ (5)

Lösung: $30 = 20 + (100 - 20) * a^{10} \Leftrightarrow 10 = a^{10} \Rightarrow a \approx 0.812$
$\Rightarrow \lambda = log_e(0.812) \approx 0.208$

(b) Zum Tee wird sofort die gleiche Menge Wasser (4°C) dazugegeben (Mischverhältnis 1:1). Welche Temperatur hat der Tee nach 3 Minuten Wartezeit? Hinweis: Die Temperatur der Mischung berechnet sich wie folgt: (5)

$$T = \frac{T_1+T_2}{2}$$

Lösung: $T = \frac{100+4}{2} = 52$
$T_3 = 20 + (52 - 20) * 0.812^3 \approx 37,1°C$

(c) Welche Temperatur hat der Tee, wenn das Wasser erst nach 3 Minuten dazugegeben wird? (5)

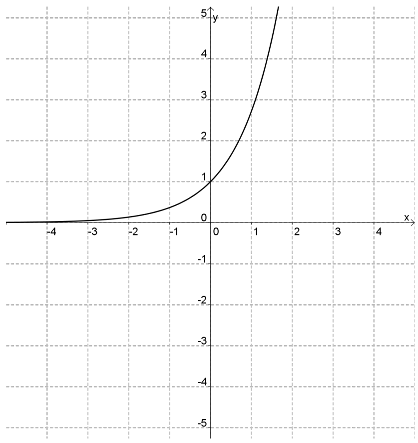
Lösung: $T_3 = 20 + (100 - 20) * 0.812^3 \approx 62,8°C$
$T = \frac{62,8+4}{2} = 33,4°C$

4. Zuordnungen (4)

Ordne folgende Funktionen den Graphen zu:

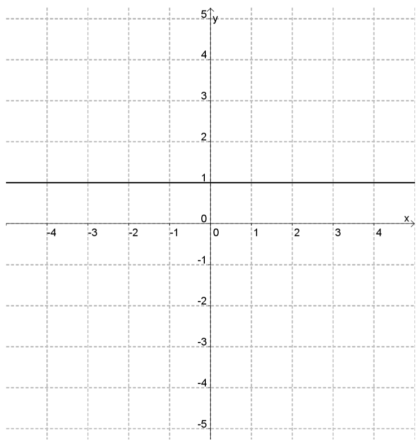
- $N_t = N_0 * e^{1t}$
- $N_t = N_0 * 0.3^t$
- $N_t = N_0 * e^{0t}$
- $N_t = N_0 * e^{-0.2t}$

(a)



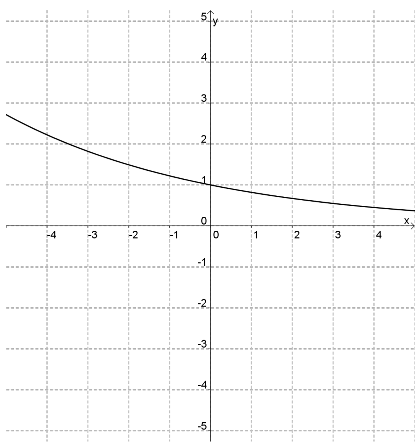
(a) $\underline{N_t = N_0 * e^{1t}}$

(b)



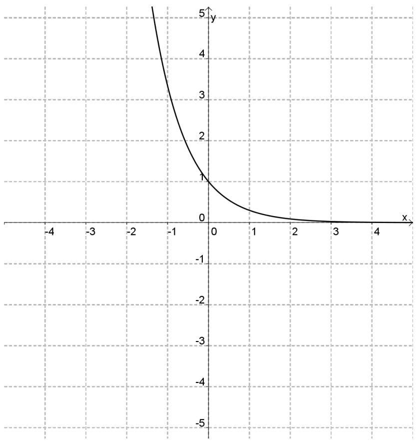
(b) $\underline{N_t = N_0 * e^{0t}}$

(c)



(c) $\underline{N_t = N_0 * e^{-0.2t}}$

(d)



(d) $\underline{N_t = N_0 * 0.3^t}$

5. Erstelle mithilfe von Geogebra eine Datei „ex06.gbb“, welche folgende Spezifikation erfüllt:
   (a) Visualisierung der Funktion: (3)

   $$N_t = N_0 * a^t$$

   (b) Punkt t soll explizit in der Funktion eingezeichnet sein (1)
   (c) Schieberegler für: (3)

   $$t \in [-30, 30],\ N_0 \in [0, 5],\ a \in [0, 3]$$

   (d) korrekte Beschriftung der Achsen (1)
   (e) x-Achse in Zehner-Intervalle, y-Achse in Zwanziger-Intervalle (2)
   (f) Gitternetzlinien sollen nicht angezeigt werden (1)

Die Abgabe erfolgt im Moodle unter „Schularbeit - Aufgabe 5“.

Lösung: Link

Viel Glück!

Notenskala	
46 - 50	1
41 - 45	2
32 - 40	3
25 - 31	4
0 - 24	5