3.1 Addieren und Subtrahieren einfacher Terme

1. Prinzipiell kann man mit Variablen und Termen – sie stehen ja für Zahlen – ähnlich rechnen wie mit Zahlen. Z. B.:

$3 + 3 = 3 \cdot 2 = \mathbf{2 \cdot 3}$
$6 + 6 + 6 = 6 \cdot 3 = \mathbf{3 \cdot 6}$
$8 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 4 = \mathbf{4 \cdot 8}$
$\dots$
$\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{\text{n-mal}} = 2 \cdot n = \mathbf{n \cdot 2}$

$a + a = a \cdot 2 = 2 \cdot a = \mathbf{2a}$
$b + b + b = b \cdot 3 = 3 \cdot b = \mathbf{3b}$
$c + c + c + c = c \cdot 4 = 4 \cdot c = \mathbf{4c}$
$\dots$
$\underbrace{z + z + \dots + z}_{\text{n-mal}} = z \cdot n = n \cdot z = \mathbf{nz}$

Wenn beim Multiplizieren von Variablen Missverständnisse ausgeschlossen sind, wird der **Malpunkt** als Rechenzeichen der Multiplikation vielfach weggelassen, z. B.: $2 \cdot a = 2a$, $3 \cdot x \cdot y = 3xy$.

Warum darf man den Malpunkt beim Multiplizieren zweier Zahlen nicht weglassen? Zeige anhand eines Beispiels, welche Verwechslungen dann entstehen würden!

2. Für das **Rechnen mit Variablen und Termen** gelten dieselben Regeln wie für das Rechnen mit Zahlen.

Versuche, in den folgenden Beispielen die entsprechenden Regeln selbst zu formulieren!

$3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = (3 + 5) \cdot 2 = 8 \cdot 2 = \mathbf{16}$
$8 - 2 - 8 = 8 - 8 - 2 = \mathbf{-2}$

$3a + 5a = (3 + 5) \cdot a = \mathbf{8a}$
$m - k - m = m - m - k = \mathbf{-k}$

3. Einteilung der Terme:

1) **Eingliedrige Terme** (auch **Monome** genannt), z. B.: $5x$, $\frac{2}{3}y$, $-3z$, $2ab$, …
2) **Zweigliedrige Terme** (auch **Binome** genannt), z. B.: $a + b$, $x - 3y$, …
3) **Dreigliedrige Terme** (auch **Trinome** genannt), z. B.: $5ab - bc + 2d$, …
4) **Mehrgliedrige Terme** (auch **Polynome** genannt)

Bemerkung: monos (griech.) … allein; nomos (griech.) … das Gesetz; bis (lat.) … zweimal; tris (griech.) … dreimal; polys (griech.) … viel.

Die Zahlen, die vor der Variablen stehen (z. B.: 5 bei $5x$, $\frac{2}{3}$ bei $\frac{2}{3}y$, ...), heißen **Vorzahlen (Koeffizienten)**.

Wenn die Zahl 1 als Koeffizient auftritt, kann man sie weglassen, z. B.: $1 \cdot n = 1n = n$.

3.2 Addieren und Subtrahieren zusammengesetzter Terme – Rechnen mit Klammern

1. Auflösen von Klammern:
Wie rechnet man, wenn in Termen Klammern auftreten?

Zum Beispiel:

$T_1(x) = 5x + (2x + 4)$ $\qquad$ $T_3(x) = 5x - (2x + 4)$

$T_2(x) = 5x + (2x - 4)$ $\qquad$ $T_4(x) = 5x - (2x - 4)$

a) Erinnere dich an folgendes **Rechengesetz der Addition**:
„Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man Summanden beliebig zu Teilsummen zusammenfasst."

$$a + b + c = \begin{cases} (a + b) + c \\ a + (b + c) \end{cases}$$

Daraus folgt: $T_1(x) = 5x + (2x + 4) = (5x + 2x) + 4 = \mathbf{7x + 4}$

und: $T_2(x) = 5x + (2x - 4) = 5x + [2x + (-4)] = 5x + 2x + (-4) =$
$= (5x + 2x) - 4 = \mathbf{7x - 4}$

Es muss daher gelten: $T_1(x) = 5x + (2x + 4) = 5x + 2x + 4$

$T_2(x) = 5x + (2x - 4) = 5x + 2x - 4$

Pluszeichen vor der Klammer

Steht **vor einem Klammerausdruck ein Pluszeichen**, so können die **Klammern** beim Vereinfachen des Terms **weggelassen** werden.

$\boxed{a + (b + c) = a + b + c}$ $\qquad$ $\boxed{a + (b - c) = a + b - c}$

Beachte: Steht kein Zeichen vor der Klammer, so kannst du dir stets ein Pluszeichen denken. Vergleiche z. B. „6" und „+6"!

Beispiel

$(3 + 5y) + (3y - 7) = 3 + 5y + 3y - 7 = \mathbf{8y - 4}$

b) Zum **Vereinfachen der Terme** $T_3(x) = 5x - (2x + 4)$ und $T_4 = 5x - (2x - 4)$ benötigen wir folgende **Rechenregel der Subtraktion**:

„Treten mehrere Subtrahenden auf, so kann man die Subtrahenden zunächst addieren. Dann zieht man die erhaltene Summe vom Minuenden ab."

$$a - b - c = a - (b + c)$$

Liest man diese Rechenregel von rechts nach links, so kann man damit die Terme $T_3(x)$ und $T_4(x)$ folgendermaßen vereinfachen:

$T_3(x) = 5x - (2x + 4) = 5x - 2x - 4 = \mathbf{3x - 4}$

$T_4(x) = 5x - (2x - 4) = 5x - [2x + (-4)] = 5x - 2x - (-4) = 5x - 2x + 4 = \mathbf{3x + 4}$

Minuszeichen vor der Klammer

Steht **vor einem Klammerausdruck ein Minuszeichen**, so müssen beim Auflösen der Klammern die **Vor- und Rechenzeichen innerhalb der Klammern geändert** werden.

$\boxed{a - (b + c) = a - b - c}$ $\qquad$ $\boxed{a - (b - c) = a - b + c}$

3.3 Die Potenzschreibweise

1. Stelle dir vor, wie schwierig das Rechnen mit römischen Zahlzeichen gewesen sein muss! Die Einführung des Stellenwertsystems hat das Rechnen wesentlich vereinfacht.

Eine geschickte Schreibweise kann Probleme der Mathematik erheblich vereinfachen.

Zum Beispiel:
Die Formel für den Flächeninhalt eines Quadrats (→ Fig. 45) lautet:

$$A = a \cdot a$$

Dafür kann man auch $\mathbf{a^2}$ schreiben.

Man spricht: „a **Quadrat**" oder „a **hoch 2**".

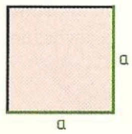

Fig. 45

Ebenso gilt:	Sprechweise
$7 \cdot 7 = \mathbf{7^2}$	„7 Quadrat" „7 hoch 2"
$4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{4^3}$	„4 zur Dritten" „4 hoch 3"
$8{,}2 \cdot 8{,}2 \cdot 8{,}2 \cdot 8{,}2 = \mathbf{8{,}2^4}$	„8,2 zur Vierten" „8,2 hoch 4"

Mit **Variablen** geschrieben:

$r \cdot r = \mathbf{r^2}$, $r \cdot r \cdot r = \mathbf{r^3}$, $\underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{\text{n-mal}} = \mathbf{r^n}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$

Für r^1 schreibt man üblicherweise einfach r: $\mathbf{r^1 = r}$.

2. **a)** Man bezeichnet Rechenausdrücke (Rechenanweisungen) wie $r^2, r^3, \ldots, r^n$ als **Potenzen**.
Weitere Bezeichnungen:

$$\mathbf{r^n}$$

r → **Grundzahl (Basis)**; n → **Hochzahl (Exponent)**

Das Bilden der Potenz heißt **Potenzieren**.

b) Das Bilden der 2. Potenz nennt man auch **Quadrieren**.

c) Als **Kubieren** bezeichnet man das Bilden der 3. Potenz; z. B. gilt für das Volumen eines Würfels (→ Fig. 46):

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Bemerkung: cubus (lat.) … Würfel

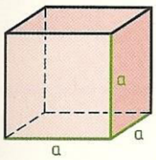

Fig. 46

3. Potenzieren negativer Zahlen:

Zum Beispiel:
$(-2)^1 = \mathbf{-2}$
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = \mathbf{+4}$
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{-8}$
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{+16}$

Du erkennst:

Potenzieren negativer Zahlen

Eine **Potenz** einer negativen Zahl ergibt eine **positive Zahl**, wenn ihre **Hochzahl gerade** ist.
Eine **Potenz** einer negativen Zahl ergibt eine **negative Zahl**, wenn ihre **Hochzahl ungerade** ist.

4. Beachte den Unterschied zwischen $2s$ (→ Fig. 47) und s^2 (→ Fig. 48)!

Multiplizieren

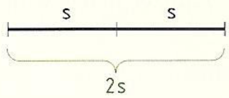

Fig. 47

$2s$ kann als **Summe** ($2s = s + s$) gedeutet werden.

Potenzieren

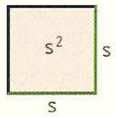

Fig. 48

s^2 stellt ein **Produkt** ($s^2 = s \cdot s$) dar.

Unterscheide daher:

$3s = s + s + s$; $\quad n \cdot s = \underbrace{s + s + \ldots + s}_{\text{n-mal}}$

$s^3 = s \cdot s \cdot s$; $\quad s^n = \underbrace{s \cdot s \cdot \ldots \cdot s}_{\text{n-mal}}$

Multiplizieren und Potenzieren

Das Multiplizieren ist ein Addieren gleicher Summanden.

Das Potenzieren ist ein Multiplizieren gleicher Faktoren.

Vorrangregeln

Das Potenzieren ist vor den Rechnungsarten erster und zweiter Stufe durchzuführen.
Daraus folgt: **Das Potenzieren ist eine Rechnungsart dritter Stufe.**

3. Potenzieren eines Produkts bzw. eines Quotienten:

Beispiel G

Berechne **a)** $(a \cdot b)^3$, **b)** $\left(\frac{a}{b}\right)^3$!

a) $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = \mathbf{a^3 \cdot b^3}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$; $(b \neq 0)$

Allgemein gilt:

Rechnen mit Potenzen

Potenzieren eines Produkts:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad n \in \mathbb{Z}^+$

Potenzieren eines Quotienten:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$

4. Addieren und Subtrahieren von Potenzen:

Beispiel H

Vereinfache $T(a) = 4a^2 - 7a - 3a^2 + a^3 + 2a + 5a^3 + a^2$!

$4a^2 - 7a - 3a^2 + a^3 + 2a + 5a^3 + a^2 =$
$= (a^3 + 5a^3) + (4a^2 - 3a^2 + a^2) + (-7a + 2a) = \mathbf{6a^3 + 2a^2 - 5a}$

Im Beispiel H wurden zunächst die Potenzen mit denselben Exponenten zusammengefasst. Das Ergebnis ist mit **„fallenden" Potenzen** von a angeschrieben.

3.6 Multiplizieren mit eingliedrigen Termen

1. Um z. B. $3\frac{7}{10} \cdot 5$ zu berechnen, wirst du wahrscheinlich so vorgehen:

$3\frac{7}{10} \cdot 5 = 3{,}7 \cdot 5 = \mathbf{18{,}5}$ oder $3\frac{7}{10} \cdot 5 = \frac{37}{10} \cdot 5 = \frac{37 \cdot 5}{10} = \frac{37}{2} = \mathbf{18\frac{1}{2} = 18{,}5}$

Du hättest aber auch – unter Verwendung des Distributivgesetzes (Verteilungsgesetzes) – folgendermaßen rechnen können:

$3\frac{7}{10} \cdot 5 = \left(3 + \frac{7}{10}\right) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + \frac{7}{10} \cdot 5 = 15 + \frac{7}{2} = \mathbf{18{,}5}$

Wenn du hingegen den Term $\left(a + \frac{7}{10}\right)$ mit 5 zu multiplizieren hast, kannst du nur so vorgehen:

$\left(a + \frac{7}{10}\right) \cdot 5 = a \cdot 5 + \frac{7}{10} \cdot 5 = \mathbf{5a + \frac{7}{2}}$

2. Ebenso rechnet man, wenn man einen Term mit mehr als zwei Gliedern mit einem eingliedrigen Term zu multiplizieren hat.

Beispiel 1

a) $(a + b + c) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d = \mathbf{ad + bd + cd}$
b) $(x - y - z) \cdot x = \mathbf{x^2 - xy - xz}$
c) $(3x - 2y + 1) \cdot 2x = 3x \cdot 2x - 2y \cdot 2x + 1 \cdot 2x = \mathbf{6x^2 - 4xy + 2x}$

Multiplizieren mit einem eingliedrigen Term

Multipliziere jedes Glied des mehrgliedrigen Terms mit dem eingliedrigen Term!
Beachte dabei die **Vorzeichenregeln**!

3.7 Multiplizieren mit mehrgliedrigen Termen

1. Wenn a, b, c, d irgendwelche Zahlen bedeuten, gilt:

$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d$$

Wir begründen diese Rechenregel rechnerisch und veranschaulichen sie geometrisch für positive Zahlen a, b, c, d sowie $c > d$.

Wir setzen vorübergehend $\boxed{a + b} = e$ und erhalten:

$(\boxed{a + b}) \cdot (c - d) = e \cdot (c - d) = e \cdot c - e \cdot d = (\boxed{a + b}) \cdot c - (\boxed{a + b}) \cdot d = \mathbf{a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d}$

Welche Rechen- und Vorzeichenregeln wurden angewendet?

Graphische Veranschaulichung:

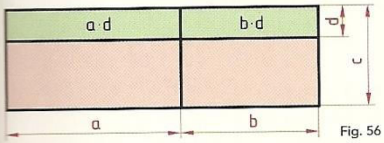

Fig. 56

Flächeninhalt des roten Rechtecks (→ Fig. 56):

$A = (a + b) \cdot (c - d)$, aber auch
$A = a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d$

Erkläre die Regel anhand von Fig. 56!

Multiplizieren mit einem mehrgliedrigen Term

Multipliziere jedes Glied des ersten Terms **mit jedem Glied** des zweiten Terms!
Beachte dabei die **Vorzeichenregeln**!

Beispiel K

$(5a - 2b) \cdot (a - 3b) = 5a \cdot a - 2b \cdot a + 5a \cdot (-3b) - 2b \cdot (-3b) = 5a^2 - 2ab - 15ab + 6b^2 =$
$= \mathbf{5a^2 - 17ab + 6b^2}$

Probe für $a = 1, b = 2$

Angabe: $(5 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{2}) \cdot (\mathbf{1} - 3 \cdot \mathbf{2}) = (5 - 4) \cdot (1 - 6) = 1 \cdot (-5) = \mathbf{-5}$

Ergebnis: $5 \cdot \mathbf{1}^2 - 17 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} + 6 \cdot \mathbf{2}^2 = 5 - 34 + 24 = \mathbf{-5}$

Bemerkung: Im Ergebnis wurden die Glieder des Terms nach fallenden Potenzen von a und nach steigenden Potenzen von b geordnet.

2. Quadrieren von Binomen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Erkläre mit eigenen Worten, was in den einzelnen Rechenschritten gemacht wird!

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

Graphische Veranschaulichung:

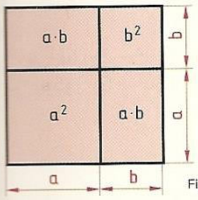

Fig. 57

Flächeninhalt des gesamten Quadrats (→ Fig. 57):

$A = (a + b)^2$ oder
$A = a^2 + 2ab + b^2$

Erkläre die Regel anhand von Fig. 57!

3. Zeige durch Ausmultiplizieren!

1) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2) $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

<u>Quelle</u>

Reichel, H./Litschauer, D./Gross, H. (2001): *Das ist Mathematik 3*, öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG