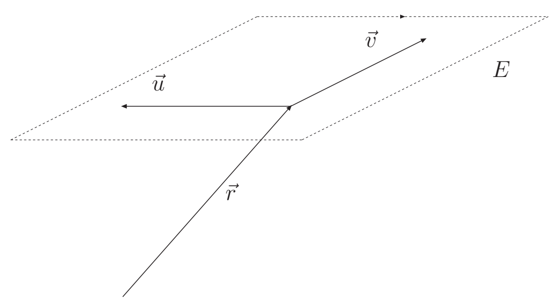
Ebenengleichungen und Umformungen

20. Januar 2007

1 Ebenendarstellungen

1.1 Parameterdarstellung

Die Parameterdarstellung einer Ebene ist gegeben durch einen Stützvektor $\vec{r}$, der einen Punkt auf der Ebene angibt und zwei (linear unabhängige) Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ in der Ebene. Zwei Vektoren sind linear unabhängig, wenn sich der eine Vektor nicht duch den anderen ausdrücken läßt, also $\vec{v} \neq c \cdot \vec{u}$. Mit Linearkombinationen dieser beiden Vektoren können dann alle Punkte auf der Ebene erreicht werden.



Die Parameterdarstellung hat dann folgendes Aussehen:

$$E: \ \vec{x} = \vec{r} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

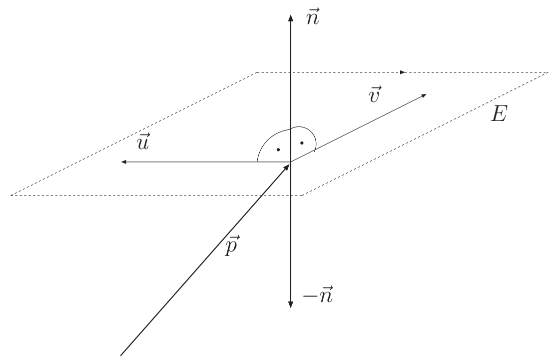
Mit den beiden Parametern s und t kann die Koordinate eines Punktes auf der Ebene entlang der beiden Richtungsvektoren in beliebigen Weiten bewegt werden.

<u>Beispiel:</u>

- $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2 Normaldarstellung (Hessesche Normalenform)

Anstelle eine Ebene durch ihre Richtungsvektoren zu beschreiben, kann man dies auch mit einem Vektor machen, der senkrecht auf den Richtungsvektoren steht. Dieser Vektor wird Normalenvektor genannt. Eine Ebene hat immer zwei Normalenvektoren, die sich nur um ihr Vorzeichen unterscheiden. (Ein Vektor zeigt nach unten und einer nach oben.)



Die Normalendarstellung hat dann folgendes Aussehen:

$$E: \ [\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0$$

Der Punkt P liegt auf der Ebene E, deren Ausrichtung zudem durch den Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmt wird. Der Punkt X liegt auf dieser Ebene, wenn er eingesetzt in das Skalarprodukt der Normalengleichung den Wert 0 ergibt. Das liegt daran, weil dann der Differenzvektor $\vec{x} - \vec{p}$ in der Ebene liegt. Wird dieser mit dem Normalenvektor skalarmultipliziert, so ist das Ergebnis 0 weil zwei orthogonale (=senkrechte) Vektoren multipliziert wurden.

<u>Beispiel:</u>

- $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Es gibt noch eine abgewandelte Form der Normalenform. Bei dieser kann direkt der Abstand eines Punktes von der Ebene berechnet werden. Diese Form der Normalenform heißt Hessesche Normalenform. Der Unterschied zu obiger Normalenform besteht im Normalenvektor. Dieser wird bei der Hesseschen Normalenform mit der Länge 1 angegeben und heißt Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$.

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}} \cdot \vec{n} \qquad\qquad Normaleneinheitsvektor$$

Die HESSEsche Normalenform hat dann folgendes Aussehen:

$$E: \ [\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n}_0 = c$$

Für den Fall $c = 0$ liegt der Punkt X auf der Ebene, denn er hat den Abstand 0. Für alle anderen Fälle kann durch Lösen der Gleichung direkt der Abstand c des Punktes X von der Ebene bestimmt werden.

<u>Beispiel:</u>

- $E: \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c$
  Der Punkt (4,2,1) hat den Abstand $c = \frac{4}{\sqrt{14}}$ von der Ebene.
  Hinweis: Bei dem Skalarprodukt kann auch eine negative Zahl herauskommen. Dann wird einfach der Betrag dieser Zahl genommen.

1.3 Koordinatendarstellung

Eine Ebene ist im Prinzip eine Ansammlung von unendlich vielen Punkten. Jeder Punkt wird durch seine (drei) Koordinaten eindeutig festgelegt. Ebenen können demnach auch als Funktionen dieser Koordinaten dargestellt werden. Dabei müssen dann alle Punkte auf einer Ebene eine rationale Gleichung erfüllen.

$$E: \ a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$$

Die Variablen a, b, c, d sind hierbei reelle Zahlen.

<u>Beispiel:</u>

- $E: \ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10$
- $E: \ x_1 - 2x_2 = 2$ ist eine Ebene, die durch eine Gerade in der x_1x_2-Ebene gegeben ist. Da $c = 0$ ist, können die x_3-Werte beliebig gewählt werden. Die Ebene steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene.
- $E: \ x_3 = 0$ ist die x_1x_2-Ebene, denn nur auf dieser Ebene ist die x_3-Koordinate gleich Null

2 Umformungen von Ebenengleichungen

2.1 Normalenform → Koordinatenform

Diese Umformung ist wohl die leichteste. Denn es bedeutet, einfach die Gleichung der Normalenform auszurechnen.

$$\begin{aligned}
[\vec{x}-\vec{p}]\cdot\vec{n} &= 0\\
\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} &= 0\\
\begin{pmatrix}x_1-p_1\\x_2-p_2\\x_3-p_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} &= 0\\
(x_1-p_1)\cdot n_1+(x_2-p_2)\cdot n_2+(x_3-p_3)\cdot n_3 &= 0\\
n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3 &= \underbrace{n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2+n_3\cdot p_3}_{d}\\
ax_1+bx_2+cx_3 &= d
\end{aligned}$$

Man sieht bei dieser Rechnung, dass die Parameter vor den Koordinaten in der Koordinatendarstellung gerade die Komponenten des Normalenvektors sind. Die Konstante auf der rechten Seite ist zudem einfach nur das Skalarprodukt aus dem Stützvektor und dem Normalenvektor der Ebene.

<u>Beispiel:</u>

$E:\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=0$ soll in Koordinatenform überführt werden!

Wir setzen bei der vorletzten Zeile der oberen Rechnung ein:

$$\begin{aligned}
n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3 &= n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2+n_3\cdot p_3\\
3\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3 &= 3\cdot 2+2\cdot(-5)+1\cdot 3\\
\\
E:\ 3x_1+2x_2+x_3 &= -1
\end{aligned}$$

2.2 Koordinatenform → Normalenform

Da wir gerade gesehen haben, dass die Komponenten des Normalenvektors die Parameter in der Koordinatengleichung sind, kenn wir also den Normalenvektor der Ebene. Nun brauchen wir noch einen Stützvektor, der auf die Ebene führt. Diesen errät man einfach.

Der Stützvektor muss ja die Koordinatengleichung erfüllen, da er auf der Ebene liegt. Standardmäßig setzt man einfach eine Koordinate mit 0 gleich, eine zweite setzt man einfach 1 und die dritte Koordinate variiert man. Kurz:

1. Normalenvektor $\vec{n}$ auslesen
2. Stützvektor $\vec{p}$ erraten

Beispiel:

$E: \; -2x_1 + x_2 = 5$ soll in Normalenform überführt werden!

1. Wir lesen den Normalenvektor aus: $n_3 = 0$ da sonst ein x_3 in der Gleichung auftauchen würde

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Wir erraten einen Stützvektor der Ebene. Man setzt z.B. $p_1 = 0$ und sieht nun, dass $p_2 = 5$ sein muss, damit die Gleichung erfüllt ist. In diesem speziellen Fall ($n_3 = 0$) darf p_3 beliebig gewählt werden, weil es das Ergebnis der Gleichung nicht beeinflusst. Wir wählen der Einfachheit halber: $p_3 = 0$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also für die Normalenform der Ebene:

$$E: \; \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

2.3 Parameterform → Normalenform

Bei einer Parameterdarstellung einer Ebene sind zwei Richtungsvektoren gegeben, die in der Ebene liegen. Für eine Normalenform benötigen wir aber den Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht, und damit auch senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren. Mit dem Kreuzprodukt kann ein Vektor erzeugt werden, der senkrecht auf zwei anderen steht. Wir finden den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ -(u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

Der Stützvektor der Ebene ist in der Parameterform ohnehin schon gegeben und muss in die Normalenform nur noch eingesetzt werden.

Beispiel:

$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll in Normalenform überführt werden.

1. Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ -(4 \cdot 1 - 1 \cdot 3) \\ 4 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Der Stützvektor kann direkt abgelesen werden.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die Normalenform der Ebene:

$$E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

2.4 Normalenform → Parameterform

In der Normalenform ist der Stützvektor schon gegeben, den man auch für die Parameterform benutzen kann. Die beiden Richtungsvektoren der Parameterdarstellung müssen senkrecht auf dem Normalenvektor stehen und zudem linear unabhängig voneinander sein. Um Vektoren mit diesen Eingenschaften zu gewinnen, benutzt man einen Trick.
Standardtrick zum Erzeugen eines zu einem gegebenen Vektor orthogonalen Vektors:

1. eine Komponente 0 setzen
2. die anderen beiden Komponenten vertauschen
3. eine der beiden vertauschten Komponenten negieren

Um nun zwei linear unabhängige Vektoren auf diese Weise zu erzeugen, setzt man jeweils unterschiedliche Komponenten = 0. Dann ist sichergestellt, dass die beiden Vektoren nicht identisch sind.

Beispiel:

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ soll in Parameterform überführt werden.

Es müssen die beiden Richtungsvektoren mit dem Standardtrick erzeugt werden.

1. Vektor: erste Komponente wird 0 gesetzt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Vektor: zweite Komponente wird 0 gesetzt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Stützvektor wird übernommen und man erhält die Parameterdarstellung der Ebene:

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.5 Koordinatenform → Parameterform

Durch die vorangegangenen Kapitel kann die Parameterform aus der Koordinatenform durch den Umweg über die Normalform erreicht werden. Eine andere Alternative bietet folgendes Verfahren:

1. Umstellen der Koordinatengleichung nach einer der Koordinaten

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \rightarrow x_1 = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3$$

2. die verbleibenden zwei Koordinaten als Parameter setzen

$$x_2 = s, \qquad x_3 = t$$

3. Aufstellen des Vektors $\vec{x}$ mittels dieser drei Gleichungen → es ergibt sich eine Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} - \frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Ein Beispiel macht das Verfahren klarer!

Beispiel:

$E:\ -2x_1 + x_2 = 5$ soll in Parameterform überführt werden!

1. Umstellen der Koordinatengleichung nach einer der Koordinaten: Hier am besten nach x_2, da die Gleichung dann nicht mehr durch den Vorfaktor geteilt werden muss (denn dieser ist hier $= 1$)

$$-2x_1 + x_2 = 5 \rightarrow x_2 = 5 + 2x_1$$

2. die verbleibenden zwei Koordinaten als Parameter setzen

$$x_1 = s, \qquad x_3 = t$$

3. Aufstellen des Vektors $\vec{x}$ mittels dieser drei Gleichungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 5+2s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+s+0 \\ 5+2s+0 \\ 0+0+t \end{pmatrix}$$

4. Spaltet man diese Vektorsumme nun in einzelne Vektoren auf und sieht sofort die Parameterform!

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.6 Parameterform → Koordinatenform

In diesem Fall ist es am einfachsten die Normalenform zu erzeugen und daraus dann die Koordinatenform! Das bedeutet, einmal ein Kreuzprodukt auszurechnen und zweimal ein Skalarprodukt. Hierbei ist werden wohl weniger Rechenfehler begangen, als bei der folgenden alternativen Methode, die der Vollständigkeit halber erwähnt sein soll.
Bei der Parameterdarstellung einer Ebene handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem mit zwei Parametern. In dem Gleichungssystem müssen die beiden Parameter eliminiert werden und dann in die verbleibende letzte Gleichung eingesetzt werden. Diese Gleichung ist dann die Koordinatengleichung der Ebene.

Beispiel:

Die Ebene $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll in Koordinatenform dargestellt werden!

1. Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -(-2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) \\ -2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2. Der Stützvektor kann direkt abgelesen werden.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Berechnen der Koordinatengleichung aus der Normalenform

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

liefert

$$-5x_1 + 14x_2 - 8x_3 = -5 \cdot 1 + 14 \cdot 2 - 8 \cdot 3$$

und damit ist die Ebene gegeben durch

$$E: \; -5x_1 + 14x_2 - 8x_3 = 1$$

Alternative Methode (**nicht zu empfehlen!**):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s + 4t \\ 2 + s + 2t \\ 3 + 3s + t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & - & 2s & + & 4t & = & x_1 \\ 2 & + & s & + & 2t & = & x_2 \\ 3 & + & 3s & + & t & = & x_3 \end{array}$$

Wir behandeln das Gleichungssystem, als seien nur die Parameter s und t Unbekannte und bringen es in Stufenform:

$$\begin{array}{rccccccl} \text{I} & 1 & - & 2s & + & 4t & = & x_1 \\ \text{II} & 2 & + & s & + & 2t & = & x_2 \\ \text{III} & 3 & + & 3s & + & t & = & x_3 \\ \hline \text{I} & 1 & - & 2s & + & 4t & = & x_1 \\ \text{2I-II} & 0 & - & 5s & + & 6t & = & 2x_1 - x_2 \\ \text{3I-III} & 0 & - & 9s & + & 11t & = & 3x_1 - x_3 \\ \hline \text{I} & 1 & - & 2s & + & 4t & = & x_1 \\ \text{II} & 0 & - & 5s & + & 6t & = & 2x_1 - x_2 \\ \text{9II-5III} & 0 & - & 0 & - & t & = & 3x_1 - 9x_2 + 5x_3 \end{array}$$

Aus der letzen Zeite folgt:

$$t = -3x_1 + 9x_2 - 5x_3$$

Dies eingesetzt in die vorletzte Zeile liefert:

$$-5s + 6\left(-3x_1 + 9x_2 - 5x_3\right) = 2x_1 - x_2 \to s = -4x_1 + 11x_2 - 6x_3$$

Mit diesen Ergebnissen gehen wir in Gleichung I:

$$1 - 2\left(-4x_1 + 11x_2 - 6x_3\right) + 4\left(-3x_1 + 9x_2 - 5x_3\right) = x_1$$

Multipliziert man diese Gleichung aus und sortiert sie, so erhält man endlich die Koordinatengleichung der Ebene:

$$E:\ 5x_1 - 14x_2 + 8x_3 = 1$$

Dass die Faktoren vor den Koordinaten vertauschte Vorzeichen gegenüber der oben berechneten haben, ist nicht schlimm. Denn die Faktoren sind die Komponenten des Normalenvektors. Und wenn dieser nun mit -1 multipliziert wird (Vorzeichen vertauschen), ändert sich nur die Richtung des Vektors. Die Ebene ist aber immer noch die gleiche.