Bedeutung der einzelnen Ableitungen

1) erste Ableitung

Wie wir schon wissen sagt uns die erste Ableitung der Funktion in einen beliebigen Punkt x, die Steigung der Tangente im Punkt x.
Somit können wir die Funktion auf das Monotonie-Verhalten und auf Extremstellen untersuchen:

Monotoniesatz
Sei f eine reelle Funktion von A auf die reellen Zahlen und I eine Teilmenge von A, dann gilt:
1) $f'(x)>0$ für alle x aus I => **f streng monoton steigend in I**
2) $f'(x)<0$ für alle x aus I => **f streng monoton fallend in I**

Zusätzlich können wir die Funktion auf eine lokale Extremstelle untersuchen:

1) Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen:
Ist **p** eine **lokale Extremstelle** einer Polynomfunktion f, dann ist **$f'(p)=0$.**

2) Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:
Ändert eine Polynomfunktion f an der Stelle p das **Monotonieverhalten,** dann ist p eine **lokale Extremstellen** von f.

2) zweite Ableitung

Mit der zweiten Ableitung können wir das Krümmungsverhalten einer Funktion untersuchen.
Sei f eine reelle Funktion von A auf die reellen Zahlen, f‘ von A auf die reellen Zahlen ihre Ableitung und I ein Intervall von A dann gilt:

- linksgekrümmt in I, wenn f‘ streng monoton steigend in I ist.
- rechtsgekrümmt in I, wenn f‘ streng monoton fallend in I ist.

Krümmungssatz:
ist f von A auf die reellen Zahlen eine Polynomfunktion und I ein Intervall von A dann gilt:
1**) $f''(x)>0$** für alle inneren Stellen x aus I => **f linksgekrümmt in I (konvex)**
2) **$f''(x)<0$** für alle inneren Stellen x aus I =>**f rechtsgekrümmt in I (konkav)**

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:
Ist f von A auf die reellen Zahlen eine Polynomfunktion, I ein Intervall von A und p ein Punkt in I dann gilt:
1) **$f'(p)=0$ und $f''(p)<0$** => **p ist lokale Maximumsstelle von f**
2) **$f'(p)=0$ und $f''(p)>0$** => **p ist lokale Minimumsstelle von f**

3) dritte Ableitung

Notwendige Bedingung für Wendestellen

für eine Polynomfunktion f gilt:

p ist eine **Wendestellen** von f => **$f''(p)=0$**

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

Ist f eine Abbildung von A auf die reellen Zahlen, I ein Intervall von A und p eine innere Stelle von I dann gilt:

$f''(p)=0$ und $f'''(p)\neq 0$ => p ist eine Wendestelle von f.

4) Zusammenfassung für Kurvendiskussion

Begriffe

Extrema: Oberbegriff , der die beiden Begriffe Maximum und Minimum beinhaltet.

(lokales) **Maximum:** Alle Funktionswerte in einer Umgebung U um das Maximum sind kleiner als der Funktionswert im Maximum $f(x_{Max}) > f(x)\,;\, x \in U$

(lokales) **Minimum:** Alle Funktionswerte in einer Umgebung U um das Minimum sind größer als der Funktionswert im Minimum $f(x_{Min}) < f(x)\,;\, x \in U$

Krümmung einer Kurve in einem Punkt P gibt an, wie stark die Kurve in einer Umgebung U um diesen Punkt P von einer Geraden abweicht.
(anschaulich: Größe des Lenkeinschlags beim Abfahren der Funktion in positive x-Richtung)

Wendepunkt: Krümmungsverhalten wechselt von Linkskrümmung auf Rechtskrümmung oder umgekehrt (L-R-Wendepunkt oder R-L-Wendepunkt)

Welche Bedeutung hat die erste Ableitung f ´(x) einer Funktion f(x)?	**Welche Bedeutung hat die zweite Ableitung f ´´(x) einer Funktion f(x)?**	**Welche Bedeutung hat die dritte Ableitung f ´´´(x) einer Funktion f(x)?**
Monotoniekriterium Ist **$f'(x) > 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **streng monoton steigend** auf I Ist **$f'(x) < 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **streng monoton fallend** auf I Ist **$f'(x) \geq 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **monoton steigend** auf I Ist **$f'(x) \leq 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **monoton fallend** auf I	**Krümmungskriterium** Ist **$f''(x) > 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **linksgekrümmt** auf I Ist **$f''(x) < 0$** für alle $x \in I$, so ist f(x) **rechtsgekrümmt** auf I	
Extrema: notwendige Bedingung: waagerechte Tangente also **$f'(x_{Ext}) = 0$**	***Minimum*** *hinreichende Bedingung:* *Linkskrümmung also $f''(x_{Ext}) > 0$* ***Maximum*** *hinreichende Bedingung:* *Rechtskrümmung also $f''(x_{Ext}) < 0$*	
	Wendepunkte: notwendige Bedingung: keine Krümmung also **$f''(x_W) = 0$**	***Rechts – links –Wendepunkt*** *hinreichende Bedingung:* *Krümmungswechsel von r zu l also $f'''(x_W) > 0$* ***Links – rechts - Wendepunkt*** *hinreichende Bedingung:* *Krümmungswechsel von l zu r also $f'''(x_W) < 0$*
waagerechte Tangente also **$f'(x_{Sattel}) = 0$**	**Sattelpunkte (Terrassenpunkte):** keine Krümmung also $f''(x_{Sattel}) = 0$	Krümmungswechsel also $f'''(x_{Sattel}) \neq 0$