Vom Zählen zu den Zahlen

Über Ziffern, Zahlen und Zahlsysteme

Andreas Pester

Carinthia Tech Institute

a.pester@cti.ac.at

Arithmetica Gregor Reisch, 1503

Zur Linken der Arithmetica der altgriechische Gelehrte Pythagoras mit einem Rechenbrett. Zur Rechten der spätrömische Philosoph Boetius mit den neuen arabischen Ziffern. Da der Blick der Arithmetica in Richtung der arabischen Ziffern geht und auch ihr Gewand damit bedeckt ist, scheint der Streit zwischen „Abakisten“ und „Algoristen“ bereits entschieden. Das Ziffernrechnen hat sich bei Mathematikern und Astronomen sehr schnell durchgesetzt. Der Abakus spielte nur noch im kaufmännischen Bereich eine Rolle und wurde in der Französischen Revolution endgültig verboten.

Gliederung

- Einführung
- Von den Anfängen des Zählens – der Wahrnehmung von Mengen
- Von der anschaulichen Mengen*vorstellung* zum abstrakten Zahl*begriff*
- Berechenbarkeit als kognitive Operation
- Zahlen und Zahlsysteme
- (Be-)Rechnen als soziales Bedürfnis – altägyptische Mathematik
- Zahlrechnen als kulturelle Leistung – die altbabylonische Mathematik
- Der universelle Anspruch altgriechischer Mathematik – vom Rechnen zum arithmetischen Nus
- Römische Ziffern und praktisches Rechnen
- Das dezimale Positionssystem – *die* kognitive Leistung indischer Mathematik
- Die sonderbare Geschichte der Zahl „Null“
- Binäre, Hexadezimale, p-adische Zahlsysteme

These

- Der Zahlbegriff und die Operationen des Rechnens gehören zu den *bedeutensten* kognitiven Leistungen der Evolution des menschlichen Denkens
- Das Zahlzeichensystem gehört zum umfassenderen System der Sprachzeichen

Methodisches Vorgehen

parallele Darstellung von kognitiver und historischer Entwicklung

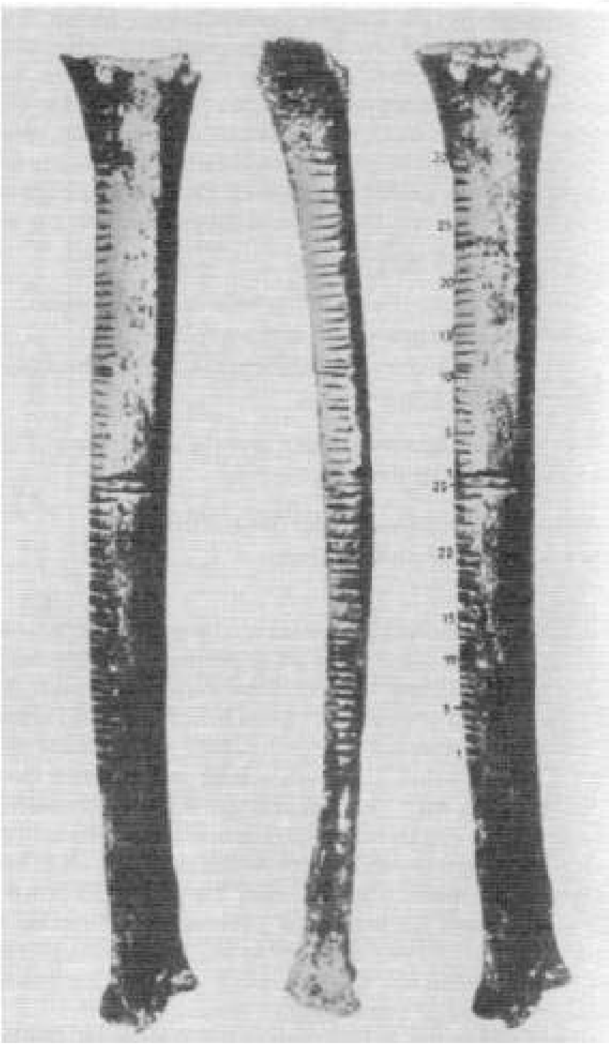
- Soziale & kognitive Anforderung: Berechenbarkeit
- Kognitive Operationen

- Historische Abschnitte
- Bedeutende Leistungen

Von den Anfängen des Zählens – der Wahrnehmung von Mengen

- Erkennen von unterschiedlichen Anzahlen – angeborene Leistung des Nervensystems von Tieren ⇒ s. Bienen, Tauben
- Allgemeiner Mächtigkeitseindruck einer Menge gleichartiger Dinge *versus* Anzahl verschiedener Dinge (letzteres können Tiere nicht)
- Wort ⇔ Zeichen: Die Bezeichnung von Anzahlen erfordert das Aufbrechen des Mächtigkeitseindrucks
- Nur die *konstruktive* Benutzung von Benennungs-ausdrücken führt zur unterscheidenden Bezeichnung von *beliebig großen* Mengen

Zählknochen



Speiche eines jungen Wolfes. Die Einkerbungen sind 25000 – 30000 Jahre alt. Sie zeigen eine Fünferbündelung. Dies besagt, das gezählt wurde.

(Aus: Detlefsen M., Kerbknochen und Kerbhölzer. Wiss.u.Fortschritt, 27.9,1977, S. 396)

Erste historische Zeugen des Zählens

- Erste überlieferte Zahlzeichen – vor ca. 25000 – 30000 J. → Cro-Magnon-Zeit

Fixierung einer Menge durch Kerbung	→	Nur Zeichen für Eins-Element und 1-1-Zuordnung
Bezeichnung durch ein Zahlwort	→ wurde 20000 Jahre später gelöst	Jede *unterscheidbare* Menge erfordert *spezifische* Bezeichnung (vom Bild zum Symbol)

Kognitives Problem

Gesucht sind Zeichen für Anzahlen, die beliebig mächtige Mengen ausdrücken und leicht erlern- **und** benutzbar sind

Lösung !!!

Herausbildung von Zahlystemen – Festlegung des Zahlbegriffs innerhalb eines Systems

Soziale Bedürfnisse der Lösung des Zählproblems

Agrarische Gesellschaft und Stadtstaaten beginnend mit dem 6. Jt.v.Chr.

- Handel, Tausch, Eigentums-, Besitzverhältnisse, Schulden, Guthaben – klare eindeutige Fixierung
- Beobachtungen von Regelmäßigkeiten in der Natur für die Landwirtschaft und Kultzwecke (Vorhersage der nahen Zukunft)
- Interne Bedürfnisse der Entwicklung der Zahlsysteme

→ **Zahlsysteme, Rechentechniken, Algorithmen**

Elemente eines Zahlsystems

- Reihung - I, II, III, IIII, III..III??
- Bündelung - 5-er, 10-er, 12-er, 20-er, 60-er
- Stellensystem - Position der Ziffer bestimmt Wert der Zahl

Sowohl Bündelung als auch Stellensystem sind notwendig für Darstellung und kognitive Beherrschbarkeit beliebiger Mengen von Anzahlen

Von der anschaulichen Mengen*vorstellung* zum abstrakten Zahl*begriff*

- Perzeptiver Mächtigkeitseindruck bei Naturvölkern – noch kein Zählen
- Isolierung von EINS und von PAAREN – Zahlname Bezeichnung von auffallenden Eigenschaften (Eins – Mond o. Mann, Zwei – Tag o. Frau)
- Zählreihe beginnt mit DREI (EINS, ZWEI, DREI, VIELE)
- FÜNF weitere historische Zählgrenze

Ikonische Zahl – Bildzuordnungen:
Hindernis für die Erweiterung der Zählgrenze !!!
s. Berichte von Missionaren

Berechenbarkeit als kognitive Operation

- Ikonisches Zählen
- Zählen mit einer Hilfsmenge –
  1. Abstraktionsstufe
- Bündelung von Objekten der Hilfsmenge
- Bündelung von Zahlzeichen –
  2. Abstraktionsstufe – symbolisches Denken

Ikonisches Zählen

Zählen an bekannten Repräsentationsmengen – Zählklassen – (Zählen des anschaulich Ähnlichen)

- Körperzahlen eines Papuastammes nach Menninger:
  - 1 = rechter Kleinfinger; 2,3,4 = Ring,- Mittel-, Zeigefinger
  - 5 = Daumen; 6 = Handgelenk; 7 = Ellbogen
  - 8 = Schulter; 9 = Ohr ; 10 = rechtes Auge
- Zahlworte in Abhängigkeit von Art der gezählten Gegenstände oder der mit ihnen durchgeführten Tätigkeit (kolumbianische Indianer, Fidschi-Insulaner)
- Rechnen ohne Zahlworte (Nüsse – Rechenstäbchen)

Kognitive Vorstufen des Zählens

1. Herausbildung von Ziffern (Zahlzeichen)
   - Ziffern – Benennung – **konstruktiver** Aufbau von Ziffernsystemen :
   - Beispiel (australischer Stamm):
     1 = enea, 2= petcheval, 3 = petchevalenea, 4 = petcheval-petcheval

begrenzte Anzahl von Zahlworten zur
Bezeichnung von größeren Anzahlen
additiver Aufbau der Zahlreihe

Weitere Kognitive Vorstufe des Zählens

2. Homogenisierung des zu Zählenden
   - Zuordnung der Objekte zu einer Hilfsmenge (Stäbchen, Muscheln, Rechensteine usw., Zahl*bezeichnung* und Zahl*begriff* fallen nicht zusammen)
   - Übertragung der Zahlbezeichnung auf die Hilfsmenge (Abstraktion von den dinglichen Eigenschaften des zu Zählenden, Zählen an Hand von Repräsentanten)

Bündelung und Reihung für Zahlbenennungen in der (Laut)-Sprache

- Die Benennung von Zahlen erzwingt die **Bündelung** der Zahlen – konstruktives Prinzip in der Zahldarstellung (Basis für spätere Stufung der Zahlsysteme)
- Homogenisierung ermöglicht die universelle Zählbarkeit aller Dinge durch **Reihung**
- Schriftliche Fixierung von Zahlen erfordert eine Darstellung der Bündelung →

  Positionssystem von Zahlen (dauerte 2000 Jahre länger als die Herausbildung des Alphabets für die Schriftsprache)

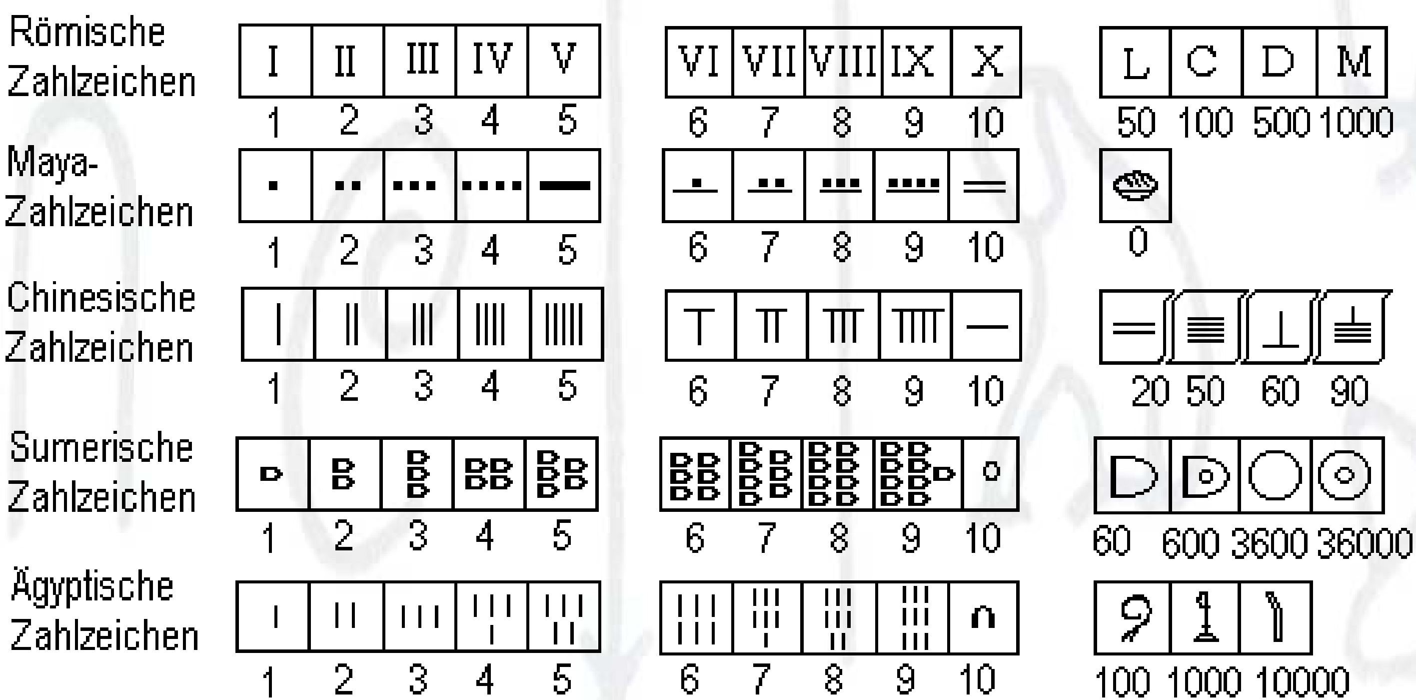
Die Bündelung und unübersichtliche Anzahlen

- 5, 10, 12, 20 – alte Zahlbündelungen – nachweisbar an Hand der alten und neuen Sprachen, alter Maß- und Münzsysteme
- Die alte Bündelungstechnik (~~IIII~~) reichte nur zur Befriedigung der eiszeitlicher Bedürfnisse für Zahlausdrücke
- **Problem:** Vorratswirtschaft der agrarischen Gesellschaft erfordert die Bezeichnung *unvorstellbarer* Anzahlen (von Getreide, Steinen und Tagewerke für den Bau) → **Lösung**

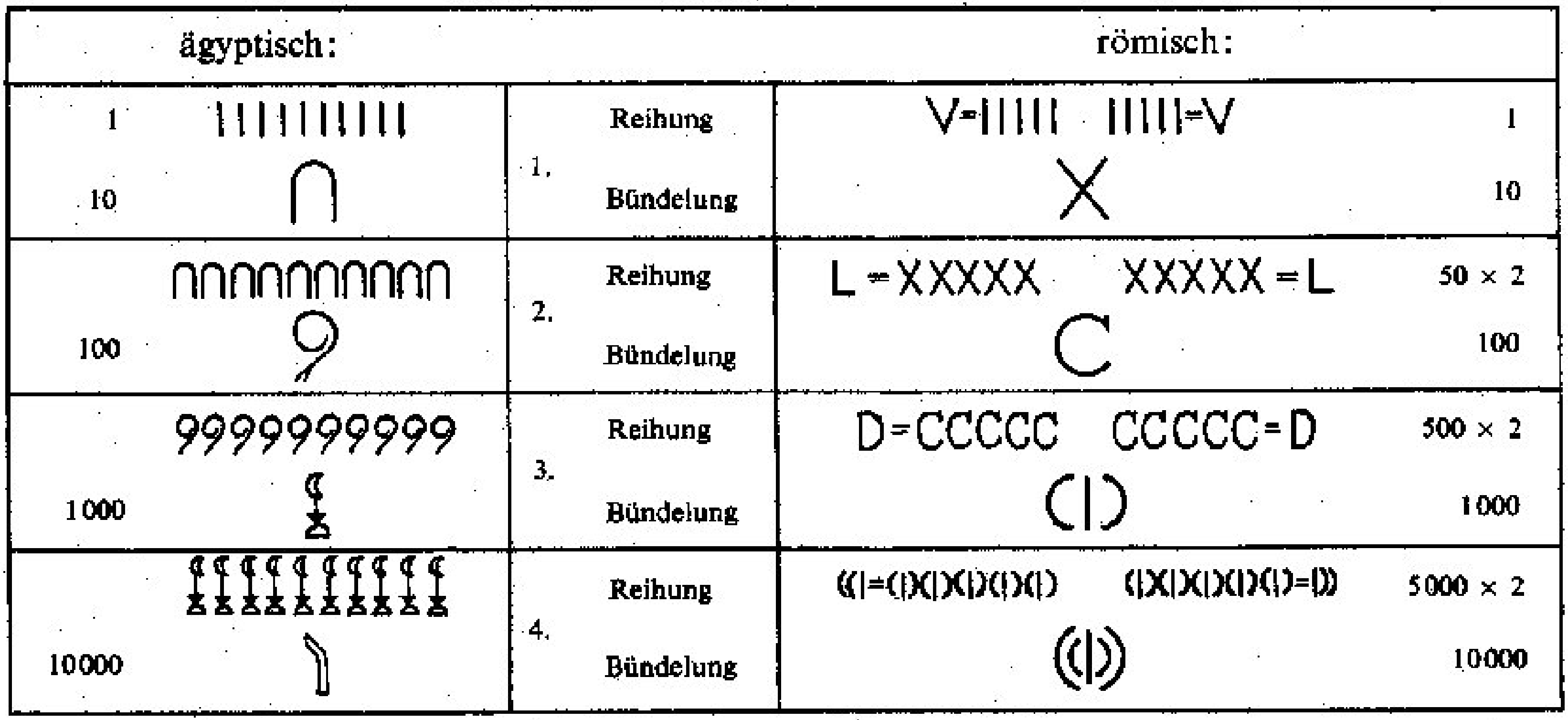
Bündelung von Ziffern

- Zeichen werden zu Gegenständen der kognitiven Technik des Bündelns – **symbolisches** Denken, Abstraktion, vereinfachte Darstellung unübersichtlicher Anzahlen
- **Hierarische** Stufung von Zahlzeichen bei wachsender Mächtigkeit der zu bezeichnenden Mengen
- Kognitive Operation der abstrakten Verdichtung erzeugt am Zahlbegriff **das Positionssystem**

Beispiele für die Bündelung von Ziffern



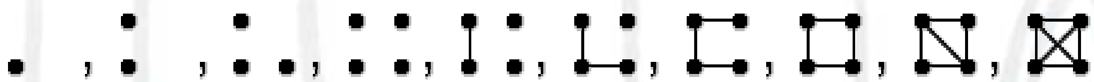
Vergleich der ägyptischen und römischen Zahlsysteme



Ägyptische und römische Zahlsysteme weisen viele Gemeinsamkeiten hinsichtlich Reihung und Bündelung auf, haben aber kein Positionssystem

Zahlen und Zahlsysteme: 5-er, 10-er, 20-er, 60-er – Systeme

- Bündelung von Zahlzeichen : I, II, III, IIII – alt
- siehe auch die neuen Formen der Zahlenbündelung in der Statistik



- Einfache arithmetische Operationen mit Zahlen

(Be-)Rechnen als soziales Bedürfnis – altägyptische Mathematik 1

- Längen- und Gewichtsmaßen - gemeinsames Vielfaches eines bekannten Maßes - Tauschen ist Messen
- Zeitmaße - schaffen Vorhersagbarkeit von Prozessen aller Art (Natur, Schulden, Kommunikation)
- Gesucht: numerische Erfassung von Eigenschaften der Realität – Erprobung der Leistungsfähigkeit von Zahlsystemen
- Zahldarstellung und Berechnungsweisen werden Gegenstand des Denkens

(Be-)Rechnen als soziales Bedürfnis – altägyptische Mathematik 2

- Quellen: Fünf mathematische Papyri
- **Schreiber** im Alten Reich (2800 – 1800 v.Chr.) und Mittleren Reich (1600 – 1100 v.Chr.) - Verwaltungsfachleute, die lesen und RECHNEN konnten
- Ihre **Aufgaben**: Vermessung von Feldern, Projektierung von Bauwerken, Berechnung des Proviant fürs Heer, von Getreidemengen für Brot und Bier, Buchhaltung über Vorräte, Schulden, Zinsen

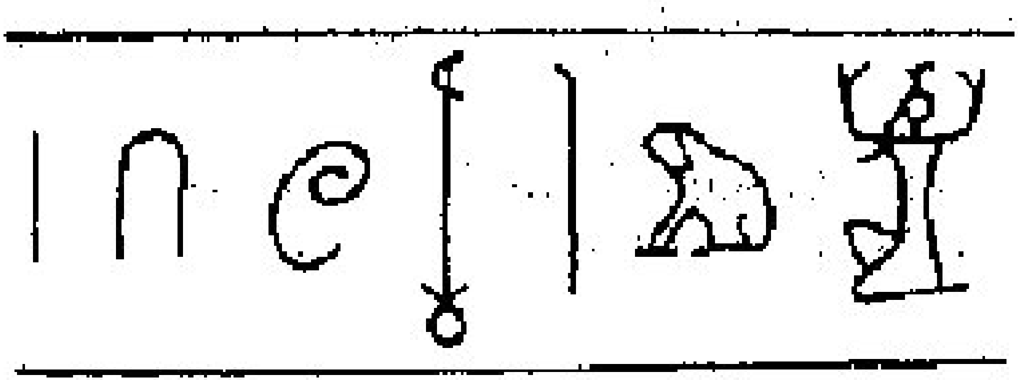
Das rechnende Denken der königlichen Schreiber

- „Man gibt Dir einen See auf, den Du graben sollst. Dann kommst Du zu mir, um Dich nach dem Proviant für die Soldaten zu erkundigen und sagst, rechne ihn aus ...“ (Erdmann)
- Altägyptisches rechnendes Denken ist additiv und baut auf dem ägyptischen Zahlsystem auf

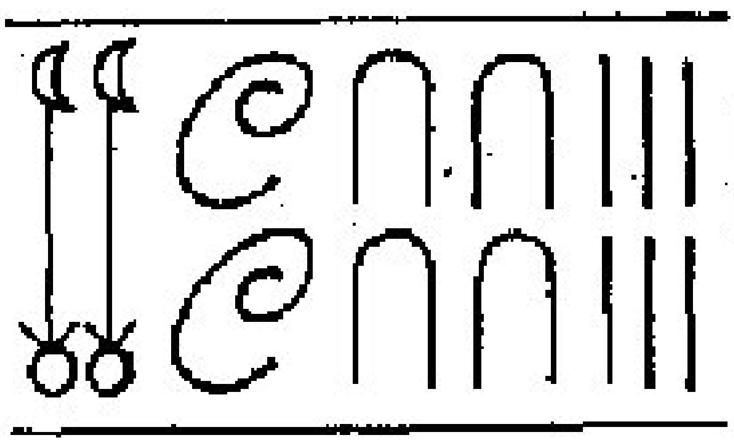
Elemente der altägyptischen Mathematik

- Zahlensystem: 10-er System, aber kein Positionssystem
- Daher: Rechnen vor allem additiv
- Bezeichnend die Symbole für 1000 – Lotos („viel“), 10^4 – Schilfkolben, 10^5 – Frösche
- Zahlendarstellung: additiv durch Reihung

Altägyptische Zahlen



Ägyptische Individualzeichen für 10-Potenzen bis 10^6



Die Zahl 2246 durch Reihung gebildet

Rechnen mit altägyptischen Zahlen – Multiplikation und Division

- Addition, Subtraktion – Abzählen
- Multiplikation, Division – fortlaufendes Verdoppeln und Halbieren
- 13 x 12:

/1	12
/2	24
4	48
/8	96
1+4+8	156

21:8

1	8
/2	16
/$\dot{2}$	4
4	2
/$\dot{8}$	1
$2+\dot{2}+\dot{8}$	21

Interpretation der Division

- 2/5 kein Ergebnis, sondern Aufgabe zur Verdoppelung des Bruches /5 : $2/5 = \dot{3} + 1\dot{5}$
- Tafeln mit Stammbrüchen nötig , Papyrus Rhind
- 1/12 - keine Zähler-Nenner-Schreibweise, sondern der Ausdruck 12 Teil von 1
- 2/5 und 2:5 zwei kognitiv verschiedene Aufgaben, da Multiplikation und Division nicht als invers bekannt waren , **sondern**

Multiplikation ist Addition
Division ist Multiplikation (und somit Addition)

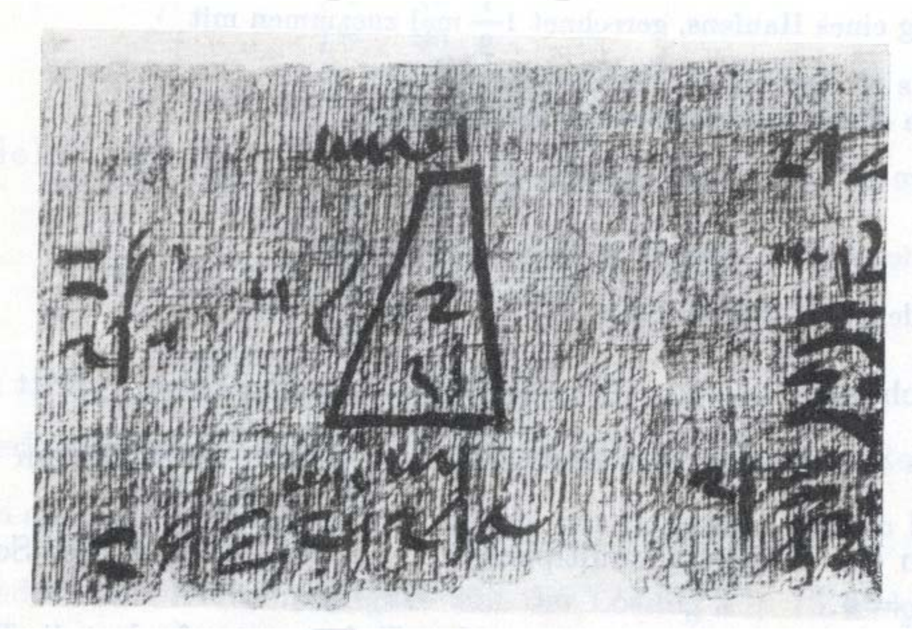
Grenzen der ägyptischen Rechenkunst

- Viele Zerlegungsregeln und Äquivalenzen zwischen Brüchen benötigt, denn nur bestimmte Zerlegungen sind Divisionen
- Ergo: Repräsentation von Zahlbeziehungen und Operationen sehr aufwendig – kognitiv der Weg zur Systematik der arithmetischen Operationen verstellt
- Quadratwurzel aus $\frac{=}{3} + \frac{}{6} + \frac{}{18}$ unlösbar

Leistungen der Ägypter

- Pśw-Rechnung – Aufstellung von Verhältnisgleichungen
- Hau-Rechnungen - Lösungen von Gleichungen
- Berechnung von $\pi = 4*(9/8)^2 = 3.16049$ exakter als bei den Babyloniern
- Exakte Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes $V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- Ägyptische Mathematik rechnet nicht, sie rechnet aus

Papyrusstumpfaufgabe



Soziale und ökonomische Anforderungen in Mesapotamien

- Ausgeprägter Kanal- und Wasserbau – Landwirtschaft künstlich bewässert
  - Dammbau, Feldvermessung, erste Bodenkataster
- Ausgedehnter Handel, da Rohstoffarmut
- → hochentwickelte Technik des Rechnens (Feldflächen in ganzen und gebrochenen Maßeinheiten), erste algebraische Verfahren

Zahlrechnen als kulturelle Leistung – die altbabylonische Mathematik

- Sumerische Zahlbegriffe älter als ägyptische, aber kognitiv leistungsfähiger
- Sexagesimales Zahlsystem (seit ca. 3000 v.Chr. bis ca. 280 n.Chr. - Ptolemaios)
- Unterschiede:
  - Typographie
  - Neue Zählgrenze 60 – kognitive Übersichtlichkeit für große Mengen

Quellenlage

- Viele Dokumente als Tontafeln erhalten
- Ganze Bibliotheken ausgegraben
- Mathematische Dokumente aus verschiedenen Zeiträumen
- Ca. 60 Keilschrifttafeln und 200 Zahlentafeln übersetzt

Babylonische Keilschrifttexte

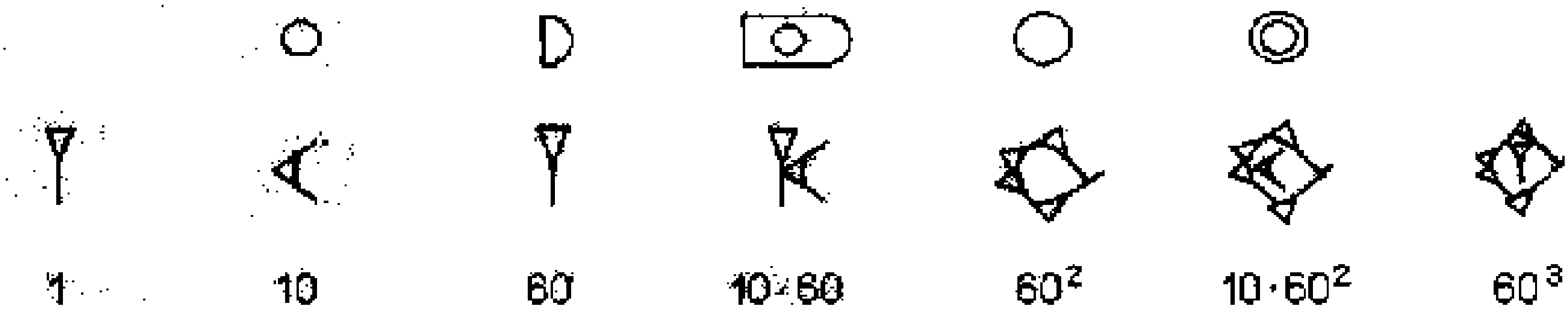
Abb. 2.6. Ausschnitt aus dem Keilschrifttext BM 85194 (ca. 9,6 cm × 9,6 cm). Illustration zur Berechnung der Breite der Grabensohle bzw. Dammkrone bei ringförmigem Wall

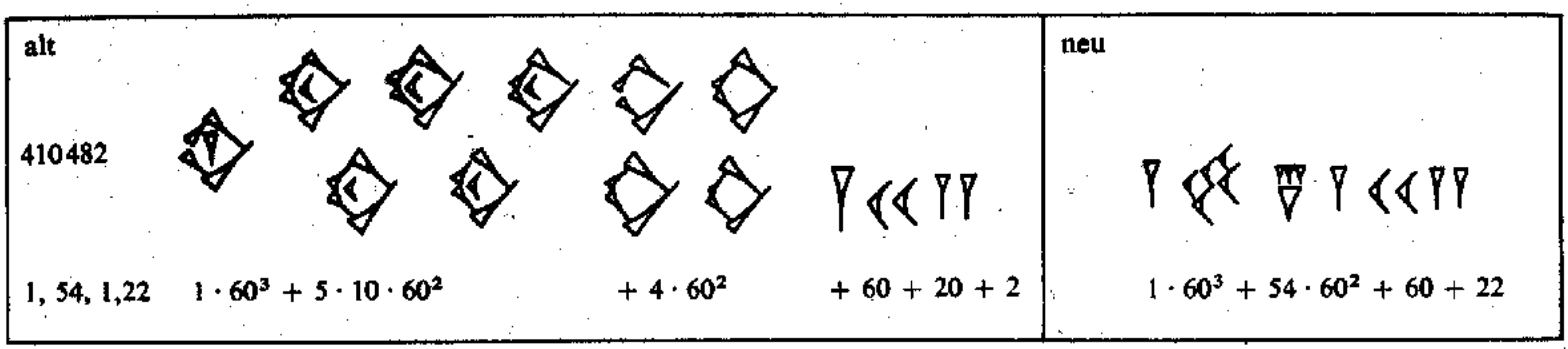
Alte Tontafel aus 3000 v.Chr.

Das babylonische Zahlensystem

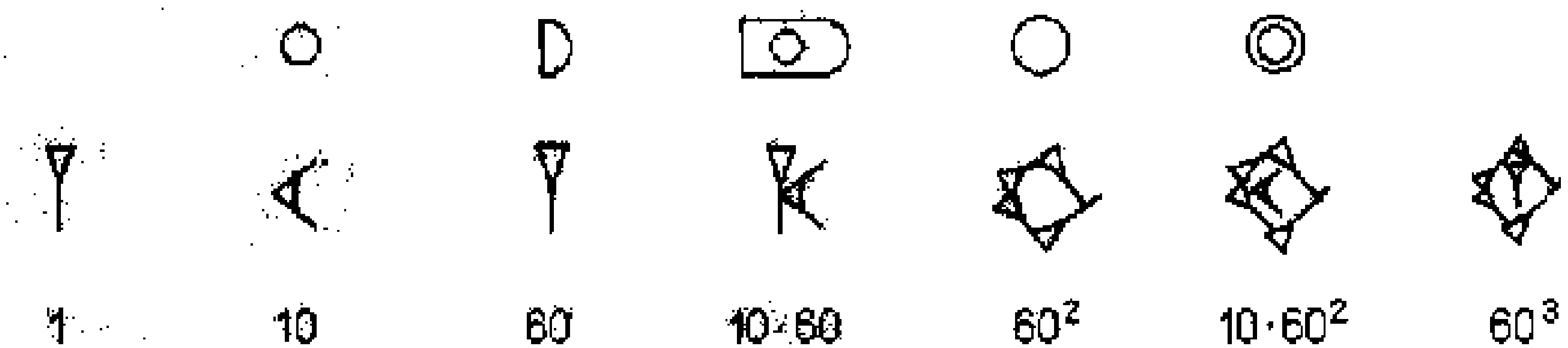
- Zählgrenzen 10 (Lautsprache) und 60 (Schriftsprache)
- Positionssystem in linearer Schreibweise
- Problem: Darstellung der Null z.B. 2064 –
  - Lösung: Lücke oder später das Zeichen <<
  - Niemals Null am Ende der Zeichenkette

Alte und neue babylonische Zahlen





Sumerische Zahlzeichen



Alte und neue sumerische Zahlzeichen
(Wussing, 1962)

Mathematische Vor- und Nachteile

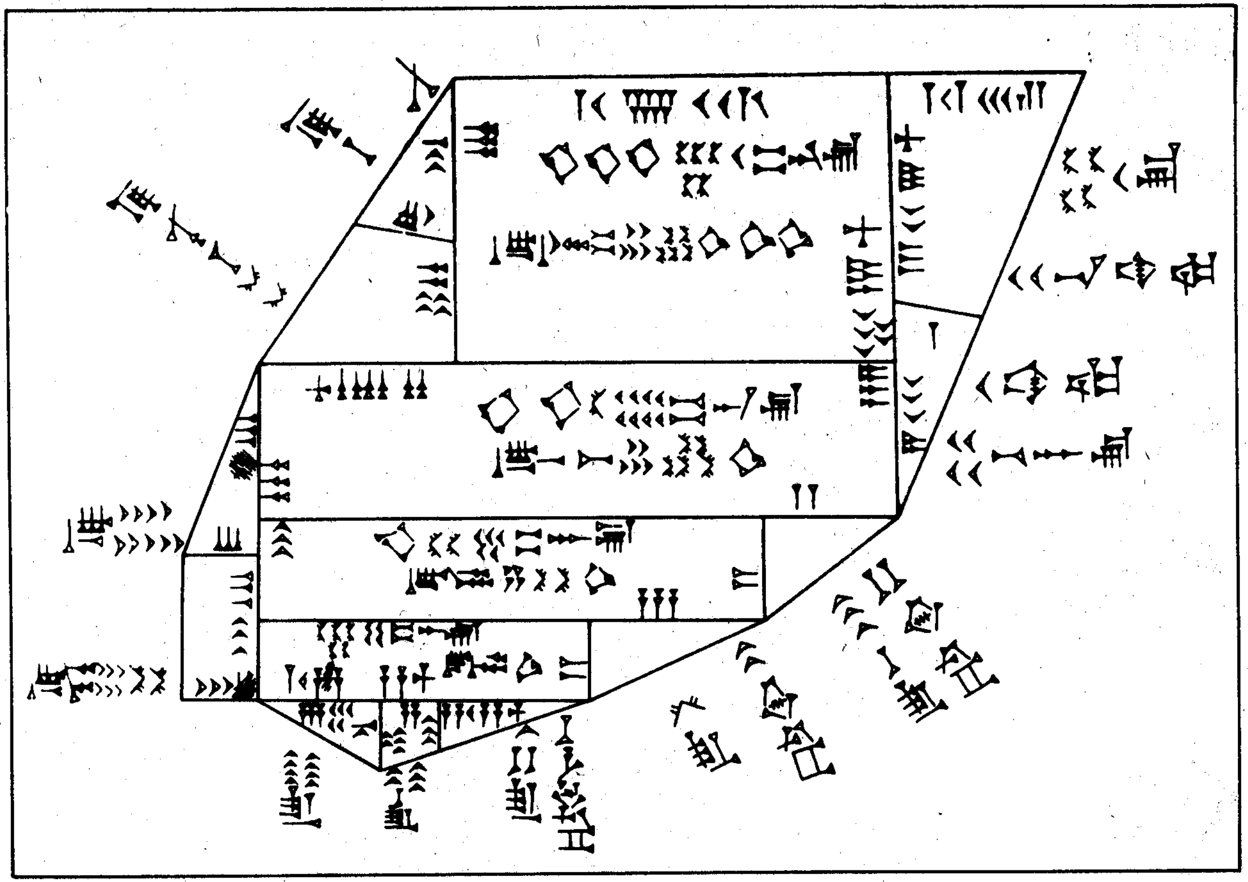
- Vorteile:
  - Einfachheit der Darstellung großer Zahlen und Zahlenverhältnisse
  - Bruchrechnung ganzzahlig möglich
  - Darstellung von ganz-gebrochenen Zahlen
- Nachteile
  - Einmaleins bis 59 x 59 - Multiplikationstafeln nötig
  - Wert von Zahldarstellungen nicht eindeutig bestimmt

Kognitive Vorteile des Positionssystems

- Messen heißt Teilen – ergo: Darstellung von Zahlenverhältnissen
- Grundzahl 60 enthält mehr ganzzahlige Ausdrücke für Zahlenverhältnisse (ganzzahlige Teiler) als jede andere kognitiv fassbare Zahlengliederung
- Alle vier Grundrechenarten nach algorithmischen Vorschriften – **ein** Regelsystem

→ vereinfachte Berechenbarkeit

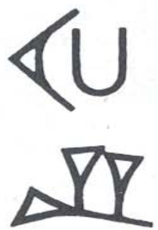
Feldaufteilung



Rechenverfahren

- Division ist Multiplikation: $\frac{b}{a} = b \bullet \frac{1}{a}$
- Reziproktabellen, Quadratwurzel- und Kubikwurzeltabellen sowie Tafeln n^2+n^3 vorhanden
- Vorteil der Positionsschreibweise: Alle vier Grundrechenarten nach einfachen Algorithmen ausführbar
- ein Regelsystem für alle Zahlen und Operationen

$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

58 Babylonische Zeichen für Brüche. Die Wahl dieser Symbole geht auf die Eigenschaften eines Hohlmaßes zurück, das bei Mengenaufteilungen verwendet wurde. (Aus Wußing 1962.)

Die Tafeln waren also Reziprokentafeln. Tab. 1 gibt Beispiele aus einer solchen Tafel (nach v. d. Waerden):

Tab. 1 Darstellung von Brüchen in babylonischen Reziprokentafeln. Der rechte Ausdruck ist im sexagesimalen Zahlen- und Positionssystem abgefaßt

$1:2=30$	$1:20=3$
$1:3=20$	$1:24=2,\ 30$
$1:4=15$	$1:25=2,\ 24$
$1:5=12$	$1:27=2,\ 13,\ 20$
$1:6=10$	
$1:8=7,\ 30$	
$1:9=6,\ 40$	

Die Zerlegung von $\frac{1}{8}$ in die sexagesimale Darstellung ist danach wie folgt zu interpretieren

$$0;\ 7,\ 30=\frac{7}{60}+\frac{30}{3\,600}=\frac{45}{360}=\frac{1}{8}.$$

Man kann die Notierung aber auch anders interpretieren $0; 7, 30$ mal 8 ergibt 1 (d. h. 60). Also $7\cdot 8=56$ plus $30\cdot 8:60=4\cdot 56$ plus $4=60$. Die Reziprokentafeln sind demnach auch Multiplikationstabellen. Sie enthalten die Produkte $a\cdot b^{-1}$, aber auch die Produkte $a\cdot b$. Das Dreifache von $0;\ 7,\ 30\ \left(=\frac{1}{8}\right)$ beträgt $(0;\ 22,\ 30)$, denn

$$\frac{22}{60}+\frac{30}{3\,600}=\frac{135}{360}=\frac{3}{8}.$$

Babylonische Geometrie

- Praktische Dammberechnungen verquickt mit abstrakten Problem
  - Proportionalitäten am Dreieck
  - Trigonometrischer Cotangens
  - Berechnung von $\pi = 3$ bzw. $\pi = 3\frac{1}{8}$
  - Satz von Thales
  - Satz des Pythagoras

Mathematik entsteht (1000 v.Chr.)

- Berechnung von Seiten rechtwinkliger Dreiecke mit dem Satz des Pythagoras
- Pythagoreische Zahlentripel (5:12:13, 8:15:17, 20:21:29 usw.) nach den Formel (a, b, c) mit $a=r^2-s^2$, $b=2rs$, $c=r^2+s^2$
- Berechnung werden nach mathematischen Problemklassen geordnet
- Symbolische Fachsprache entsteht – Aufstellung und Umformung von nicht-linearen Gleichungssystemen

$\longrightarrow$ algebraisches Denken

Leistungen und Schranken der Babylonier

- Durchbruch der Erkenntnisschranken des archaischen Denkens
- Babylonisches Zahlsystem - Weg zur Erfassung von Gesetzmäßigkeiten der Natur
- Strukturmängel: fehlende Null, mehrdeutige Zahlen
- Ideologische Mängel: „heilige Form der Ganzzahligkeit“ ($\pi = 3$)
- Fehlender universeller Aspekt von Zahleneigenschaften und -verhältnissen

Mehrdeutige Zahlen

= 1, 0, 4 = 3604

60 Ein Beispiel für die Mehrdeutigkeit von Keilschriftzeichen im sexagesimalen Zahlsystem. Die Zahl kann sowohl 3604 als auch $60^{1}/_{5}$ bedeuten. (Nach v. d. Waerden 1956.)

Griechisches Denken – Universalität und Widerspruchsfreiheit

- Der spezifische Beitrag der Griechen zur Erkenntnisgeschichte:
  - Die Beweisbarkeit von Zusammenhängen in formalen Strukturen
  - Das Prinzip des deduktiven Schließens als Methode, neue Erkenntnis zu gewinnen
  - Unterscheidung zwischen der Wahrnehmung der Dinge und ihrem Wesen, letzteres ist universell und erkennbar

Der universelle Anspruch (alt)griechischer Mathematik – vom Rechnen zum arithmetischen Nus

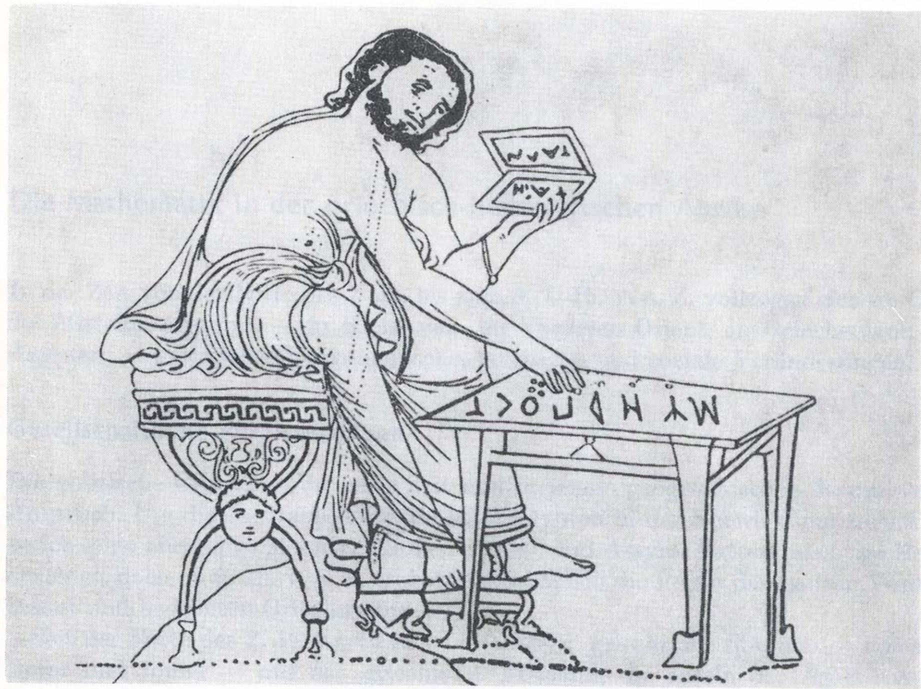
- Zahlensystem der Griechen Rückschritt gegenüber dem babylonischen - kein Positionssystem
- Zahlendarstellung und Rechnen sind wieder voneinander getrennt – gerechnet wurde mit dem Abakus (Rechenbrett)
- (natürliche) Zahlen und ihre Verhältnisse werden Gegenstand der Untersuchung

Die altgriechische Zahlschrift

61 Die altgriechische Zahlschrift, möglicherweise minoischen Ursprungs, verweist auf ein Fünfersystem für die Bündelung. Die faktorielle Schreibweise (*Δ*, *H*, *X* und *M* im Fünferzeichen) dürfte späteren Datums sein. Sie läßt eine Stufung der Zählreihe erkennen, die schon Verwandtschaft mit einem Positionssystem hat. (Nach Menninger 1958.)

- Zahlzeichen sind stilisierte Individualzeichen
- 5-er Bündelung

Der griechische Abakus



Griechischer Rechner am Tisch (Darius-Vase)

Die Buchstabenziffern nach 500 v. Chr.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϝ	Ζ	Η	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ
Zehner	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Q
	ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	q
Hunderter	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausender	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ϛ	͵ζ	͵η	͵ϑ

Rechnen mit griechischen Zahlen

$$25 \cdot 43$$

$$\begin{array}{rcr} 20 \cdot 40 & = & 800 \\ 20 \cdot 3 & = & 60 \\ 5 \cdot 40 & = & 200 \\ 5 \cdot 3 & = & 15 \\ \hline & & 1075 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa \cdot \mu = \omega \\ \varepsilon \cdot \mu = \sigma \end{array}\right\} ,\alpha \qquad \left.\begin{array}{l} \varkappa \cdot \gamma = \xi \\ \varepsilon \cdot \gamma = \iota\varepsilon \end{array}\right\} ,o\varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} ,\alpha \\ ,o\varepsilon \end{array}\right\} ,\alpha o \varepsilon$$

Rechnen contra Arithmetik

- Praktisches Rechnen und Arithmetik getrennt – im Gegensatz zu den Ägyptern und Babyloniern
- Griechen machen das begriffliche Denken selbst zum Gegenstand der Untersuchung (z.B. an Hand der Arithmetik)
- Eigenschaften von Zahlen → universelle Eigen-schaften (alles ist Zahl) – arithmetica universalis Der Nus ist arithmetisch
- Die Widerlegung des arithmetischen Weltbildes erfolgt auch nur geistig – indirekter Beweis

Zahlen der Pythagoreer

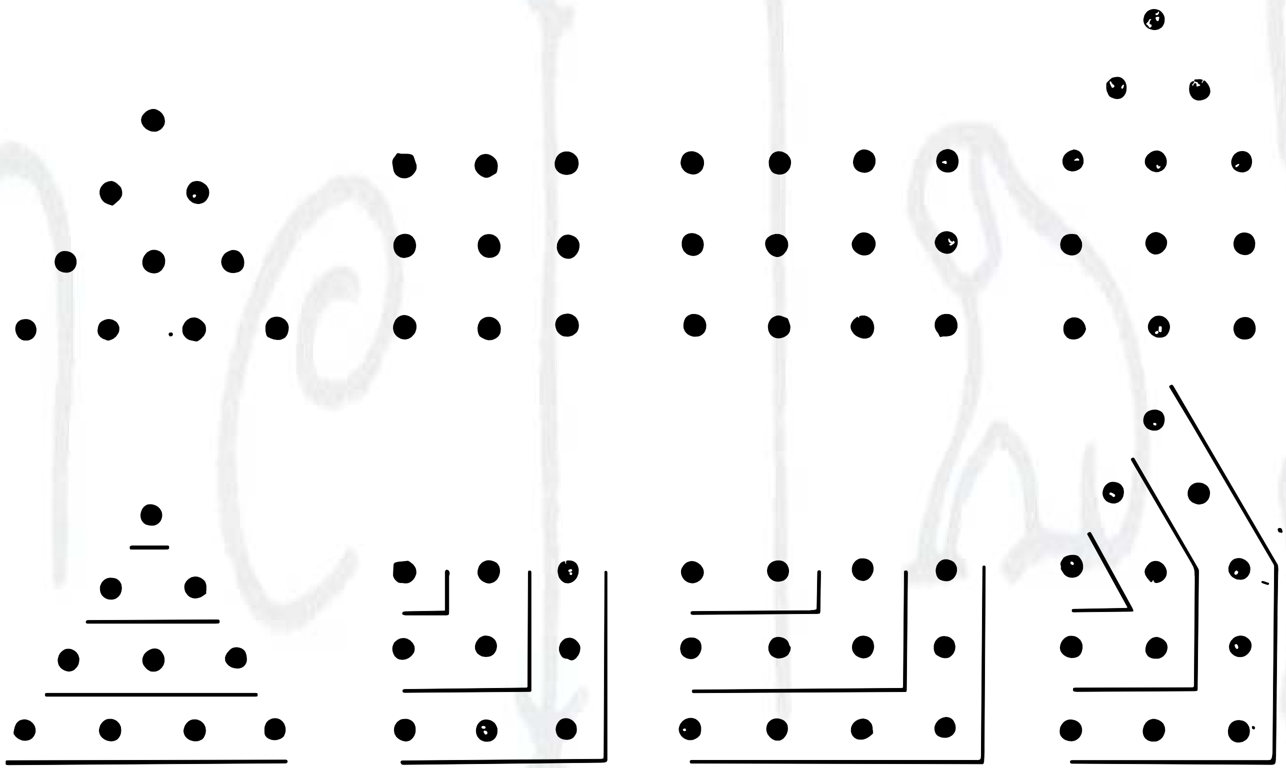
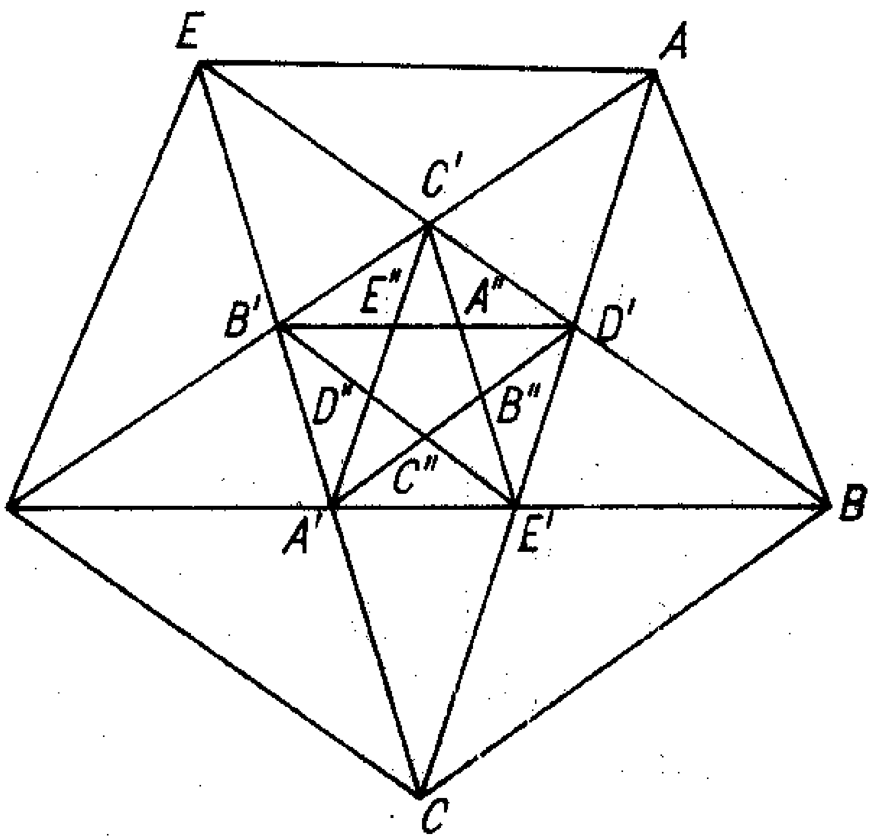


Abb. 3.5. Figurierte Zahlen: Dreieck-, Quadrat-, Rechteck- und Fünfeckzahlen

Der Zusammenbruch der arithmetica universalis



Diagonale – Seite des gr. Fünfecks = Diagonal des kl. Fünfecks;

Seite des gr. Fünfecks – Diagonale des kl. Fünfecks = Seite des kl. Fünfecks

Annahme: Diagonale und Seite sind kommensurabel

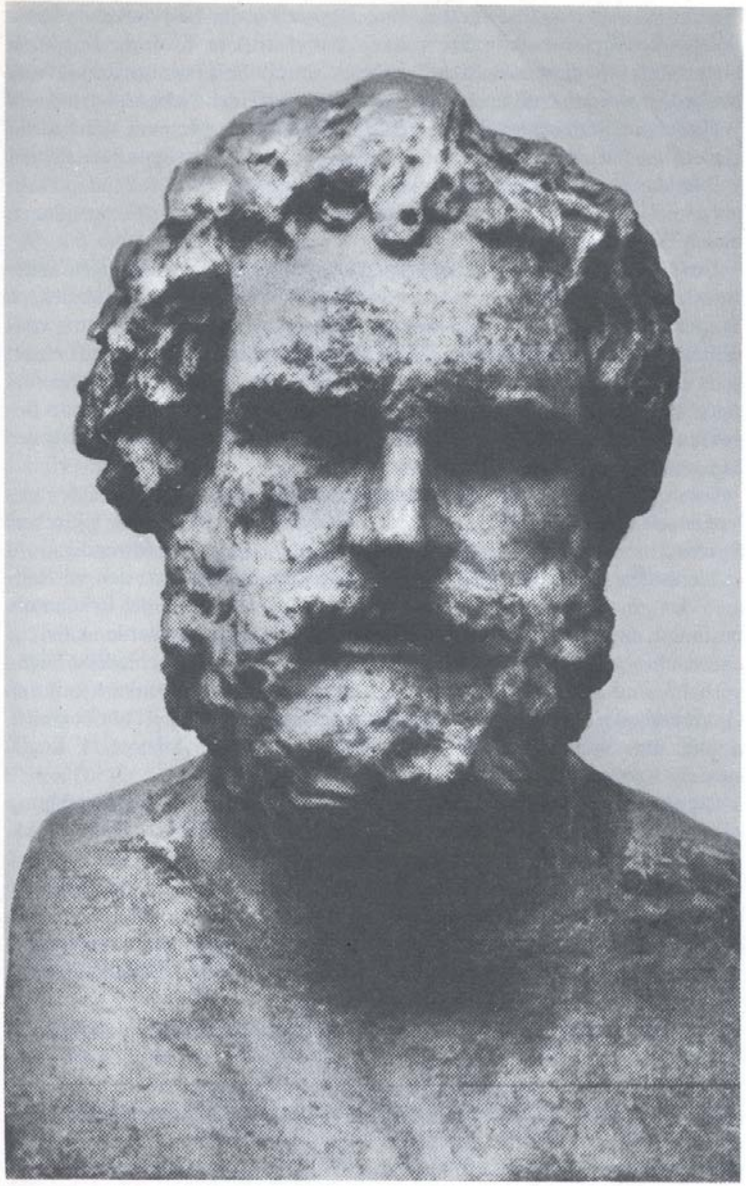
Beweis: Sie bilden ein rationales Verhältnis, d.h. die Wechselwegnahme muß nach endlich vielen Schritten Null ergeben

Widerspruch: Der Algorithmus läßt sich aber bis ins Unendliche fortsetzen.

ergo: Annahme stimmt nicht, ihr Gegenteil ist wahr: Die Diagonale und Seite eines Fünfecks sind inkommensurabel

Die Beweisbarkeit mathematischer Sätze

- Lösung eines anschaulichen quantitativen Einzelproblems
- Prinziplösung für eine Problemklasse
- Thales von Milet - entdeckte die Beweisbarkeit von (mathematischen) Lösungen (Invarianz alltäglicher Probleme in geometrischen Strukturen) → Erfassung universaler Zusammenhänge, kognitive Grundlage für Welt der Artefakte



70 Thales von Milet – der Entdecker des Beweisprinzips in der Mathematik.

Thales von Milet (um 600 v.Chr.)

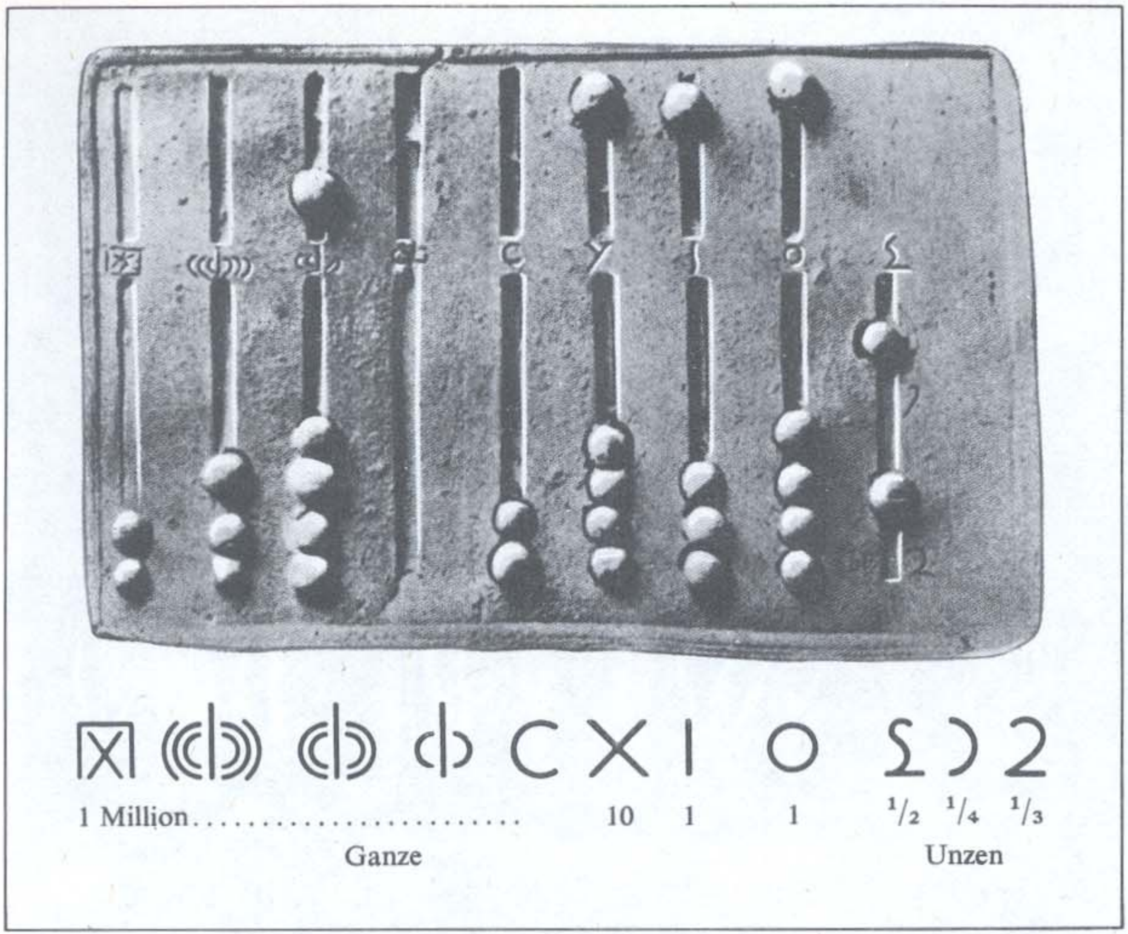
Erkenntnis durch logisches Schließen

- Systematik von Begriffen und Regeln des widerspruchsfreien logischen Schließens (Aristotelische Logik -)
  - Widerspruchsfreiheit
  - Prinzip der Identität
  - Tertium non datur
- Axiomatischer Aufbau der Mathematik in den Elementen des Euklid (ca. 325 v.Chr.)

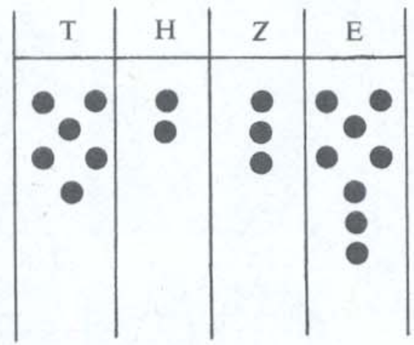
Römische Ziffern und praktisches Rechnen

- „Bei ihnen (Griechen) war die Geometrie in höchsten Ehren, deshalb war niemand berühmter als die Mathematiker. Wir (die Römer) selbst aber haben uns auf die wirkliche Nützlichkeit in den Vermessungen und im Rechnungswesen beschränkt“ (Cicero)
- Römische Zahlen - ein weiterer Rückschritt
- Keine effektiven Berechnungsalgorithmen möglich
- Zahldarstellung differiert zum Berechnungsgerät Abakus
- Daneben Fingerzahlen

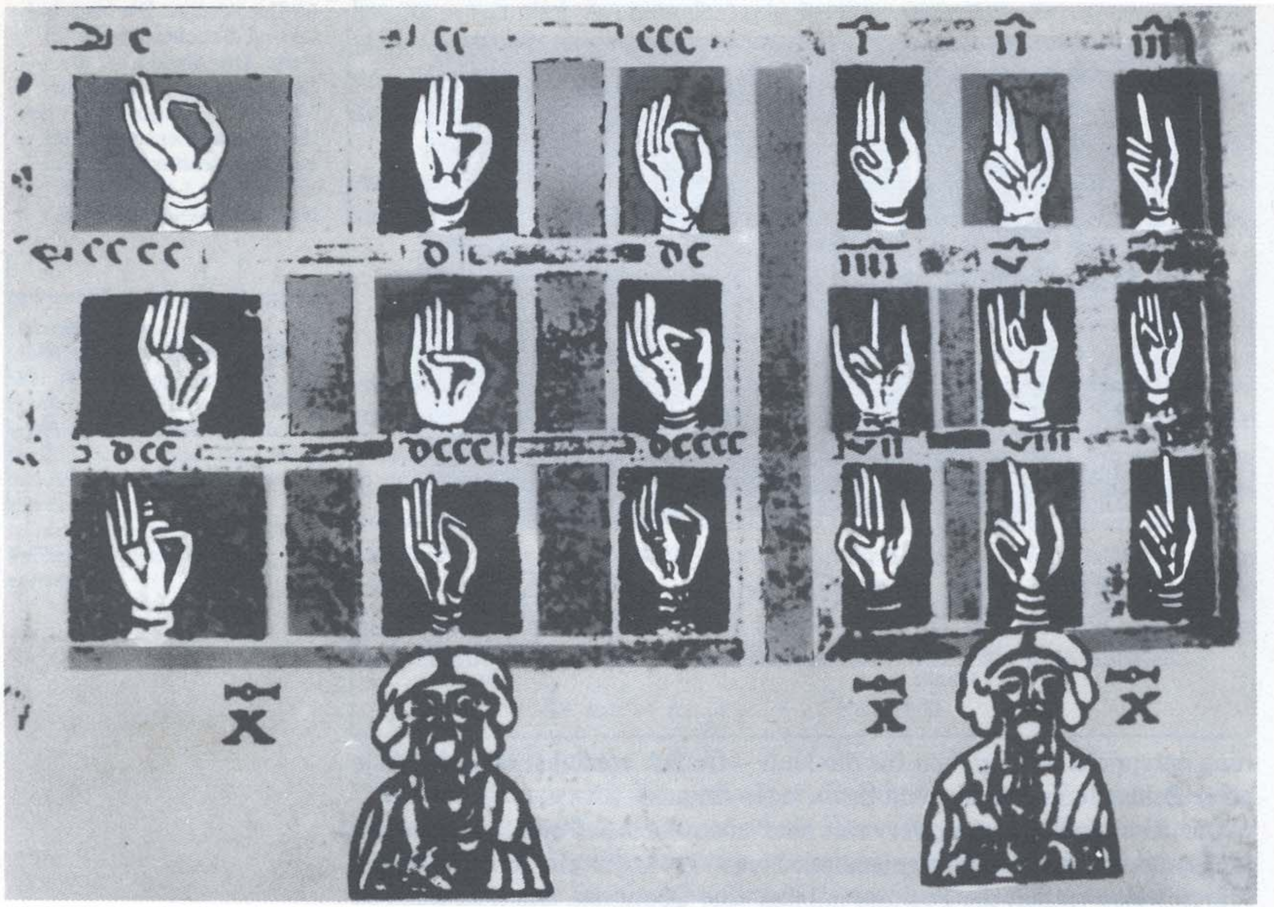
Römischer Abakus



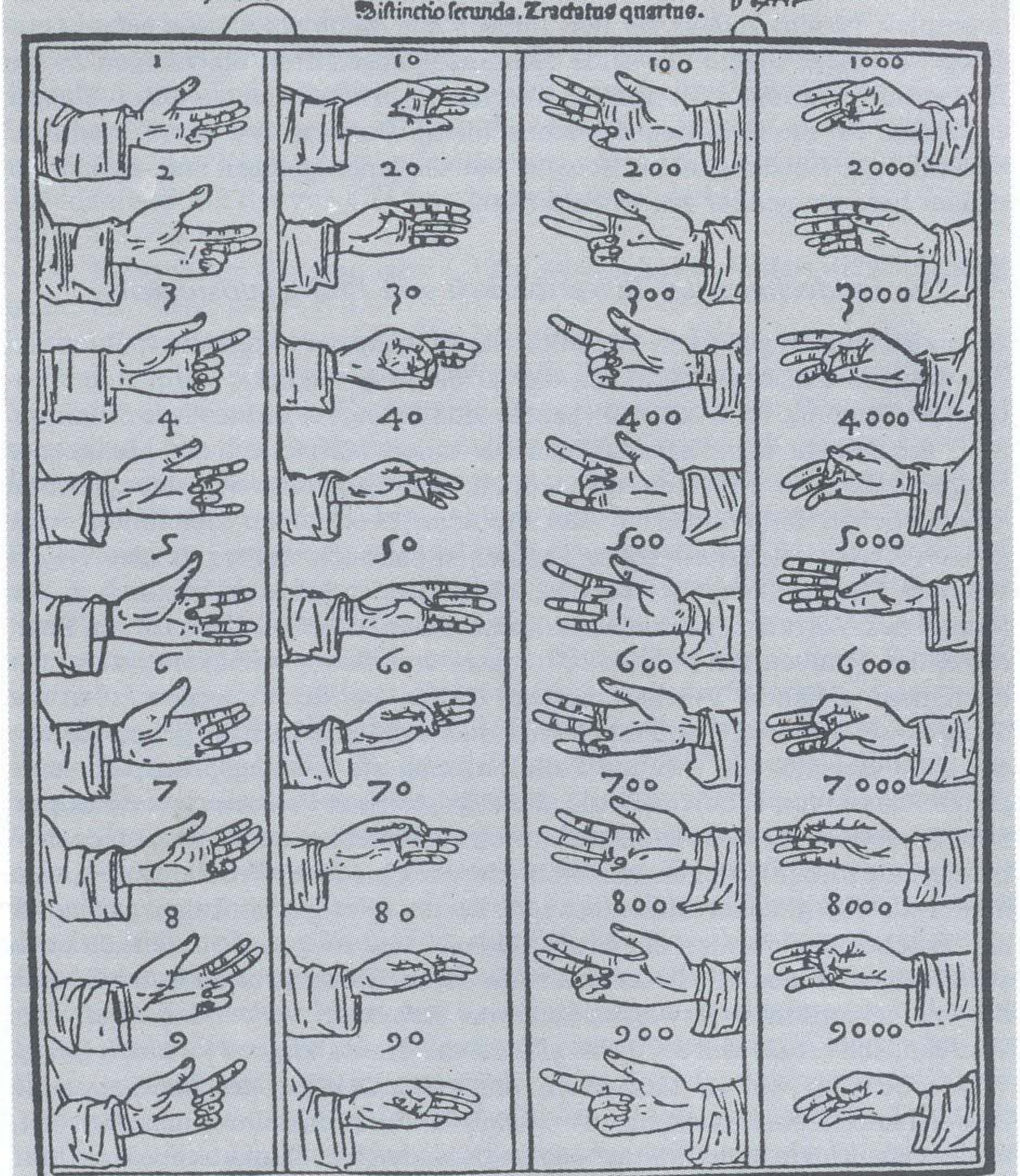
65 Der Abakus: Die historische (a) und die schematische (b) Form. Der Abakus hat das Stellensystem. Es gibt feste Verschiebungsalgorithmen für die Grundrechenarten. Aber auch hier fehlt noch das Zeichen für die Leerstelle, die Null. (Aus Menninger 1958.)



Fingerzahlen



offen ist die kognitive Vereinigung und Verkürzung von **Sprechen, Schreiben, Berechnen** zu einem einzigen Verfahren – das schafft erst das späte Mittelalter in den Rechenschulen

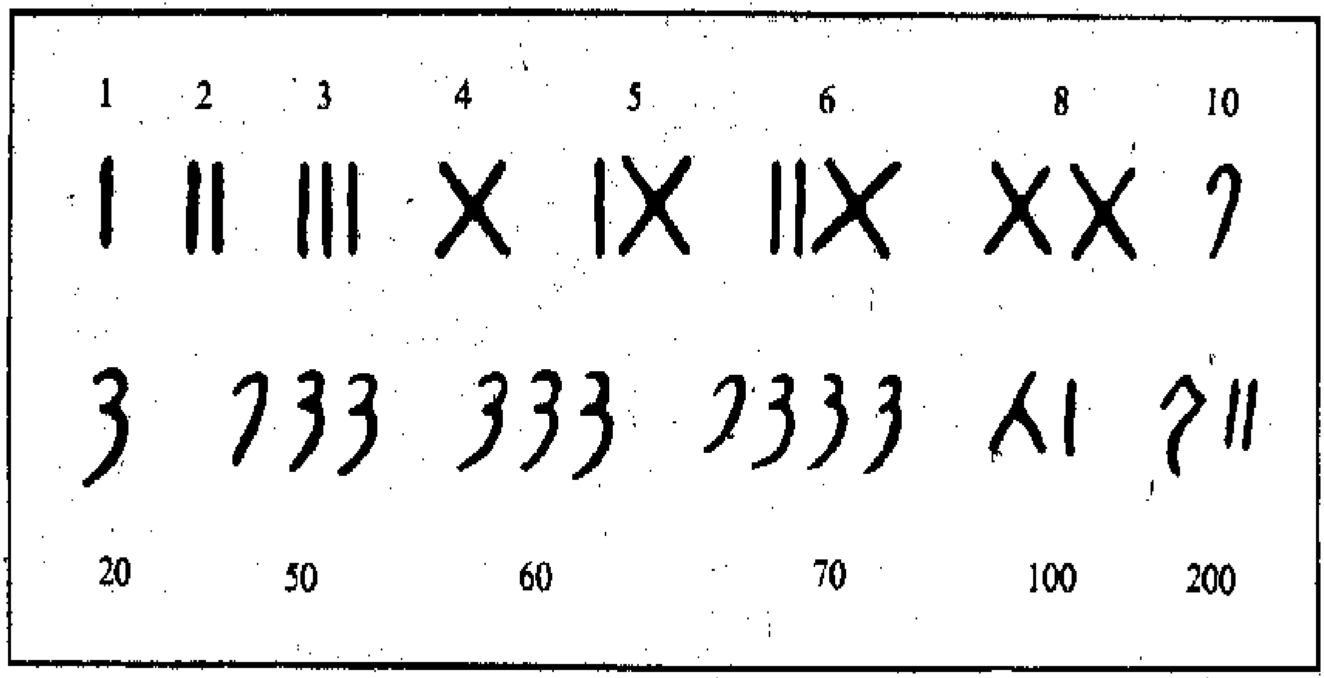


wie sie im ganzen Mittelalter für das handelsübliche Rechnen geübt wurden – aus der Summa de Arithmetica von Luca Paoli, einem italienischen Mathematiker Ende des 15. Jahrhunderts (linke Hälfte: linke Hand, rechte Hälfte: rechte Hand). Einzelnen arithmetischen Rechnungen entsprachen gedächtnisaufwendige Fingerbeugungen (vgl. Menninger 1958, S. 5ff.). Im 16. und 17. Jahrhundert wurden diese Fingerrechnungen durch das «Rechnen auf der Lihnien» der Rechenmeister wie z. B. Adam Ries abgelöst. (Aus Menninger 1958.)

Das dezimale Positionssystem – *die* kognitive Leistung indischer Mathematik

- Indische Zählweise vom Ursprung her dezimal
- Einflüsse von Nachbarn (Kharosti-Ziffern in Afghanistan vom 4 Jh.v.Chr. – 3. Jh.n.Chr.)
- Ab 6. Jh. dezimales System allgemein
- Ab 7.Jh. ***Null*** in Schriftform bekannt – Punkt bzw. Ringlein, Verbreitung über Handel
- Null indisch sunya – arabisch as-sifr – die Zahlschrift heißt nach dem Wesen der Sache, der Null
- 662 Erwähnung der Entdeckung der Inder in Syrien
- 773 Einführung der Arbeiten von Brahmagupta (598 –670) in Bagdad – indische Mathematik wird Bestandteil der arabischen Mathematik (al-Hwarizmi ca. 780 – ca. 850)

Kharosti-Ziffern



49 Altindische Kharosti-Ziffern mit 3 Bündelungen (4, 10 und 20). Neben den Kharosti-Zeichen waren auch Brahmi-Ziffern im Gebrauch, die völlig andere Eigenschaften aufwiesen (etwa 2. Jahrhundert v. u. Z.). (Aus Menninger 1958.)

Die sonderbare Geschichte der Zahl „Null“

- Die allmähliche Digitalisierung ermöglichte Hierarchisierung und allmähliche Loslösung der Zahl vom Objekt. „322 als Ziffernfolge drückt den Hierarchiewert des Zeichens, seinen symbolischen Verdichtungsgrad in Hunderten, Zehnern und Einern durch die Stelle aus ... Aber wenn keine Zehner vorkommen? Wenn es nur 2 über dreihundert sind? Wir erkennen daß das Stellensystem für die schriftliche Zahldarstellung erst mit der Null perfekt funktioniert. Was also fehlte war die Möglichkeit zur Verneinung. Z.B. eine Ausdrucksmöglichkeit für kein Hunderter oder kein Zehner. Beispielsweise bedeuten im milesischen Zahlensystem die Buchstaben „Tau“, „Chi“ und „Beta“ (τχβ) die Zahl 322,
- „Tau“ und „Beta“ (τβ) 302 und 32 „Lambda“ und „Beta“ (λβ). Die Verneinung wurde durch Weglassung analogisiert, jedoch nicht bezeichnet. Für die Griechen war 1 keine Zahl, sondern die Quelle und das Maß für alle anderen Zahlen. Was zu einer Vollständigen Digitalisierung des Zahlbegriffs fehlte war die Negation von 1, nämlich die 0.

Binäre, Hexadezimale, p-adische Zahlsysteme

- Die kognitive Geschichte der Zahlschrift ist mit dem indischen Dezimalsystem abgeschlossen, nicht die Geschichte der Zahlen
- Neue Bündelungen – 2, 16 – werden von moderner Technik gefordert
- Allgemeine Theorie der p-adische Zahlsysteme
- Neue Zahlklassen (transzendente, algebraische Zahlen)
- Neue formale Arithmetiken, z.B. intuitionistische Arithmetik

Literatur

- Friedhart Klix, Erwachendes Denken, Berlin 1985
- Hans Wussing, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Berlin 1979