SchülerInnenfehler in Mathematikaufgaben der schriftlichen AHS-Matura

Empirische Untersuchung
der Art und Häufigkeit dieser Fehler
unter besonderer Berücksichtigung von Fehlern,
die dem Lehrstoff der 5.-8. Schulstufe zuzurechnen sind.

Hausarbeit

im Fach Mathematik

am Institut für Mathematik der Universität Wien

eingereicht von

Mario Wunderl

Wien, im Dezember 1999

VORWORT

Lieber ein selbst erlebter Irrtum
als viele fremde Wahrheiten! [1]

Die Fehleranalyse hat sich mir als ein unerwartet komplexes, aber lohnendes Forschungsgebiet erwiesen. Das intensive Auseinandersetzen mit den Irrtümern von SchülerInnen beim mathematischen Arbeiten eröffnet neue Sichtweisen und zeigt, dass eine krude falsch-richtig-Beurteilung dem Denken der SchülerInnen oft nicht gerecht wird und im Sinne der Fehlervermeidung in vielen Fällen kontraproduktiv ist.

Die Arbeit ist länger geraten, als sie zu Beginn geplant war. Für vieles, das zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat, möchte ich mich bedanken:

☺ Bei den LehrerInnen und den MaturantInnen, deren Arbeiten ich untersucht habe; bei Direktorin Heidemarie Schrodt und Frau Christa Hirschvogel, die mich bei meinen Arbeiten im Archiv des BG + BRG Rahlg. (Wien, 6.) unterstützten.

☺ Bei meinen Schülerinnen und Schülern, die mir die Kraft gaben, diese Arbeit neben meiner intensiven beruflichen Tätigkeit abzuschließen.

☺ Bei Andrea Kucera, Eva Holleschek, Eveline Bayer, Herbert Wieninger, Herwig Eberle für die seelische Unterstützung; bei Silvia Proksch für ihr Verständnis. Und ganz besonders bei Astrid Zoch für das große Ausmaß und die Dauerhaftigkeit ihrer Lebensfreundschaft.

☺ Bei Prof. Günter Hanisch, der trotz seiner zahlreichen beruflichen Verpflichtungen immer Zeit fand, mich mit Rat und Tat zu unterstützen.

☺ Bei Prof. Hans Christian Reichel, der mit seinem Beispiel und seinen zahlreichen fruchtbaren Anregungen im Verlaufe meines Studiums den Keim dafür gelegt hat, dass aus mir ein guter Lehrer[2] geworden ist.

---

[1] Nach Simone Veil, gehört in Ö1 am 5. 2. 1999 um 6 Uhr 57.

[2] Meine SchülerInnen haben mir des Öfteren versichert, einer zu sein - u.a. wohl aus drei Gründen: Ich sehe SchülerInnen immer als Menschen, es macht mir Spaß, mit ihnen zu arbeiten, und bin offen für ihre Vorstellungswelten (die mich interessieren, in die ich mich hineinzudenken versuche und auf denen ich meinen Unterricht aufbaue).

INHALT

EINLEITUNG

Die Matura ist der Abschluss eines langen Weges. Ihre Inhalte sowie das Wissen von MaturantInnen sind häufig Thema von Diskussionen in der Öffentlichkeit oder Beiträgen in den Medien[1], leider oft in sehr plakativer Form bzw. auf erschreckend niedrigem Niveau[2]. Wissenschaftliche Beiträge zu einer fundierten Diskussion dieser Problematik findet man leider viel seltener[3].

Sowohl die Matura als auch die Mathematik haben in den Allgemeinbildenden und Teilen der Berufsbildenden Höheren Schulen Österreichs einen (zu?) hohen Stellenwert und bringen für viele Beteiligte (SchülerInnen, LehrerInnen, Eltern) große emotionale und arbeitsmäßige Belastungen: mehrere Prüfungen innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne; Stoff mehrerer Schuljahre; häufige Unkenntnis der hiefür notwendigen Lerntechniken. Der Stress der SchülerInnen wird noch dadurch erhöht, dass schwache Leistungen in einem Fach nicht durch gute Leistungen in einem anderen Fach ausgeglichen werden können (wie zum Beispiel im französischen Schulsystem).

Dieser Druck führt bei einigen SchülerInnen zum vorzeitigen Abbruch ihres Schulbesuchs und bei wohl nicht wenigen LehrerInnen zu "besonderen" Maturavorbereitungen (im Extremfall das Üben der Aufgaben, die dann zur Matura gegeben werden). Die damit errichteten potemkinschen Dörfer sind wohl vielen MaturantInnen vertraut.

Die größten Schwierigkeiten und Stolpersteine auf dem Weg zur Matura liegen für viele SchülerInnen im Fach Mathematik. Das gilt sowohl für die aufzuwendende Lernzeit[4] als auch für die Noten[5]. Letzteres fand sich auch bei

---

[1] Z.B. in Die ganze Woche vom 30. 6. 1999 mit der Schlagzeile "Mathematik-Unterricht quält Schüler ohne Nutzen" und der Zwischenüberschrift "Österreichisches Maturanten können oft nicht einmal Rechenaufgaben auf Hauptschulniveau lösen". Der Artikel bezieht sich u.a. auf SHAMOS 1995 und die TIMSStudy (z.B. in BAUMERT/BOS/WATERMANN 1999) und hat damit trotz des reißerischen Titels wenigstens brauchbare Quellen.

[2] Z.B. in Täglich Alles vom 7. 3. 1999 mit dem Aufmacher: "Maturanten wissen immer weniger". Der Titel erweist sich als dick aufgetragen: Im Blattinneren fand sich eine Befragung von nur 10 MaturantInnen mit 10 z.T. seltsam anmutenden Wissensfragen.

[3] Z.B. HANISCH 1985 oder die TIMSStudy aus Fußnote 1.

[4] Siehe z.B.: HANISCH 1990 (Seite 63): „Für Darstellende Geometrie (...), Mathematik, Latein und eventuell noch Französisch benötigen die Schüler am meisten Vorbereitungszeit" für Schularbeiten.

den hier untersuchten Maturaarbeiten wieder und ist in den Ergebnissen dokumentiert.[6]

Vom literarischen Denkmal des menschenverachtenden Mathematik-Lehrers Gott Kupfer in TORBERGs "Der Schüler Gerber" aus dem Jahre 1930 bis zum engagierten Plädoyer für mehr Sinn im Mathematikunterricht in Stella BARUKs "Wie alt ist der Kapitän?" (1985) spannt sich ein weiter Bogen - die darin beschriebenen negativen Ausprägungen und Folgen des Mathematikunterrichts bestimmen leider noch immer das Klima in vielen Schulklassen: mit zuviel Angst und zuwenig Sinn. Daran hat der "real existierende Unterricht"[7] wohl einen viel größeren Anteil als die Mathematik selbst.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit schriftlichen Mathematik-Maturaarbeiten und versteht sich als kleiner Beitrag zur Fehleranalyse, einer Forschungsdisziplin der Mathematik-Didaktik. Hier finden sich vor allem Arbeiten zur Grundschulmathematik und in großer Zahl auch zu wichtigen Teilbereichen des Mathematikstoffs der 5. bis 8. Schulstufe, wie z.B. der Bruchrechnung oder der Algebra. Wenig erforscht sind hingegen die Fehler aus dem Bereich der Oberstufenmathematik.

Ziel dieser Arbeit ist eine Bestandsaufnahme der Fehler, die von den SchülerInnen des Bundesgymnasiums und Bundesrealgymnasiums Rahlgasse im 6. Wiener Gemeindebezirk bei der schriftlichen Mathematikmatura gemacht wurden (in den Jahren 1991 bis 1998), und zwar unter besonderer Berücksichtigung von "Unterstufen-Fehlern". Mit dieser Kurzbezeichnung sind Fehler gemeint, die dem Lehrstoff der 5. bis 8. Schulstufe zuzurechnen sind.[8]

Das bedeutet im Wesentlichen, dass die untersuchten Fehler auf das Missachten von Regeln, die zum Lehrstoff dieser Schulstufen gehören, zurückzuführen sind. Dabei ist natürlich zu beachten, dass das Anwenden solcher Regeln im Kontext

---

[5] Siehe z.B.: TIEDEMANN 1977, zitiert in PESCH 1996 (Seite 6): Der höchste Anteil an Gymnasialversagern in der Oberstufe scheitert in Mathematik.

[6] Siehe Abschnitt F.1.

[7] Die Anlehnung an den Begriff des „real existierenden Sozialismus" kann als Denkanstoß über die große Diskrepanz zwischen Anspruch und Wirklichkeit des Unterrichts verstanden werden. Zur Kluft zwischen (Lehrplan-)Theorie und (Schul-)Praxis siehe z.B.: HANISCH 1990 (Seite 42, 49 und 83f), TREMSCHNIG 1995 (Seite 155).

[8] Dabei ist es unerheblich, ob es sich um eine Hauptschule oder um die Unterstufe einer AHS handelt (aus beiden Schultypen ist der Besuch einer AHS-Oberstufe möglich).

des neuen Lehrstoffs der folgenden Schulstufen mehr oder weniger zusätzliche Fertigkeiten und Fähigkeiten aus diesen Schulstufen erfordert.

Unterstufen-Fehler sind oft Gegenstand besonderen Interesses, wie einige Zitate von SchülerInnen, KollegInnen und aus Zeitungen zeigen sollen: "MaturantInnen können nicht rechnen." "Viele Fehler stammen aus der Unterstufe." "Mathematik ist aufbauend, da ist es ja kein Wunder, wenn sich Sünden und Lücken aus der Unterstufe bei der Matura rächen." "Ich hab bei fast jeder Schularbeit etliche SchülerInnen, die beim Lösen von Gleichungen Schwierigkeiten haben." "Auch unter den MaturantInnen gibt es einige, die nicht verstanden haben, was eine Variable ist und wie man damit umgeht." (Aus der Erinnerung sinngemäß wiedergegeben.)

Zusätzliche Motivation habe ich aus meiner mehrjährigen Tätigkeit als Mathematiklehrer im 2. Bildungsweg geschöpft, wo ich sehr oft feststellen musste, dass SchülerInnen bei ihrer Abschlussprüfung aufgrund eines erheblichen Anteils an Unterstufen-Fehlern schlecht oder gar negativ beurteilt wurden. Es war mir daher sehr recht, diese Problematik quantitativ und differenzierter untersuchen zu können[9].

Weitere Gründe für die Einschränkung auf Unterstufen-Fehler liegen darin, dass sie in allen Aufgabentypen zu erwarten sind (wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß), und dass ihr Auftreten nicht so stark von der speziellen Maturavorbereitung der jeweiligen Klasse abhängig ist.

Die Fehlerhäufigkeiten können erste Hinweise darüber geben, ob Unterstufen-Fehler so zahlreich sind, dass die Planung spezieller unterrichtlicher Maßnahmen zu überlegen ist (wobei vorher zu klären wäre, ob es sich eher um Flüchtigkeitsfehler oder um Fehler mit tieferen Ursachen handelt). Antworten auf die spannenden Fragen nach den Ursachen und Auswirkungen der Fehler und was die Fehler über das mathematische Wissen und Verstehen der SchülerInnen aussagen, können im Rahmen dieser Arbeit leider nur angedeutet werden.[10]

---

[9] Es wäre vielleicht interessant zu untersuchen, ob AbsolventInnen des 2. Bildungsweges (Externistenmatura, Berufsreifeprüfung, Studienberechtigungsprüfung) signifikant größere Schwierigkeiten mit Unterstufen-Fehlern haben als die MaturantInnen des 1. Bildungsweges.

[10] Die Auswirkungen von Defiziten im Lernstoff der Unterstufe auf den Schulerfolg der SchülerInnen in der Oberstufe (bis hin zum Schulabbruch) wäre ebenfalls eine interessante Fragestellung.

Zum Aufbau dieser Arbeit

In einem ausführlichen ersten Abschnitt A werden die theoretischen Grundlagen vorgestellt und - soweit nötig - näher besprochen.

Der empirische Teil der Arbeit wird im Abschnitt B vorgestellt, vom Untersuchungsplan zur Auswahl der untersuchten Maturaarbeiten, Aufgaben und Fehler. Im Abschnitt C geht es um die Kategorisierung der untersuchten Fehler.

In den Abschnitten D und E werden die Ergebnisse der Untersuchung dargestellt: Die Art der Fehler, geordnet nach Kategorien und mit vielen Beispielen; im Anschluss daran folgen die Häufigkeiten der Fehler. Weitere Ergebnisse wie z.B. die Häufigkeit der Note "Nicht genügend" sind im Abschnitt F zusammengefasst.

Zur verwendeten Schreibweise

Dem geschlechtergerechten Sprachgebrauch wurde im vorliegenden Text besonderes Augenmerk geschenkt, weil "viel zu lange schon werden Frauen 'mitgemeint' und durch die Verwendung maskuliner Personenbezeichnungen ignoriert".[11] So wurde z.B. durchgehend die bereits weit verbreitete Schreibweise mit großem I verwendet (wie z.B. in "SchülerInnen") und durch das markierte generische Femininum ergänzt. Letzteres bietet den Vorteil eines flüssigen Leseverlaufes und macht trotzdem sichtbar, dass Frauen und Männer gemeint sind (wie z.B. in "die Fehler einer SchülerIn").[12]

---

[11] KARGL/WETSCHANOW/WODAK 1999, Seite 11

[12] Siehe KARGL/WETSCHANOW/WODAK 1999, insbesondere Seite 63

A ALLGEMEINER TEIL

"Aus der Geschichte der pädagogischen und psychologischen Forschung wird deutlich, daß das Studium des Atypischen und Fehlerhaften sehr oft zu wesentlich bedeutsameren Erkenntnissen geführt hat als das Analysieren des Erfolgreichen."[1]

Am Beginn steht ein kurzer Überblick über diesen Teil der mathematik-didaktischen Forschung und die Grundüberlegungen der Fehleranalyse.

Im Anschluss daran wird die Methodik der (deskriptiven) Fehleranalyse besprochen, wobei das Hauptaugenmerk auf jenen Schritte liegt, die für die vorliegende Untersuchung von Bedeutung sind.

Breiter Raum ist dann dem Problem der Begriffsvielfalt in den Publikationen der Fehleranalyse gewidmet, um Missverständnisse durch fehlende oder unklare Begriffsdefinitionen zu vermeiden (Abschnitt A.2). Hier zeigt sich, dass Fehler in Mathematikarbeiten bei näherer Betrachtung keineswegs eine so "klare Sache" sind, wie es von vielen (NichtmathematikerInnen) angenommen wird.

Mit der gegebenen Themenstellung vergleichbare Arbeiten wurden trotz ausführlicher Literatursuche nur wenige gefunden (und die sind nur sehr eingeschränkt vergleichbar). Sie werden im Abschnitt A.3 besprochen.

"Lange Zeit wurden die meisten Schülerfehler einfach als Folgen einer allgemeinen Unwissenheit, der Unsicherheit oder des Zufalls interpretiert, wie man insbesondere in den Anfängen der behavioristischen Lerntheorien annahm, obwohl bereits Anfang dieses Jahrhunderts S. Freud das Sinnhafte der Fehlleistungen betont hatte und die Fehler des Verlesens, Verrechnens, Vergessens, Versprechens, etc. als Produkte bewußter und unbewußter Prozesse deutete bzw. auch die Zufallsfehler als kausal determiniert ansah."[2] Weil das Sinnhafte der Fehlleistungen im Mathematikunterricht am Ende dieses Jahrhunderts noch immer nicht in gebührenden Umfang anerkannt ist, soll im Abschnitt A.4 ein kleiner Beitrag dazu geleistet werden.

---

[1] RADATZ 1980b, Seite 214.

[2] RADATZ 1980b, Seite 216.

A.1 Die Fehleranalyse als Forschungsgebiet der Mathematik-Didaktik

"Mathematikunterricht ohne Schülerfehler ist undenkbar."[1]

Diese scheinbar banale Feststellung erweist sich bei näherem Nachdenken als fundamental für den Umgang mit Fehlern und die Einstellung (von LehrerInnen, SchülerInnen und besonders auch Eltern) zu Fehlern.

Die Grundannahme der Fehleranalyse:

Nach RADATZ geht die Fehleranalyse davon aus, dass "Fehler nur selten zufällig oder durch flüchtiges Verrechnen entstehen, ihnen liegt (fast) immer eine bestimmte Lösungsstrategie bzw. Regelstruktur zugrunde, die nachvollziehbar, begründbar und für die Schüler selbst sinnvoll ist."[2]

Mehrere Publikationen anderer AutorInnen fasst er in ähnlicher Weise zusammen: "... beruhen die meisten Schülerfehler - so wie die richtigen Problemlösungen im Mathematikunterricht - auf Anwendungen systematischer Regeln und Lösungsstrategien, die gewöhnlich keinen zufälligen sondern einen sehr sensiblen und individuellen Ursprung haben".[3]

(Die Problematik der Flüchtigkeitsfehler wird im Kapitel A.2.3 behandelt.)

Die Fehleranalyse in diesem Jahrhundert:

Nach einer "sehr intensiven und fruchtbaren Forschungsentwicklung in den 20er Jahren, abrupt unterbrochen durch bildungspolitische Zielveränderungen"[4] tauchten erst in den 80er Jahren wieder verstärkt Arbeiten zu Fehleranalysen auf. Diese Publikationen verfolgen im Wesentlichen zwei Zielrichtungen.

---

[1] SOMMER 1985, Seite 38. SOMMER beschreibt auch zwei Gründe näher.

[2] RADATZ 1985, Seite 18.

[3] in RADATZ 1980b, Seite 216; vergleiche auch MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/ INBAR 1987 Seite 3 und 4.

[4] RADATZ 1980b, Seite 213.

Die Ziele der Fehleranalyse

- Verbesserung des Mathematikunterrichts:

RADATZ sieht die "Fehleranalyse als eine besonders hilfreiche Möglichkeit für den Mathematiklehrer, um Lernschwierigkeiten der Schüler zu erkennen, in differenzierter Weise zu beschreiben und aus den erkannten Fehlermustern curriculare Hinweise auf Hilfsmaßnahmen zu gewinnen. ... sie kann aber auch eine Bereicherung der mathematischen Unterrichtspraxis darstellen, indem eine rein quantitative Fehler- bzw. Schülerbeurteilung überwunden wird"[5].

Auch GERSTER argumentiert in diesem Sinne: "Eine grobe Auswertung von Schülerarbeiten nach Fehlerarten ist besser als eine Korrektur nur nach 'richtig' oder 'falsch'."[6]

- Beiträge zur Erforschung des Lehrens und Lernens von Mathematik:

"Die mathematik-didaktische Grundlagenforschung, zu der sich auch die Fehleranalyse rechnet, versucht die Regularitäten und Irregularitäten des Lehr-Lern-Prozesses zu beschreiben und besser zu verstehen"[7].

Dafür ist die Analyse von Fehlern ein guter Ansatz, denn "wenn ein Schüler eine Aufgabe erfolgreich löst, weiß niemand, wie und weshalb er das tut. Es fragt auch keiner. Erst am fehlerhaften Denken schärft sich der Blick für die Funktionsweisen des korrekten Denkens."[8]

"Noch heute werden Schülerfehler von vielen Lehrern als negative Erscheinung angesehen, für die Mängel an Fleiß, Begabung, Konzentration oder Flüchtigkeiten verantwortlich gemacht werden. Diese sehr vereinfachte Sicht von der

---

[5] RADATZ 1985, Seite 23; ausführlicher in RADATZ 1980b, Seite 213 bis 216; ähnlich bei SOMMER 1985, LORENZ 1987, u.a.; auch in WELLENREUTHER 1986 findet man Vergleichbares (trotz seiner kritischen Haltung zur Fehleranalyse).

[6] GERSTER 1984, Seite 68.

[7] LORENZ 1987, Seite 206.

[8] LORENZ 1987, Seite 210 - Dass "keiner nachfragt", ist wohl kein Zeichen für einen guten Unterricht, aber aus Zeitmangel, Bequemlichkeit oder anderen Gründen eine wohl häufige Praxis. Dabei ist zu befürchten, dass in einem solchen Unterricht auch die Fehler bloß Anlass für den Gebrauch des Rotstifts sind, aber nicht zu einem geschärften Blick führen.

Beherrschung des Lernmaterials muß ergänzt bzw. ersetzt werden durch eine positive Sinngebung der Fehleranalyse."[9]

"Wenn Fehler im Mathematikunterricht als Bilder des Verständnisses oder als wichtige Stufen im individuellen Lernprozeß verstanden werden, dann kann die Fehleranalyse in der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung als eine hoffnungsvolle Strategie zur Klärung grundlegender Fragen des Mathematiklernens angesehen werden."[10]

SOMMER sieht in diesem Anwendungsbereich die "Fehleranalyse als Forschungsmethode der Mathematikdidaktik, um einerseits die kognitiven Prozesse des Mathematiklernens zu untersuchen und andererseits Mathematikcurricula zu evaluieren und Lehrgangskonzeptionen zu vergleichen. Fehler sind nicht allein dem Schüler zuzuschreiben, sie sind auch ein Hinweis auf Probleme der didaktisch-methodischen Aufbereitung des Lehrstoffes."[11]

Für beide Zielrichtungen gilt, was WELLENREUTHER als wichtigstes Ziel der Fehleranalyse bezeichnet: "... die Schwierigkeiten zu präzisieren, die Schüler in bestimmten inhaltlichen Bereichen haben."[12]

LORENZ sieht als Erfolg der Fehleranalyse die "Entdeckung, daß bestimmte, im üblichen Curriculum nicht besonders hervorgehobene mathematische Sachbereiche für den durchschnittlichen Schüler besonders fehleranfällig sind."[13]

Dafür ist es notwendig, zuerst eine Bestandsaufnahme der vorkommenden Fehler zu machen und dann nach den Fehlerursachen zu suchen. Daraus sind dann Konsequenzen für den Unterricht bzw. begleitende Fördermaßnahmen ableitbar.

Dass Diagnose und Therapie von SchülerInnenfehlern die Kompetenzen von MathematiklehrerInnen in vielen Fällen übersteigen, darauf weist RADATZ in seinem Plädoyer für eine stärkere Einbeziehung der Fehleranalyse in die Praxis des Mathematikunterrichts hin. Die Ursache für diese Überforderung bzw.

[9] RADATZ 1985, Seite 18.

[10] RADATZ 1980b, Seite 226.

[11] SOMMER 1985, Seite 38.

[12] WELLENREUTHER 1986, Seite 289.

[13] LORENZ 1987, Seite 213.

Unfähigkeit der MathematiklehrerInnen sieht RADATZ in deren "einseitig fachlicher Ausbildung und dem damit zusammenhängenden Selbstverständnis".[14]

Die vorhandene Literatur

Die Anzahl der fehleranalytischen Arbeiten ist in den letzten 20 Jahren stark gewachsen, der Großteil dieser Untersuchungen konzentriert sich aber auf einige Stoffgebiete der Mathematik, viele Teilbereiche sind nur wenig bis gar nicht untersucht:

"Ganz grob lässt sich jedoch feststellen, dass die Zahl der einschlägigen Publikationen mit der Komplexität des Inhalts drastisch abnimmt. Während z.B. die Literatur über Fehler im elementaren Bereich der Arithmetik und der Anfänge der Algebra unübersehbar ist (...), ist die Zahl der Veröffentlichungen zum Geometrieunterricht, soweit er über Begriffsbildung hinausgeht, gering. ... Notwendig erscheint gegenwärtig vor allem eine Bestandsaufnahme von Schülerfehlern, nach Möglichkeit auch über längere Zeitspannen hinweg. Die innere Systematik von Fehlern erschließt sich zum Teil nur durch die Häufigkeit ihres Auftretens bei einzelnen Individuen, bei bestimmten Schülergruppen, unter Berücksichtigung des Unterrichtszusammenhangs."[15]

Dem entsprechend gibt es zu Fehlern in Bereichen wie Arithmetik in der Grundschule oder Algebra in der 5. bis 8. Schulstufe bereits gut dokumentierte Fehlerursachen und zahlreiche Empfehlungen zu unterrichtlichen Maßnahmen, um die Anzahl dieser Fehler zu reduzieren.

In anderen Bereichen (insbesondere beim Stoff höherer Schulstufen) befindet sich die Fehleranalyse oft noch auf der Ebene der Bestandsaufnahme, unterrichtsbezogene Vorschläge findet man nur selten[16]. Auch RADATZ konstatiert "Forschungsdefizite in bezug auf die verschiedenen Alters- bzw. Klassenstufen der Schüler. Am gründlichsten untersucht sind die Fehler in der Primarstufe. Wenig bekannt ist über die Fehlleistungen ab Sekundarstufe I."[17]

---

[14] Siehe RADATZ 1985, insbesondere Seite 23.

[15] BECKER 1985, Seite 48, 49. Mit der inneren Systematik von Fehlern meint BECKER die Fehlerursachen. Vergleiche auch RADATZ 1985, Seite 20, der etwas detaillierter zu ähnlichen Ergebnissen kommt.

[16] Z.B. in MÜLLER 1998 zur Trigonometrie.

[17] RADATZ 1980b, Seite 225. Diese Feststellung ist auch nach 19 Jahren noch gültig!

A.1.1 Zwei Arten der Fehleranalyse

Man kann in methodischer Hinsicht zwischen "deskriptiver" und "erklärender bzw. prognostizierender" Fehleranalyse unterscheiden, für letztere findet man auch die Kurzbezeichnung "kognitive" Fehleranalyse, sie versucht die Fehlerursachen zu ergründen. In der Literatur werden diese beiden Arbeitsmethoden oft kombiniert, wobei die kognitive Fehleranalyse auf den Erkenntnissen der deskriptiven Vorarbeiten aufbaut.

A.1.1.1 Die beschreibende Fehleranalyse

Sie wird meist als deskriptive Fehleranalyse bezeichnet und hat als "wichtigstes Ziel eine präzise und objektive Beschreibung der Fehler von Schülern"[18]. Als Kritiker (insbesondere der "kognitiven") Fehleranalyse meint WELLENREUTHER:

"Es wird hier nicht bestritten. daß man mit Hilfe von deskriptiven Fehleranalysen besondere Schwierigkeiten von Schülern präzise beschreiben kann; solche Bestandsaufnahmen können experimentelle Forschungen sowie Entwicklungsarbeiten anregen, die auf eine Modifikation der Schülerschwierigkeiten abzielen. Eine strenge Prüfung von Hypothesen erscheint sowohl durch deskriptive als auch durch kognitive Fehleranalysen nicht möglich zu sein. Zusammenhänge, die man als Nebenbefunde im Rahmen von deskriptiven Fehleranalysen entdeckt hat, sollten in zusätzlichen Experimenten u.U. geprüft werden."[19]

---

[18] WELLENREUTHER 1986, Seite 276.

[19] WELLENREUTHER 1986, Seite 290.

Trotz dieser kritischen Haltung argumentiert er mit Ergebnissen fehleranalytischer Arbeiten: "Die deskriptiven Fehleranalysen legen ja über Art und Umfang der Schülerschwierigkeiten ein beredtes Zeugnis ab."[20]

Man kann die deskriptive Fehleranalyse als Vorstufe zur erklärenden Fehleranalyse verstehen. Sie erkundet das Untersuchungsfeld und liefert das Material für weitere Untersuchungen zu den Ursachen der Fehler.

Dabei werden entweder spezielle Tests erstellt und dann untersucht oder man greift auf bereits vorhandene schriftliche Arbeiten zurück.

WELLENREUTHER beschreibt die deskriptive Fehleranalyse so: "Hier wird mit Hilfe von diagnostischen Tests das Aufgabenverhalten von Schülern beschrieben."[21]

In seiner Replik auf WELLENREUTHER schreibt LORENZ: "In einem ersten Schritt wurde versucht, beobachtete Fehler zu beschreiben und hierfür brauchbare Kategorien zu entwickeln. ... Methodisch ist diesem Schritt die Sichtung vorhandener Klassenarbeiten und Tests zugeordnet, von denen eine beliebige Zahl verfügbar ist. Eine darüber hinausgehende 'Variation' der Aufgaben dürfte den Erkenntnishorizont nicht erweitern. Die Erstellung weiterer Tests ist im Rahmen dieses Schrittes kaum sinnvoll."[22]

In der vorliegenden Untersuchung werden verfügbare Maturaarbeiten herangezogen; die Frage "Welche Fehler passieren den SchülerInnen bei der Matura?" unterscheidet sich von der Frage "Was wissen/können MaturantInnen in Mathematik?"[23], zu deren Beantwortung das Erstellen eines Tests durchaus sinnvoll wäre.

---

[20] WELLENREUTHER 1986, Seite 294.

[21] WELLENREUTHER 1986, Seite 269.

[22] LORENZ 1987, Seite 221. Zur Problematik der diagnostischen Tests vergleiche WELLENREUTHER 1986, Seite 271 bis 276; auf Seite 273 schreibt er: Um bestimmte Fehlermuster durch diagnostische Tests erfassen zu können, müssen relevante und irrelevante Aufgabenmerkmale systematisch wie in der experimentellen Versuchsplanung variiert werden." Auf dieses Variieren bezieht sich LORENZ hier.

[23] Zu dieser Fragestellung siehe Beginn der Einleitung.

RADATZ nennt drei Ebenen der Erklärung von SchülerInnenfehlern[24], die Ebene I entspricht dabei in etwa der deskriptiven Fehleranalyse:

- "Erklärungsebene I (weitgehend mathematisch inhaltlich und verfahrensbezogen) -

Wahrnehmbar und beschreibbar aus Schülerfehlern sind Fehlermuster ('Bilder' einer Leistungsschwierigkeit, buggies). Derartige Oberflächenphänomene gestatten eine inhaltlich-deskriptive Fehlertypologie mit Fehlerklassen (z.B. Übertragsfehler bei der schriftlichen Subtraktion). Die Diagnose kann aufgrund schriftlich vorliegender Aufgabenlösungen oder diagnostischer Aufgabensätze erfolgen, ... "

Die zweite Erklärungsebene geht zumindest teilweise über eine reine Beschreibung (ohne Interpretationen der dabei abgelaufenen Denkvorgänge) der SchülerInnenfehler hinaus und ist allein aus den schriftlichen Aufgabenlösungen nicht zugänglich. Zur besseren Vergleichbarkeit werden die Ebenen II und III an dieser Stelle vorgestellt, sie sind aber eher der erklärenden Fehleranalyse zuzurechnen und stellen somit eine Überleitung zum nächsten Kapitel dar:

"Die Grenzen zwischen den Ebenen II und III sind fließend. ... "

- "Erklärungsebene II (inhaltlich-prozessual die Aufnahme und Verarbeitung von Informationen im Lösungsprozeß betreffend) -

Beschreibbar sind *sekundäre Ursachen* eines Fehlers, wie z.B. Nichtberücksichtigung von Informationen, Nichtabschließen eines Lösungsweges, Verlieren von Zwischenlösungen, fehlerhafte Problemanalyse, Assoziationsfehler, ... Bei einer derart lösungsprozeßorientierten Fehlertypologie muß sowohl die Diagnose (diagnostische Gespräche, ... u.a.) als auch die Therapie (...) über den Rahmen der Erklärungsebene I hinausgehen."

---

[24] RADATZ 1985, Seite 22 (wie auch die folgenden Zitate zu diesen drei Ebenen).

- "Erklärungsebene III (kognitiv-ursächlich) -

Eine derart bedingungsorientierte Fehlertypologie beruht auf *Ursachen primärer Art* wie z.B. Gedächtnisschwächen, kognitive Stile, entwicklungsbedingte Ursachen; taktil-kinästhetische, visuelle oder auditive Teilleistungsschwächen; Einstellungen und Ängste, Frames (vgl. HASEMANN 1985) und Erfahrungsbereiche, organische Schäden. - Es ist selbstverständlich, daß der Aspekt des Schülers ergänzt werden muß durch Ursachen bedingt durch den Lehrer, das Curriculum und das schulische Umfeld."

A.1.1.2 Die erklärende Fehleranalyse

Ihre genaue Benennung ist umstritten, sie wird auch kurz als kognitive Fehleranalyse, ausführlicher auch als erklärende bzw. prognostizierende Fehleranalyse bezeichnet[25] und untersucht "die kognitiven Prozesse, die zu einer Leistung führen"[26]; oder kürzer: Sie sucht nach Fehlerursachen[27].

Den Weg zur Ergründung von Fehlerursachen beschreibt REITBERGER so: "Die Methode besteht im Kern darin, die wesentlichen Bestimmungsstücke des Unterrichtsgegenstandes durch einen informellen Test zu erfassen, diesen in mehreren Klassen und an verschiedenen Schulen durchzuführen, die anhand der

---

[25] Etwas spitzfindig-polemisch schreibt LORENZ 1987, Seite 212 (er nimmt dabei Bezug auf WELLENREUTHER 1986, Seite 269f): "... um im folgenden bestimmte begriffliche Verwirrungen, die bezüglich der Fehleranalyse durch WELLENREUTHER entstehen könnten, aufzuklären. WELLENREUTHER unterscheidet zwischen 'deskriptiver' und 'kognitiver' Fehleranalyse. Hier werden zwei Begriffe aus unterschiedlichen semantischen Kategorien gekoppelt. Kognitiv sind die zur Erklärung von Schülerfehlern herangezogenen Prozesse, nicht die Analyse. Daß Analytiker bei ihren Analysen denken, wird man wohl unterstellen dürfen. Was WELLENREUTHER möglicherweise meint, ist die Unterscheidung in deskriptives und erklärendes/prognostizierendes Vorgehen."

[26] SANDER/BERGER 1985, Seite 254. Gemeint sind die kognitiven Prozesse und Leistungen von SchülerInnen.

[27] WELLENREUTHER 1986, Seite 284-288, bestreitet, dass die Fehleranalyse etwas erklärt oder Ursachen ergründet, weil die Kausalkette nur bis zu den Denkvorgängen der SchülerInnen, aber nicht bis zu den dafür verantwortlichen Unterrichtsabläufen reicht: "Was im Rahmen von kognitiven Fehleranalysen in der Regel geleistet wird, würden wir nicht als Erklärung von Fehlern, sondern als 'Beschreibung von Fehlern' bezeichnen." (Seite 288) Die meisten AutorInnen anderer Publikationen sehen die Denkvorgänge, die SchülerInnenfehlern zugrunde liegen, durchaus als Ursachen oder Erklärungen an - wie es LORENZ 1987 in seiner Replik ausführlich begründet (Seite 211-215).

Testergebnisse identifizierten typischen Fehler gemäß ihrer Bedeutung für die Unterrichtspraxis zu ordnen und schließlich deren Ursachen zu erklären."[28]

WELLENREUTHER sieht als Ziel der kognitiven Fehleranalyse nicht die "Erklärung" von Fehlern, sondern: "Die kognitive Fehleranalyse ... konzentriert sich auf das Geschehen im Kopf des Schülers während der Fehlerproduktion. Dabei versucht man, diese Prozesse im Gehirn zu erschließen, indem man

- die Ergebnisprotokolle (Aufgabenbearbeitungen) der Schüler genauer analysiert, oder -

die Gedanken während der Aufgabenbearbeitung laut äußern läßt (Lautes Denken, klinisches Interview), und die Tonbandprotokolle darüber nach bestimmten Kategorien auswertet ... .

Da die Aufgabenbearbeitungen meist recht lückenhaft sind, weil die Schüler viele Schritte im Kopf erledigen, ist häufig nicht zu entscheiden, wie die Aufgabenlösung bzw. ein Fehler entstanden ist. Insofern ist die erste Methode etwas unbefriedigend."[29]

Unabhängig davon, ob man nun kognitive Prozesse als Fehlerursachen oder, dem Standpunkt WELLENREUTHERs folgend, bloß als Fehlerbeschreibung bezeichnet[30], bleibt die Methodik zu ihrer Erforschung die gleiche.

Ihr Ziel sieht auch REITBERGER als ein schwierig zu erreichendes, er konstatiert: "Der neuralgische Punkt dieser Vorgehensweise ist die Ermittlung der Fehlerursachen. Es ist nicht möglich, ohne zusätzliche empirische Kontrolle aus einem bestimmten Fehlerphänomen auf eine bestimmte Fehlerursache zu schließen. Interviews zu fehlerhaft bearbeiteten Testaufgaben haben gezeigt, daß ein- und dasselbe Fehlerphänomen schülerabhängig auf zwei und mehr Ursachen beruhen kann (Reitberger, 1990). Aus diesem Grunde ist es im Falle einer Fehleranalyse wichtig, im Anschluß an die Durchführung des Tests sofort die typischen Fehler zu ermitteln, Hypothesen über deren Ursachen zu formulieren

---

[28] REITBERGER 1992, Seite 291.

[29] WELLENREUTHER 1986, Seite 278. Seine Einwände gegen die Methodik und die Effizienz der zweiten Methode (Lautes Denken, klinisches Interview) folgen auf den Seiten 278-291.

[30] WELLENREUTHER 1986, Seite 284f und Seite 299.

und diese durch qualitative empirische Verfahren wie teilnehmende Beobachtung, fokussiertes bzw. klinisches Interview ... umgehend zu überprüfen."[31]

Weil bei der vorliegenden Arbeit ausschließlich die schriftlichen Maturaarbeiten zur Verfügung standen (Interviews waren nicht möglich - und wären Jahre nach dem Lösen der Aufgaben auch sinnlos) beschränkt sich die Untersuchung auf eine deskriptive Analyse (der Art und Häufigkeit) der Fehler.

Eine nähere Beschreibung der kognitiven Fehleranalyse wird an dieser Stelle nicht geleistet. Entsprechende Detail-Aspekte sind beispielsweise in BECKER 1985; LORENZ 1987; MALLE 1993; PESCH 1996; RADATZ 1980b (und 1985); REITBERGER 1989b und 1992 sowie WELLENREUTHER 1986 nachzulesen. Vergleiche auch TREMSCHNIG 1995.

Auf Fehlerursachen wird im Kapitel A.2.2.5 kurz eingegangen.

A.1.2 Methodik der deskriptiven Fehleranalyse

Am Beginn jeder Fehleranalyse steht die Abklärung der Ziele und die Entscheidung, ob die Untersuchung explorativ oder hypothesenprüfend angelegt wird und welche Ergebnisse man in welcher Form erreichen möchte. Es folgen die Auswahl und Beschreibung der Aufgaben, deren fehlerhafte Lösungen untersucht werden sollen, sowie die Auswahl der SchülerInnen, denen man diese Aufgaben vorlegen will.

Im Anschluss an diese Vorüberlegungen ist als zentraler Punkt einer deskriptiven Fehleranalyse ein Kategorisierungssystem für die untersuchten Fehler zu erstellen, meist anhand einer Vorerhebung.

Mit den Möglichkeiten und Problemen der Automatisierung von Fehleranalysen hat sich SOMMER beschäftigt.[32]

---

[31] REITBERGER 1992, Seite 292.

[32] SOMMER 1985 (insbesondere Seite 40 und 47).

Auf die oben zusammengefassten Aspekte einer deskriptiven Fehleranalyse soll nun im Einzelnen näher eingegangen werden:

A.1.2.1 Ziele und Ergebnisse

Am Beginn einer empirischen Arbeit stehen zwei Fragen: Mit welchen Zielen geht man in die Untersuchung und welche Ergebnisse erwartet man bzw. wie sollen sie dargestellt werden?

Möchte man einen Überblick über die Art und Häufigkeit der auftretenden Fehler in bestimmten Bereichen bekommen? Sollen die Ergebnisse statistisch ausgewertet werden und wie? Steht die Planung unterrichtlicher Maßnahmen im Vordergrund? Geht es um Erkenntnisse zur mathematik-didaktischen Forschung?

Von der jeweiligen Zielsetzung hängt es ab, welche Fehler in die Untersuchung einbezogen bzw. ausgesondert werden sollen. Mögliche Auswahlkriterien sind z.B.:

- mathematisch-inhaltliche (wie z.B. Unterstufen-Fehler oder formale Fehler);
- pragmatische (z.B. Fehler mit erkennbarer Fehlertechnik);
- die Frage nach wesentlichen Fehlern (z.B. "leichte und schwere" Fehler; "zufällige und systematische" Fehler; siehe A.2.2.1 und A.2.2.4);
- Fragen der Vorgangsweise (sollen Fehler, die von der SchülerIn durchgestrichen oder selbst korrigiert wurden, einbezogen werden - vergleiche Kapitel A.3.2); usw.

Die Kategorisierungsproblematik ist eng mit der Zielsetzung und der Fehlerauswahl verknüpft (siehe Kapitel A.1.2.6); mit klaren Begriffsdefinitionen kann die Gefahr von Missverständnissen verringert werden (siehe Abschnitt A.2).

Wenn Fehlerhäufigkeiten ermittelt werden sollen, so sind zuerst grundsätzliche Überlegungen zur Auswahl der SchülerInnen und zur Auswahl der Aufgaben anzustellen (siehe A.1.2.3 bis A.1.2.5, insbesondere Seite 27), dann ist die Frage "Wie zählt man Fehler?" zu beantworten (siehe A.1.2.8).

A.1.2.2 Exploratives oder hypothesenprüfendes Vorgehen

Es gibt große Bereiche der Schulmathematik, die fehleranalytisch noch wenig erforscht sind: z.B. die Stoffgebiete höherer Schulstufen oder die Inhalte gut untersuchter Gebiete (wie z.B. Inhalte der Algebra) im Kontext komplexerer Aufgabenstellungen (wie z. B bei der Matura). In diesen Bereichen geht es "in einem ersten Schritt darum, beobachtete Fehler zu beschreiben und hierfür brauchbare Kategorien zu entwickeln."[33], also explorativ zu arbeiten.

Anknüpfend an diese Vorarbeit kann dann in Einzelfalluntersuchungen den Fehlerursachen nachgespürt werden, wozu LORENZ meint: "Die noch defensive Einschätzung, Fallstudien dienten lediglich der Hypothesengenerierung (Lorenz, 1980), muß insofern revidiert werden: Sie vermögen durchaus korrekte Erklärungen zu produzieren, allgemeine Gesetzlichkeiten aufzuspüren und individuelles Fehlerverhalten zu prognostizieren."[34]

Er widerspricht damit WELLENREUTHER, der in seinem stark auf experimentelle Unterrichtsforschung zentrierten Aufsatz meint: "Es wird hier nicht bestritten, daß man mit Hilfe von deskriptiven Fehleranalysen besondere Schwierigkeiten von Schülern präzise beschreiben kann; solche Bestandsaufnahmen können experimentelle Forschungen sowie Entwicklungsarbeiten anregen, die auf eine Modifikation der Schülerschwierigkeiten abzielen. Eine strenge Prüfung von Hypothesen erscheint sowohl durch deskriptive als auch durch kognitive Fehleranalysen nicht möglich zu sein. Zusammenhänge, die man als Nebenbefunde im Rahmen von deskriptiven Fehleranalysen entdeckt hat, sollten in zusätzlichen Experimenten u.U. geprüft werden."[35]

LORENZ verfeinert die Betrachtungsweise: "Bei individuenbezogener Hypothesenbildung läßt sich jedenfalls das Verhalten des betreffenden Schülers im Hinblick auf das Lösen von neuen, ihm unbekannten Aufgaben vorhersagen. ... Freilich sind populationsbezogene Hypothesen über den Zusammenhang

[33] nach LORENZ 1987, Seite 221.

[34] LORENZ 1987, Seite 225.

[35] WELLENREUTHER 1986, Seite 290.

zwischen kognitiven Dispositionen und Fehlverhalten in der Fehleranalyse derzeit noch kaum möglich..."[36]

Einen Weg in die Unterrichtspraxis beschreitet z.B. MÜLLER, die in ihrer Dissertation SchülerInnenfehler in der Trigonometrie untersucht hat:[37] Zuerst verschafft sie sich einen Überblick über die Fehler in Schularbeitsheften (deskriptiver Teil), erstellt dann ein individuelles Lernprogramm nach dem Prinzip des Mastery-Learnings und testet anschließend dieses Programm. Sie schreibt: "Die Idee ein solches Trainingsprogramm zu entwickeln war mir bei meiner Diplomarbeit gekommen, da ich damals bei meinen Tests und Schülerbefragungen zu den verschiedenen Einführungswegen in die Trigonometrie herausgefunden hatte, daß bestimmte Fehler bei sehr vielen Schülern in verschiedenen Schulen gehäuft auftraten. Um die bereits erwähnten Übungsblätter zu erstellen, war es notwendig sich mit möglichen Ursachen von Schülerfehlern, allen voran jenen, die den kognitiven Bereich betreffen, zu beschäftigen."[38]

A.1.2.3 Auswahl der Aufgaben

Die entscheidende Frage ist, ob man auf Aufgaben aus bereits vorliegenden Schularbeiten oder Maturaarbeiten zurückgreift, oder ob ein eigener Test erstellt werden soll. (Diese Problematik wurde bereits im Kapitel A.1.1.1 angesprochen[39].)

Das Heranziehen bereits vorhandener und i.A. dann auch schon korrigierter Aufgaben bietet vor allem zwei Vorteile: Der notwendige Aufwand wird durch die bereits erbrachten Vorleistungen reduziert und die reale Unterrichtspraxis ist Gegenstand der Untersuchung.

---

[36] LORENZ 1987, Seite 214 und 215.

[37] MÜLLER 1998; am Rande auch in ihrer Diplomarbeit (MÜLLER 1995).

[38] MÜLLER 1998, Seite 143.

[39] und ist insbesondere bei LORENZ 1987, Seite 221 und 222 beschrieben.

Als erheblichen Nachteil muss man dafür in Kauf nehmen, dass man mit einer mehr oder weniger großen Vielfalt von verschiedenen Aufgabenstellungen konfrontiert ist, da Schularbeiten oder andere Prüfungsarbeiten i.A. klassenweise verschieden sind. Ausnahmen sind z.B. die Abschlussprüfungen der Sekundarstufe II in Frankreich und Israel, wo landesweit dieselben Aufgaben gestellt werden (in der ehemaligen DDR war es ebenso) und damit ein geradezu idealer Fundus für Fehleranalysen existiert. So ist es wohl kein Zufall, dass man gerade in diesen Ländern Fehleranalysen (oder zumindest Ansätze dazu) vorfindet[40], die sich mit Problemstellungen beschäftigen, die in etwa dem österreichischen Maturaniveau entsprechen.

Manche Ziele einer Fehleranalyse sind (wenn überhaupt, dann) nur mit einem Test, der für alle SchülerInnen die gleichen Aufgaben enthält, erreichbar: z.B. eine vergleichende Ergebnisdarstellung mit relativen Häufigkeiten oder das Bestimmen des Stellenwerts[41] verschiedener Fehler. (Weiteres zur Auswahl der Aufgaben im Punkt "Auswahl der SchülerInnen".)

A.1.2.4 Beschreibung der Aufgaben

Wenn eine genaue Beschreibung der Aufgaben erforderlich ist, so überwiegt der Mehraufwand, der bei der Untersuchung vorhandener Schularbeiten o. Ä. durch die unterschiedlichen Aufgaben entsteht, die Vorteile dieser Aufgabenwahl sehr schnell.

Insbesondere bei verschiedenen Aufgabenstellungen ist Folgendes zu beachten: "Fehlermuster eines Schülers können sich nur in solchen Aufgaben manifestieren, die das fehlerauslösende Schwierigkeitsmerkmal enthalten."[42] Unter diesem Gesichtspunkt kann man die Fehleranalyse als eine Möglichkeit betrachten, um die fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale in den untersuchten Aufgaben aufzuspüren.

---

[40] Z.B.: MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987 und BIRTH 1979.

[41] Wie es z.B. REITBERGER 1992 ausführlich beschreibt (Seite 297 bis 300).

[42] GERSTER 1984, Seite 63.

Wie schwierig eine genaue Charakterisierung von Aufgaben ist, zeigt eine Fehleranalyse zum nicht-geometrischen Bruchzahlbegriff:[43]

REITBERGER beginnt mit einer Operationalisierung des nicht-geometrischen Bruchzahlbegriffs. Sie "besteht darin, die im Unterricht gebräuchlichen realen nicht-geometrischen Modelle durch einige wenige Merkmale zu erfassen. Die in Schul- und Arbeitsbüchern behandelten Aufgaben zum Bruchzahlbegriff lassen sich mit wenigen Einschränkungen durch drei Merkmale charakterisieren: Konzeption, Repräsentation der Einheit und Aufgabentyp." Im Folgenden werden die Merkmalsausprägungen zu diesen drei Merkmalen besprochen. REITBERGER bezeichnet sie im Weiteren kurz als *Aspekte* und setzt fort: "Mit Hilfe der Operationalisierung lassen sich die Grundaufgaben zum nicht-geometrischen Bruchzahlbegriff durch Aspektetripel kennzeichnen. Die Aspekte sind allerdings nicht frei kombinierbar. In Schulbüchern findet man im wesentlichen Aufgaben zu ... 10 Aspektetripeln. Neben den Grundaufgaben gibt es komplexere Aufgaben, in denen die Grundaufgaben nur einen Teil der Aufgabenstellung ausmachen."

Eine Erweiterung dieses Modells zur Aufgabencharakterisierung auf ein Komplexitätsniveau von Maturaaufgaben erscheint im Rahmen der vorliegenden Arbeit als nicht machbar, weil die Möglichkeiten für unterschiedliche Lösungswege (mit oft sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsmerkmalen) mit wachsender Komplexität der Aufgaben stark zunehmen.

Dass fehlerauslösende Merkmale im Vorhinein schwierig zu erkennen sind, sieht man z.B. an zwei Bemerkungen von REITBERGER: "... zeigt sich, daß man die bei einer Aufgabe möglichen typischen Fehler nicht ausschließlich anhand der Aspekte der Operationalisierung des Gegenstandes voraussagen kann." und "Mit Blick auf Folgeuntersuchungen, in denen möglicherweise weitere fehlerrelevante Charakterisierungen zutage treten, ...".

Viele Untersuchungen[44] zeigen, dass oft unscheinbare Details einer Aufgabe als relevante fehlerauslösende Schwierigkeitsmerkmale entdeckt werden. Es erscheint daher gerechtfertigt, das Auffinden solcher Aufgabenmerkmale als ein wesentliches Ziel der Fehleranalyse zu bezeichnen.

---

[43] REITBERGER 1992, Seite 293-294 und 296 bis 297. Die weiteren Zitate stammen aus diesen Seiten.

[44] Z.B. GERSTER 1984; auch zahlreiche Beispiele in TREMSCHNIG 1995.

Eine bloße Aufzählung der Teilschritte, die zur Lösung einer Aufgabe notwendig sind, ist als erste Orientierung zur Einschätzung der Aufgabenschwierigkeiten zwar brauchbar, muss aber allein schon aus den oben angeführten Gründen (Möglichkeit mehrerer Lösungswege, Bedeutung von Details) als oberflächlich bezeichnet werden. Eine Aufgabenbeschreibung, die zum Vergleich der Aufgabenschwierigkeit (exakter: der Häufigkeit und Bedeutung der fehlerauslösenden Merkmale einer Aufgabe) herangezogen werden kann, ist damit nicht zu leisten.[45]

A.1.2.5 Auswahl der SchülerInnen

Wenn es um eine bloße Erhebung der vorkommenden Fehler zu einem bestimmten Aufgabenbereich geht, sind keine besonderen Überlegungen notwendig.

Zur weiteren Untersuchung der gefundenen Fehler für eine Klärung der Fehlerursachen ist nach LORENZ ebenfalls keine besondere Auswahl notwendig: "Die Klassifikation von Schülerfehlern, die im ersten Schritt für Schülergruppen entwickelt wurde, wird im zweiten Schritt für einzelne Schüler weiterentwickelt, d.h. es wird untersucht, ob die für eine Population charakteristischen Fehlerkonfigurationen auch für einen einzelnen Schüler Bestand haben. Das entsprechende methodische Vorgehen ist das der *Einzelfalluntersuchung*, wobei einem Schüler eine Vielzahl von Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt werden."[46]

---

[45] Jede LehrerIn kennt die gelegentliche Überraschung, dass ein Schularbeitsbeispiel zu unerwartet vielen Fehlern führt. Zu dieser Problematik sei auf HANISCH 1990 verwiesen, der darauf an einigen Stellen eingeht, z.B. auf Seite 99: "Ändert man nämlich ein Beispiel zu sehr ab, kann es leicht passieren, daß es dadurch wesentlich schwerer geworden ist, was die Lehrkraft aber oft nicht bemerkt."

[46] LORENZ 1987, Seite 222; dem Vorwurf in WELLENREUTHER 1986, Seite 290: "Man kann also mit dieser Methode der Demonstration an interessanten Fallbeispielen alles belegen." entgegnet LORENZ 1987, Seite 224: "... gibt es Bereiche, und die kognitiven Prozesse von Schülern beim Lösen von Aufgaben gehören hierzu, die sich experimentellem Vorgehen weitgehend verschließen, da die Fragestellung sich nicht auf einen schlichten Ursache-Wirkungs-Mechanismus zwischen zwei (oder wenigen) Faktoren, die variierbar, d.h. manipulierbar sind, abbilden läßt."

REITBERGER beschreibt eine zentrale Schwierigkeit, die sowohl die Auswahl der Aufgaben als auch die Auswahl der SchülerInnen betrifft: "Der Wert einer *Fehlerhäufigkeit* hängt meist von der Auswahl der Aufgaben und Schüler ab. Die Bestimmung eines Häufigkeitswertes ist folglich nur innerhalb *homogener* Aufgaben-Schüler-Gruppen sinnvoll. Da die Definition von Homogenität durch qualitative Bestimmungstücke nur bei Aufgaben bedingt möglich, jedoch bei Schülern unmöglich ist, bietet sich der Ausweg an, zur Auswahl von Gruppen bei Aufgaben ergänzend, bei Schülern ersatzweise quantitative Merkmale vom Typ *notwendiger Bedingungen von Homogenität* einzubeziehen. In diesem Sinne sind die ... Testaufgaben ... erst dann als homogen anzusehen, wenn sich ihre Lösungshäufigkeiten nicht signifikant unterscheiden. Eine Schülergruppe ist homogen, wenn sich die Aufgabenlösungshäufigkeiten bei einer Verkleinerung des Umfangs der Gruppe im Mittel nicht signifikant verändern."[47]

In der Feststellung "Die Bestimmung eines Häufigkeitswertes ist folglich nur innerhalb *homogener* Aufgaben-Schüler-Gruppen sinnvoll." meint REITBERGER vor allem relative Fehlerhäufigkeiten, die er unter anderem zum Berechnen eines Indexwertes zur quantitativen Beschreibung des Stellenwerts eines typischen Fehlers verwendet.[48] Die Bestimmung absoluter Fehlerhäufigkeiten kann auch bei nichthomogenen Gruppen sinnvoll sein, allerdings nur sehr eingeschränkt (bei vergleichenden Betrachtungen ist in diesem Fall besondere Vorsicht angebracht).

A.1.2.6 Kategorisierung der untersuchten Fehler

Dieser zentrale Punkt einer Fehleranalyse erfordert zunächst eine klare Begriffsbestimmung, was unter einem Fehler zu verstehen ist, und welche Fehler in die Untersuchung einbezogen werden sollen. Diese Punkte sind eng mit den Zielen der Fehleranalyse verknüpft und wurden im Kapitel A.1.2.1 bereits angesprochen.

[47] REITBERGER 1992, Seite 297 und 298. (Zum Verfahren der Auswahl von Schülergruppen siehe REITBERGER 1989a.)

[48] REITBERGER 1992, Seite 297 bis 300.

Im Weiteren sind folgende Aspekte und Möglichkeiten zu beachten:

- Nach WELLENREUTHER[49] ist eine Beschränkung auf wenige Kategorien sinnvoll, um die Datenfülle bewältigen zu können.

- Möglichst viele der untersuchten Fehler sollen sowohl eindeutig als auch leicht identifizierbar einer Kategorie zuordenbar sein, dazu ist eine möglichst klare, präzise und operationale Beschreibung der Kategorien erforderlich.[50]

- Allgemeine Gesichtspunkte, wie z.B. die Machbarkeit und die Ziele einer Untersuchung bestimmen den Rahmen.[51]

- Ein Kategoriensystem kann populationsbezogen oder individuenzentriert angelegt werden.[52]

- Die Kategorisierung kann auf der Ebene der Fehlerbeschreibung erfolgen und sich an curricularen Begriffen (wie z.B. Fehler beim Termumformen oder bei quadratischen Gleichungen) , an den fehlerhaft ausgeführten Verfahrensschritten (wie z.B. Vorzeichenfehler bei der Polynomdivision), am fehlerhaften Lösungsprozess (wie z.B. 2 Längen ohne Berücksichtigung der verschiedenen Einheiten addiert) oder an den Ursachen der Fehler (wie z.B. Flüchtigkeit durch Perseveration) orientieren.[53]

- Auch die Häufigkeit und der Stellenwert von Fehlern können bei der Kategorisierung eine Rolle spielen.[54] Man kann zwischen individuellem und gruppenspezifischem Stellenwert (für eine bestimmte Klasse; für alle SchülerInnen einer LehrerIn, einer Schule oder eines Schultyps; für die Lehrplangestaltung; für SchulbuchautorInnen) unterscheiden.

---

[49] WELLENREUTHER 1986, Seite 281-282 und 284.

[50] Nach MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 7-8.

[51] Vergleiche WELLENREUTHER 1986, Seite 281-282.

[52] Vergleiche LORENZ 1987, Seite 213.

[53] Vergleiche die drei Erklärungsebenen nach RADATZ 1985, Seite 22 - sie wurden im Kapitel A.1.1.1 besprochen.

[54] Vergleiche REITBERGER 1992, Seite 295f.

- Man kann vor der eigentlichen Kategorisierung eine grobe Klassifizierung vornehmen, z.B. in zufällige und systematische Fehler[55] oder in logische, rechnerische und formale Fehler[56].

Bei deskriptiven Untersuchungen, die sich nur auf schriftliches Material stützen, ist es nicht sinnvoll, mit ursachenbezogenen Kategorien zu arbeiten. Es ist darauf zu achten, dass in die Beschreibung der Fehlerkategorien keine Spekulationen über die Denkvorgänge der SchülerInnen einfließen (wie z.B. mit der Kategorisierung "Flüchtigkeitsfehler"), da "ein und derselbe Fehler durch erstaunlich unterschiedliche kognitive Prozesse zustandekommen kann."[57]

A.1.2.7 Konsistenz, Persistenz und Resistenz

WELLENREUTHER moniert unter dem Titel "Besondere methodische Probleme der deskriptiven Fehleranalyse: ... ist weithin ungeklärt, wie 'konsistent' bezogen auf alle denkbaren Aufgaben einer Fehlerkategorie, wie 'persistent' (zeitlich andauernd) und wie 'resistent' bei Beeinflussungsversuchen (z.B. nach Unterricht zu den Fehlern) Fehlerkategorien bzw. 'Fehlermuster' überhaupt sind."[58]

Dem entgegnet LORENZ: Die Begriffe Konsistenz, Persistenz und Resistenz der Fehlermuster entstammen der Persönlichkeits-Psychologie und müssen für die Fehleranalyse leer bleiben, denn Schülerfehler sind keine Personeneigenschaften im Sinne von "traits".[59]

Damit ist die Bandbreite der Bedeutung dieser Begriffe für die Fehleranalyse im Spiegel der Literatur abgesteckt.

---

[55] Nach LORENZ 1987, Seite 211.

[56] Nach HANISCH 1990, Seite 181.

[57] LORENZ 1987, Seite 213; vergleiche auch Kapitel A.3.2.

[58] WELLENREUTHER 1986, Seite 276.

[59] LORENZ 1987, Seite 219-220.

Konsistenz

TIETZE bezeichnet einen Fehler mit folgender Auftrittshäufigkeit "als in hohem Maße konsistent: 70% der Schüler, die diesen Fehler einmal begingen, machten ihn noch mindestens ein weiteres Mal."[60]

Genau diese Art des Konsistenzbegriffs erkennt WELLENREUTHER aber nicht an: "Eine andere Frage ist, wie präzise und wie allgemein durch das Laute Denken bzw. durch das klinische Interview die Fehlerstrategie des Schülers erfaßt wird. Wenn man bei einer oder zwei Aufgaben eine bestimmte Fehlerstrategie feststellen konnte, dann braucht diese Fehlerstrategie bei der dritten falsch gelösten Aufgabe keineswegs aufzutreten; es ist also häufig nicht klar, wie konsistent eine Fehlerstrategie verwendet wird. Über die Persistenz und Resistenz der Strategie weiß man damit noch nichts. Es ist aber fraglich, ob durch wenige Aufgaben zuverlässig eine Disposition des Schülers für eine Fehlerstrategie erfaßt werden kann - es wäre ja durchaus auch möglich, daß ein Schüler bei Unkenntnis oder Unsicherheit quasi nach einem Zufallsgenerator verschiedene Strategien erprobt."[61]

Die eingangs dieses Kapitels zitierte ablehnende Haltung LORENZs zum Begriff Konsistenz in der Fehleranalyse begründet dieser so: "Konsistenz berücksichtigt beispielsweise nicht die Unsicherheit des Schülers und ist nur sinnvoll in Abgrenzung zum Flüchtigkeitsfehler verwendbar."[62]

Persistenz bzw. Stabilität

Abgesehen vom Disput WELLENREUTHER - LORENZ findet sich dieser Begriff relativ häufig in der Literatur:

So stellt SOMMER die Frage "Sind Fehlerstrategien stabil genug, um zuverlässige Aussagen zu gestatten?". In seiner Untersuchung kommt er zur Antwort, dass sie es nicht sind.[63]

Betrachtet man anstelle individueller Fehlerstrategien über kurze Zeiträume (wie SOMMER) Fehlertechniken über lange Zeiträume, kommt man zu ganz anderen

[60] Aus TREMSCHNIG 1995, Seite 148.

[61] WELLENREUTHER 1986, Seite 283 - zum Begriff Fehlerstrategie siehe Kapitel A.2.2.5.

[62] LORENZ 1987, Seite 220.

[63] SOMMER 1985, Seite 45-46.

Ergebnissen: "Vergleicht man die Fehlertechniken, wie sie die zahlreichen Untersuchungen in den ersten beiden Jahrzehnten dieses Jahrhunderts aufzeigen (vgl. Radatz 1979) mit den jüngeren Beiträgen der Fehlerforschung, so lassen sich kaum qualitative und quantitative Veränderungen der häufigsten Fehlertechniken über einen Zeitraum von mehr als 50 Jahren beobachten, trotz zahlreicher curricular-unterrichtlicher Reformen zum Mathematikunterricht. Diese Feststellung beschränkt sich nicht nur auf die Arithmetik sondern trifft auch zu auf andere Themenkreise des Schulfaches Mathematik (Hutcherson, 1975 u.a.)."[64]

RADATZ weist noch auf einen wichtigen Aspekt zur unterrichtlichen Praxis hin: "Ohne ein Erkennen und angemessenes Reagieren durch den Mathematiklehrer können Fehlstrategien und fehlerhafte Verständnisse mathematischer Sachverhalte bei einzelnen Schülern sehr lange wirksam bleiben und sich unter Umständen zunehmend verfestigen."[65]

Das könnte einer der Gründe sein, dass MaturantInnen noch Unterstufen-Fehler machen (wenn es sich nicht um Flüchtigkeit handelt). Solchen Fehlern muss man ein hohes Maß an Stabilität (und wohl auch Resistenz) zusprechen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist gerade das Aufspüren solcher Fehler und das Ermitteln ihrer Häufigkeit.

Resistenz

Interessant sind vor allem Fehler mit einer hohen Resistenz, sogenannte hartnäckige Fehler, von denen TREMSCHNIG meint: "Manche Fehler sind möglicherweise deshalb so 'hartnäckig', weil ihnen mehrere Fehlerursachen zugrunde liegen."[66] Dies herauszufinden ist aber nicht Gegenstand der deskriptiven Fehleranalyse.

---

[64] RADATZ 1980b, Seite 219; der Verweis auf "Radatz 1979" bezieht sich auf RADATZ 1980a, das damals noch in Druck war.

[65] RADATZ 1980b, Seite 218; auch einige andere AutorInnen stellen dies fest, z. B. MÜLLER 1998, Seite 53 und WELLENREUTHER 1986, Seite 276.

[66] TREMSCHNIG 1995, Seite 129.

A.1.2.8 Problematik der Fehlerzählung

An den Beginn sei ein Modell der Fehlerzählung gestellt, das die Zählung unterschiedlicher Fehler ("Fehlermuster") und die Zählung der "Einzelfehler" unterscheidet:

Als Merkmal sei die Bezeichnung "Fehler, die zu einer bestimmten Kategorie gehören," gewählt.

Die zugehörigen Merkmalsausprägungen sind dann "die unterschiedlichen Fehler dieser Kategorie" (die Fehlermuster).

Die Anzahl dieser Merkmalsausprägungen entspricht somit der Anzahl der unterschiedlichen Fehler (der Anzahl der Fehlermuster) in dieser Kategorie. Zu jedem solchen Fehlermuster (zu jeder Merkmalsausprägung) kann dann die Häufigkeit der "Einzelfehler" ermittelt werden, die angibt, wie oft dieses Fehlermuster (dieser Kategorie) gefunden wurde.

Anhand dieses Modells können die Schwierigkeiten, die bei der Fehlerzählung in der Praxis auftauchen, beschrieben werden:

- Wann sind 2 Fehler gleich[67] bzw. verschieden[68]?

Nur wenn sie ident sind? Oder sollen Fehler auch als gleich angesehen werden, wenn es sich um dieselbe Fehlertechnik mit unterschiedlichen Zahlen handelt? Und wie ist es mit unterschiedlichen Variablen? Und bei gleicher Fehlertechnik, aber verschiedenem Kontext? - Schließlich macht es doch einen gewissen Unterschied, ob ein relativ einfacher Bruch oder ein zeilenfüllendes "Bruchungetüm", wie es sich manchmal bei einer 2. Ableitung nach der Quotientenregel ergibt, regelwidrig gekürzt wird.

Jedenfalls ist der Übergang von gleichen zu verschiedenen Fehlern fließend und nicht einfach zu definieren.

---

[67] Auf die Schwierigkeit der Fehlerunterscheidung (bzw. der Bewertung gleicher Fehler) geht HANISCH 1990 auf Seite 180 (bzw. 181) ein.

[68] Dass oberflächlich betrachtet unterschiedliche Fehler auf demselben Defekt im Algorithmus beruhen können, ist hier von geringerer Bedeutung, weil es sich um eine Ursachenzuordnung handelt. Es sei aber auf das vollständige Zitat von SOMMER auf Seite 45 im Kapitel A.2.2 verwiesen.

Dieses Problem "des fließenden Übergangs" gibt es nicht nur bei der Zuordnung von Einzelfehlern zu Fehlermustern bzw. bei der Unterscheidung zweier Fehlermuster einer Kategorie, also bei der Unterscheidung zweier Merkmalsausprägungen. Man findet es auch bei der Frage, welchem Merkmal (welcher Kategorie) eine Merkmalsausprägung (ein Fehlermuster) zugeordnet werden soll. Daher ist eine möglichst klare, präzise und operationale Beschreibung der Kategorien notwendig.[69]

- Wie soll verfahren werden, wenn eine SchülerIn mehrmals denselben Fehler macht?

Einerseits sind gerade solche Wiederholungen wertvolle Hinweise auf systematische Fehler und tiefergehende Schwierigkeiten der betreffenden SchülerIn. Andererseits verzerrt eine SchülerIn, die einen Fehler, der bei den anderen SchülerInnen nur vereinzelt auftritt, siebenmal macht, das Gesamtbild der Fehlerhäufigkeit enorm, wenn die Fehlerzahlen einfach aufsummiert werden.

Ähnlich ist das Problem mit SchülerInnen, die im Vergleich zu anderen eine enorm hohe Fehlerzahl aufweisen (z.B. eine SchülerIn mit 13 großteils verschiedenen Fehlern in einer Aufgabe, bei der alle anderen SchülerInnen der Klasse im Mittel 2 Fehler machen).

Weiters könnte man unterscheiden, ob dieses Problem bei einer einzigen Aufgabe oder bei mehreren Aufgaben einer Maturaarbeit auftaucht.

In der Literatur werden diese Detailfragen sehr selten erörtert, auch die jeweils gewählte Vorgangsweise bleibt oft im Dunkeln, obwohl die Ergebnisse maßgeblich davon abhängen können.

[69] Nach MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 7-8.

A.1.2.9 Das Problem des "Steckenbleibens"

Auf einen wesentlichen Aspekt einer Fehleranalyse, die sich nur auf schriftliches Material stützt, das aus einer üblichen Leistungsfeststellung stammt, sei an dieser Stelle ausdrücklich hingewiesen:

Wenn man von "illegalen" (aber durchaus üblichen bzw. häufigen) helfenden Eingriffen von außen (wie z.B. Schummeln oder Tipps von der LehrerIn) absieht, so kann eine SchülerIn eine Aufgabe nur soweit bearbeiten, bis sie steckenbleibt. D.h., dass Fehler in späteren Lösungsschritten nicht mehr auftauchen können, weil die SchülerIn gar nicht so weit kommt. Das hat zur Folge, dass Fehler in den ersten Lösungsschritten gegenüber Fehlern in späteren Teilen des Lösungsprozesses überrepräsentiert sind.[70]

Dieser Effekt tritt umso stärker in Erscheinung, je komplexer und "aufbauender" eine Aufgabe ist. Bei in Österreich üblichen Maturaaufgaben ist er daher besonders zu berücksichtigen. So ist es z.B. klar, dass die Art und Häufigkeit der Fehler in einem Aufgabenteil b) beim Berechnen einer Fläche mittels Integral stark von der dafür notwendigen Lösung des Aufgabenteils a) aus einer Umkehraufgabe zur Kurvendiskussion beeinflusst wird.[71]

Bei einer genauen Beschreibung der Aufgaben wäre diese Problematik zweifach zu berücksichtigen:

Erstens müsste das "Potential zum Steckenbleiben" ermittelt werden, d.h.: Gibt es mehrere unabhängig voneinander lösbare Aufgabenteile und welche Aufgabenteile können nach einem "Steckenbleiben" von der SchülerIn nicht bearbeitet werden?

Zweitens muss man sich fragen, ob eine aufwendige Aufgabenbeschreibung überhaupt Sinn macht, wenn die SchülerInnen mehr oder weniger große Teile dieser Aufgaben gar nicht in Angriff nehmen können, weil sie bei einem Lösungsschritt stecken geblieben sind.

---

[70] Zu den sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Fehleranalyse siehe TREMSCHNIG 1995, Seite 119-127, wo sie unterschiedliche Interviewtechniken (von NEWMAN bzw. CASEY) gegenüberstellt.

[71] Nach HANISCH 1990, Seite 72 sollte so eine Aufgabenstellung, in der z.B. der Teil b) nur gelöst werden kann, wenn Teil a) gelöst wurde, bei Schularbeiten nicht vorkommen, bei Maturaaufgaben ist dies aber immer noch üblich - vergleiche die Angaben im Anhang.

Zur Methodik der Fehleranalyse seien abschließend folgende Publikationen exemplarisch genannt:

BECKER 1985; LORENZ 1987; MALLE 1993; MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987; RADATZ 1980a, 1980b, 1985; REITBERGER 1989b, 1992; TREMSCHNIG 1995 und WELLENREUTHER 1986.

A.1.2.10 Das Problem der Begriffsvielfalt

Beim Durchsehen der Literatur zur Fehleranalyse fällt auf, dass der Begriff "Fehler" selten definiert wird und dass zur näheren Beschreibung von Fehlern eine Vielzahl von Begriffen (teilweise widersprüchlich) verwendet wird. Dies wird in einigen Publikationen auch direkt angesprochen, z.B.:

"Besondere methodische Probleme der deskriptiven Fehleranalyse: Begriffliche Unklarheiten ... In der Literatur werden die Begriffe 'Fehlermuster' oder 'Fehlertypen' in recht laxer Weise verwendet."[72]

"In den recht zahlreichen Publikationen zur Fehleranalyse im Mathematikunterricht werden einzelne Aspekte oft mit sehr unterschiedlichen Begriffen belegt. Nachfolgend ein Vorschlag, die Begriffsvielfalt zu begrenzen. ..."[73] (Dieser Vorschlag zu einer groben Strukturierung in 4 Ebenen wird auf Seite 45 näher besprochen, er trägt aber nur wenig zu einer Klärung der Begriffsvielfalt selbst bei.)

Tendenzen, die zu einer Vereinheitlichung der Begriffe führen, sind derzeit nicht abzusehen.

Im folgenden Abschnitt ist daher besonderes Augenmerk darauf gelegt, die derzeit gängigen Begriffe im verwendeten Umfeld vorzustellen und zu präzisieren. Dabei wird schnell klar, dass die Benennungsvielfalt die Komplexität des Fehlerbegriffs widerspiegelt.

[72] WELLENREUTHER 1986, Seite 276.

[73] RADATZ 1985, Seite 20.

A.2 Zum Begriff "Fehler"

"Was ist ein Fehler?"

Dies ist eine jener Fragen, die leicht zu stellen, aber (zumindest auf den 2. Blick) schwer zu beantworten sind. Eigentlich handelt es sich um zwei Fragen: "Was ist ein *Fehler*?" und "Was ist *ein* Fehler?", also um die Fragen, was man als Fehler ansieht und wie man Fehler zählt.

Auf die Problematik der Fehlerzählung wurde schon im Kapitel A.1.2.8 eingegangen.

Nachdem im Abschnitt A.1 die Fehleranalyse und ihre wesentlichen Schritte vorgestellt wurden, soll nun der Begriff Fehler und die von ihm abgeleiteten Begriffe in ihrem Bedeutungsspektrum und ihren Konnotationen genauer betrachtet werden.

Im ersten Kapitel werden die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Begriff Fehler in Form einer "Gedankensammlung aus dem Alltag" umrissen.

Im darauffolgenden Kapitel wird dann gezeigt, wie sich diese Schwierigkeiten in der Begriffsvielfalt der Fachliteratur fortsetzen.

Im dritten Kapitel steht eine besonders häufig anzutreffende Bezeichnung im Mittelpunkt - der Flüchtigkeitsfehler.

A.2.1 Was ist ein Fehler?

Am Beginn der Erörterung dieser Frage steht eine Auflistung von möglichen Antworten bzw. der Antwort dienlichen Aspekten, ein bewusst umfassend gehaltenes Brainstorming, um nicht Interessantes von vornherein auszuschließen. Die hier angeführten Punkte sind teilweise widersprüchlich oder überschneiden einander, sie erheben auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Eine Begriffsdifferenzierung bzw. -eingrenzung wie z.B. in Fehlerbeschreibung, -klassifizierung, -muster, -technik, -ursache, usw. wird erst in den folgenden Kapiteln in Angriff genommen.

- **Offensichtliche Fehler**, wie z.B. Rechenfehler, Umformungsfehler:

  $2 + 2 = 5$ oder $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

- **Fehlendes**

  o) Aufgrund von Zeitmangel, Nichtwissen oder weil die Angabe nicht verstanden oder missverstanden wurde oder weil der Ansatz nicht gelang.

  o) Der Grund kann aber auch sein, dass bei aufbauenden Aufgaben der Anfangsteil nicht oder falsch gelöst wurde und die SchülerIn daher gar nicht weiterarbeiten kann, selbst wenn sie die weiteren Aufgabenteile problemlos beherrscht. Es gibt leider[1] noch immer Aufgaben, wo z.B. die Punkte b), c) und d) nur mit Hilfe der Ergebnisse aus a) lösbar sind.

- **Unleserliches**

- **Falsches** im Gegensatz zu Richtigem.

  Allerdings kann etwas zwar richtig, aber gar nicht verlangt bzw. sinnvoll sein. Ist das nicht verlangte Richtige dann ein Fehler?

[1] Wie z.B. in HANISCH 1990, Seite 72 festgestellt bzw. kritisiert wird.

- **Nicht (oder weniger) Zielführendes** im Gegensatz zu Zielführende(re)m.

Was aber ist das Ziel? Richtig bzw. verständig denken, oder bloß richtig rechnen? Oder ist eine gute Note das Ziel? Und wessen Ziel? Das Ziel der SchülerIn, der LehrerIn, der Schule, der Gesellschaft?

- **(Unsichtbare) Fehler im Denken - bei sichtbar Richtigem.**

Solche Fehler können bedeutende Informationen bezüglich der mathematischen Kompetenz einer SchülerIn liefern, sind aber leider nur schwer oder gar nicht aufzuspüren, insbesondere wenn nur die schriftlichen Arbeiten vorliegen und keine Möglichkeit für ein begleitendes bzw. nachfolgendes Interview besteht.

- **Formale Fehler**, oft begleitet vom Kommentar "Richtig gedacht, aber falsch aufgeschrieben", z.B.:

o) Falsche Verwendung des Gleichheitszeichens: $3 + 4 = 7 \cdot 2 = 14$

o) Mathematische "Rechtschreibfehler" wie etwa $3 \cdot -2 = -6$

o) Integral ohne "dx"

- **Übertragungs- oder Abschreibfehler**

- **Mehrere Lösungswege**, die zu einer Aufgabe angeboten werden:

Wenn nur einer dieser Wege richtig ist, wird dann der falsche Lösungsweg als Fehler gewertet?[2]

[2] Zur Bewertung bei einer Schularbeit meint HANISCH 1990, Seite 181: "Im Fall, daß nur ein richtiger und auch nur mehr oder minder falsche Lösungswege angeboten werden, zählt allein die letzte Version". Bei den untersuchten Maturaarbeiten kam dieser Fall ein einziges Mal bei einer Extremwertaufgabe vor, sie wurde mit 0 Punkten bewertet. (Es ist allerdings nicht bekannt, ob die Lehrerin die zeitliche Reihenfolge der beiden Varianten gewusst hat und was in dieser Klasse zwischen der Lehrerin und den SchülerInnen ausgemacht war.)

- **Unrichtige Zeichnungen**

Das Spektrum reicht hier von Ungenauigkeiten über einzelne fehlerhafte Details wie z.B. falsch eingezeichnete Punkte oder nicht zusammenstimmende Details bis zu einem völlig falschen Gesamteindruck

- **Das Nichterkennen von einander widersprechenden Ergebnissen**

- **Folgefehler:**

Das richtige Weiterrechnen mit Falschem wird heute üblicherweise nicht mehr als Fehler bewertet.

Durch den ersten Fehler kann der folgende Rechengang erleichtert, erschwert oder verunmöglicht werden - diese Fehlerfolgen sind völlig dem Zufall überlassen.

Durch den ersten Fehler können auch Fehler im weiteren Gang provoziert werden (z.B. weil dieser schwieriger ist bzw. ansonsten nicht vorkommende Schwierigkeitsmerkmale enthält).

Das Nichterkennen von falschen (Zwischen-)Ergebnissen kann zu Fehlern im weiteren Gang führen.

- **Der Blickwinkel bestimmt, was ein Fehler ist.**

o Blickwinkel 1: Erreichtes.

Alles, was das Erreichen von richtigen Problemlösungen behindert oder verunmöglicht, ist ein Fehler - eine ziemlich umfassende Definition, viele solcher Fehler wären gar nicht oder nur sehr schwer feststellbar, z.B. angstbedingte Fehler oder einfach, dass eine SchülerIn unausgeschlafen zur Prüfung gegangen ist.

o Blickwinkel 2: Leistung (Erreichtes pro Zeiteinheit).

Die sogenannte Schulleistung wird mehr oder minder gut durch eine Punktezahl und eine Note gemessen - alles, was die erreichte Punktezahl mindert bzw. die erreichte Note verschlechtert, ist ein Fehler. Wobei zu beachten ist, dass es sehr unterschiedliche Arten der Fehlerbewertung gibt[3].

Hier kommen zu den unter Blickwinkel 1 beschriebenen Fehlern noch weitere, ebenfalls nur schwer oder gar nicht fassbare Fehler dazu, wie z.B. Verhaltensweisen oder Rechenschritte, die zu einem Zeitverlust führen. Auch taktische Fehler, beispielsweise wenn eine SchülerIn z.B. zu lange an einer Aufgabe rechnet oder mit einer Aufgabe beginnt, die sie nicht lösen kann und dadurch demoralisiert oder verängstigt wird, sind aus diesem Blickwinkel in Betracht zu ziehen. Und ein ganz schwerer Fehler wäre es wohl, sich beim "Schummeln" erwischen zu lassen.

Andererseits werden aus diesem Blickwinkel viele mathematisch falsche Dinge (siehe z.B. die formalen Fehler oben) nicht mehr als Fehler angesehen, weil sie zu keinem Punkteverlust führen.[4]

o Blickwinkel 3: "Mathematisches Wissen und Können"[5]

Hier geht es vor allem um das verständige und richtige mathematische Denken und Handeln der SchülerInnen. Wenn eine SchülerIn etwas nicht verstanden, aber richtig gerechnet hat - ist das ein Fehler? Wenn ja, dann ist zu beachten, dass "etwas verstanden haben" viel schwieriger zu operationalisieren ist als die bloße Rechnung - Gedankeninhalte kann man nur teilweise und mit Mühe herausfinden.

---

[3] Z.B. in HANISCH 1990, Seite 177f im Kapitel "Bewertung der Fehler" ausgeführt: 1. Art - "Von oben herunter", d.h.: Ausgehen von einer Maximalpunktezahl und Punkteabzüge für jeden Fehler. Gute Leistung bedeutet hier ein Minimum an Fehlern, viele Fehler ergeben eine schlechte Leistung, unabhängig davon, wieviel richtig ist. 2. Art - "Von unten hinauf", d.h.: Für jeden richtigen Aufgabenteil werden Punkte vergeben. Viele richtige Aufgabenteile ergeben eine gute Leistung, egal wie viel Fehler in anderen Aufgabenteilen gemacht wurden.

[4] Ob formale Fehler zu einem Punkteabzug führen sollen, ist umstritten. In den untersuchten Maturaarbeiten blieben formale Fehler (die bei einigen SchülerInnen in einem erschreckend hohen Ausmaß vorkamen) ohne Konsequenzen auf die Punktevergabe. In HANISCH 1990, Seite 181 findet man dazu Folgendes: "Bei formalen Fehlern fehlt hingegen noch weitgehend der Konsens. Meines Erachtens sollten formale Fehler von Klassenstufe zu Klassenstufe strenger bewertet werden."

[5] Dieser Punkt ist die erste Bildungs- und Lehraufgabe in den Zielen des Mathematikunterrichts im Lehrplan der Oberstufe AHS (LEITNER/BENEDIKT 1991, Seite 29).

o Blickwinkel 4: Erreichen der (weiteren) Lehrplanziele.

Die Anführung dieses Blickwinkels soll daran erinnern, dass viele Ziele des Lehrplans nicht operationalisier- und abprüfbar sind, ihr Nichterreichen ist aus Fehlern nur in seltenen Fällen erkennbar.

o Die pragmatische Sicht:

Mathematisch Falsches bzw. Fehlendes (im Sinne der verlangten Problemlösung) ist ein Fehler, sofern es aus der schriftlichen Arbeit erkennbar ist.

- **Handlungen, die erst durch ihre Folgen (möglicherweise) zu einem Fehler werden:**

Gemeint sind hier die von einer SchülerIn gesetzten Schritte, die je nachdem, wann und wo und unter welchen individuellen Rahmenbedingungen sie gesetzt werden, direkt oder indirekt zu Fehlern führen, einen Punkte- oder Zeitverlust bewirken, negative psychische Auswirkungen haben, usw.; z.B.: Eine SchülerIn ...

... wählt einen längeren Rechengang[6] - wobei zu beachten ist, dass ein längerer Rechengang zeitlich kürzer sein kann. Auch wenn ein Rechengang mehr Zeit in Anspruch nimmt als ein anderer, kann seine Wahl aus der Sicht der SchülerIn richtig sein, wenn sie den längeren Rechengang mit einer deutlich höheren Sicherheit bewältigt als den kürzeren Gang.

... rechnet oder zeichnet etwas, das nicht notwendig ist und verliert dadurch Zeit. Dabei kann es sich um eine sinnvolle Probe oder aber um eine missverstandene Angabe handeln.

... beginnt mit der 1. Aufgabe (und wird durch ihren Misserfolg bei dieser Aufgabe schwer verunsichert).

... setzt sich neben eine störende KollegIn.

[6] Die Länge eines Rechenganges darf nicht mit der Länge des schriftlich vorliegenden Rechengangs verwechselt werden, weil letztere davon abhängt, wie viele Schritte die SchülerIn im Kopf und wie viele sie schriftlich ausgeführt hat.

- **Fehler, die (lange) vor der Matura passiert sind**, wie z.B.:

"Es war ein Fehler, dass ich zu spät zu lernen begonnen habe.", fehlende Lerntechniken, falsche Wahl des Schultyps, etc.

- **Systematische und zufällige Fehler**

Eine nicht ganz passende Unterscheidung, weil sich Menschen nicht wie Messinstrumente beschreiben lassen.

Die grobe Klassifizierung in "systematische" und "zufällige" Fehler zielt darauf ab, die "wesentlichen" Fehler herauszufinden (wenn z. B. eine SchülerIn einen bestimmten Algorithmus immer in derselben fehlerhaften Art und Weise verwendet). In den Kapiteln A.2.2.1 und A.2.2.4 wird darauf näher eingegangen.

- **Flüchtigkeits- bzw. Schlampigkeitsfehler**

(Die Problematik der Flüchtigkeitsfehler wird im Kapitel A.2.3 behandelt.)

- **Fehlerbenennungen von LehrerInnen**[7], z.B.:

"Vorzeichenfehler": Eine sehr umfassende Fehlerkategorie - es gibt eine große Anzahl verschiedenartiger Fehler, die so benannt werden können, z.B.: $(-2) \cdot (-3) = -6$ (ein spezieller Rechenfehler); Anwendung des Satzes von VIETA mit dem Linearfaktor $(x + 3)$ zur Lösung $x_1 = 3$; auch das Addieren einer Wahrscheinlichkeit, anstatt sie abzuziehen, kann so bezeichnet werden. Hinter dem Symptom "falsches Vorzeichen" können sich Ursachen wie Flüchtigkeit, Unsicherheit in der Regelanwendung, aber auch tiefergehende Verständnisprobleme verstecken.

"Rechenfehler" (auch "technischer Fehler"): Diese Bezeichnung wird oft als Abgrenzung zum methodischen Fehler oder Gangfehler verwendet, bezieht sich meist nicht nur auf das Rechnen mit Zahlen (Verwendung des Taschenrechners),

[7] Großteils finden sich diese Bezeichnungen auch in den untersuchten Maturaarbeiten.

sondern auch auf das Umformen von Termen und wird oft synonym für Flüchtigkeitsfehler verwendet.

"Gedankenfehler" (auch "Denkfehler"): Eine sehr unbestimmte Fehlerkategorie und streng genommen eine sinnlose Bezeichnung, denn ohne Denken passieren auch keine Fehler. Im Alltagsgebrauch bezieht sich diese Formulierung auf absichtsvolles Denken bzw. auf eine mangelhafte Einsicht in mathematische Zusammenhänge: Regeln werden nicht beherrscht oder falsch angewendet. Ob dies auf Unsicherheit oder Flüchtigkeit beruht, lässt sich allein aus der schriftlichen Arbeit oft nicht feststellen.[8]

"Gangfehler": Oft als Pendant zum Rechenfehler oder technischen Fehler verwendet. Diese Unterscheidung ist Anlass für leidenschaftliche Streitgespräche unter LehrerInnen über die Gewichtung dieser beiden Fehlerarten bei der Bewertung (einer Schularbeit z.B.). Wobei die vorherrschende Meinung von einer strengen "richtig/falsch-Bewertung, egal warum" derzeit schon fast zu weit in die Gegenrichtung ("Hauptsache der Gang stimmt") gependelt ist.[9]

"(schwerer) methodischer Fehler": Damit kann ein Fehler gemeint sein, den andere LehrerInnen als Gangfehler oder Denkfehler, aber auch als technischen Fehler oder Vorzeichenfehler bezeichnen würden.

"$\not\vee$" als Zeichen für "es fehlt Unwesentliches"; "$\not\vee\!\!\!=$" als Zeichen für "es fehlt Wesentliches".

[8] HANISCH 1990, Seite 179: "bei Denkfehlern ..., wie etwa Wurzelziehen aus einer Summe von Quadratzahlen (Pythagoras), aus einer Summe heraus kürzen etc."

[9] So war ein oft getaner Ausspruch meines Mathematiklehrers, der 1972 in Pension ging: "Wenn ich dich in die Apotheke um ein Kopfwehpulver schicke, und du bringst mir Rattengift, dann ist es wurscht, dass der Gang richtig war." Andererseits muss man fragen, ob die richtige Ausführung einer Aufgabenlösung nicht doch unterbewertet ist, wenn eine Maturantin, die fast kein einziges Ergebnis richtig hat, mit Gut beurteilt wird. Mehr zu dieser Problematik in HANISCH 1990, ab Seite 177.

Zum Abschluss dieses Kapitels seien noch zwei positive Aspekte von Fehlern genannt. Bei Prüfungen sind sie zwar eher nicht willkommen, im Unterricht kommt ihnen aber ganz besondere Bedeutung zu (so sollte es zumindest sein) - im Abschnitt A.4 wird darauf näher eingegangen werden.

- **Fehler als notwendiges Falsches, um das Wahre einzugrenzen.**

Sehr engagiert und heftig vorgetragen von Stella BARUK: "Aber was können die Schüler denn auch kennenlernen von der Dialektik von wahr und falsch, wenn alles, was Falsch ist, der Schmach preisgegeben wird, zusammen mit denen, die das Falsche in die Welt setzen? Die Schüler sind dazu verdammt, im Wahren zu leben - so wie man dazu verdammt sein könnte, ohne Unterlaß in gleißendem Licht zu leben und daher früher oder später unvermeidlich blind zu werden. Was können sie wissen vom Widerspruch, die Trottel, die Idioten, die erbärmlichen Blödlinge, wenn man ihnen niemals die Ehre hat zuteil werden lassen, ihre Produkte soweit in Augenschein zu nehmen, daß man sie bis zu einem Widerspruch führen könnte? Warum hat man nie eine solche - mathematische und gleichwohl höfliche - Diskussion mit ihnen geführt, in der sie den Widerspruch selber hätten spüren können, weil sie sich mit einem Teil ihres Selbst darin verwickelt hätten. Es gibt keinen logischen Skandal, weil selbst die allerärmste Logik - die der klassischen Mathematik - *zwei Wahrheitswerte* benötigt. Gibt es nur einen, bricht die Logik zusammen; dann kann man daherreden, was man will, alles wird gleichgültig, alles versinkt in Gleichgültigkeit."[10]

- **Fehler als notwendige und willkommene Schritte im Lehr-Lern-Prozess.**

So können gedankliche Irrgänge oder Missverständnisse, welche das Verständnis für mathematische Zusammenhänge und Strukturen behindern, aufgespürt werden.

[10] BARUK 1989, Seite 25-26; mit "Trottel, Idioten, ..." bezieht sie sich auf Kommentare von LehrerInnen in den Heften französischer SchülerInnen.

A.2.2 Fehler differenzierende Begriffe

Nach dem Brainstorming (Kapitel A.2.1) folgt nun ein Überblick über die in der Literatur gefundenen Termini zur näheren Beschreibung von Fehlern.

Zur Frage "Was ist ein Fehler?"

Die Antwort wird offenbar als evident gesehen ("gerade in Mathematik"!). In der durchgesehenen Literatur zur Fehleranalyse konnte keine Definition oder nähere Beschreibung des Begriffes "Fehler" gefunden werden. Als Hinweis darauf, dass die Antwort so einfach nicht ist[11], zwei Bemerkungen von SOMMER[12]:

"Ein Fehler kann durch Kombination mehrerer inkorrekter Operationen entstehen. - Eine fehlerhafte Prozedur kann bei bestimmten Aufgaben zu richtigen Lösungen führen."

"Probleme der Fehleranalyse, die vorher kaum diskutiert wurden: ... wo oberflächlich betrachtet unterschiedliche Fehler vorliegen, identifiziert das Modell von Brown/VanLehn gegebenenfalls denselben Defekt im Algorithmus eines Schülers, den dieser 'nur' auf unterschiedliche Weise zu flicken versucht. Diese Versuche, aus den Sackgassen herauszukommen, in die fehlerhafte Algorithmen führen, nennen die Autoren 'repairs'."[13]

Die Bereiche der Fehleranalyse

"In den recht zahlreichen Publikationen zur Fehleranalyse im Mathematikunterricht werden einzelne Aspekte oft mit sehr unterschiedlichen Begriffen belegt. Nachfolgend ein Vorschlag, die Begriffsvielfalt zu begrenzen."[14]

Dieser Vorschlag von RADATZ wurde auf Seite 35 schon erwähnt, er strukturiert die Fehleranalyse in 4 Bereiche und soll hier kurz vorgestellt werden:[15]

---

[11] Vergleiche dazu auch Kapitel A.2.1.

[12] SOMMER 1985, Seite 41 und Seite 40.

[13] Mehr zur "repair theory" von BROWN/VAN LEHN in TREMSCHNIG 1995, Seite 140.

[14] RADATZ 1985, Seite 20.

[15] Nach (bzw. aus) RADATZ 1985, Seite 20-22.

"(1) Die inhaltlich-mathematische Beschreibung von Fehlern erlaubt oft das Nennen von Fehlermustern. ... Beispiel 1: ... Fehlermuster: Erweitern und Bestimmen des Hauptnenners bei Aufgaben wie ... in der Form ... . Beispiel 2: ... sind Fehlermuster nicht mehr eindeutig beschreibbar."

Dieser Bereich beschreibt das Feld der deskriptiven Fehleranalyse. Gerade hier ist die Begriffsvielfalt, die teilweise schon Begriffsverwirrung genannt werden muss, enorm. Der Grund dafür liegt in zwei großen Schwierigkeiten: Erstens im Beschreiben von Fehlern, das, wie RADATZ oben anspricht, nicht immer eindeutig möglich ist. Und zweitens in der Abgrenzung von wesentlichen und unwesentlichen Fehlern (wie oben besprochen). Gerade das Wort "Fehlermuster" wird in der Literatur mit unterschiedlicher Bedeutung verwendet (neben einigen anderen Begriffen, die weiter unten besprochen werden.

"(2) Die Diagnose von Fehlern kann Auskunft geben über die Fehlerursachen." (Diese sind sowohl curricular als auch kognitiv beschreibbar).

"(3) ... die Bewertung von Fehlern, d.h. eine differenzierte Fehlerbeurteilung ..."

RADATZ stellt die "starre 'falsch-richtig'-Dichotomie ... mit ihrer rein quantitativen Punkteverteilung" sowie die "Qualität von Fehlermustern" zur Diskussion.[16]

"(4) Die Therapie eines Fehlers mit dem Ziel einer Fehlerbehebung wird in sehr vielen Fällen ansetzen können bei den Erkenntnissen aus der inhaltlichen Analyse von Fehlermustern. ... Maßnahmen im Sinne schulischer Rechennachhilfe reichen aber sicher nicht aus bei tieferliegenden Fehlerursachen."

A.2.2.1 Wesentliche und unwesentliche Fehler

Es gibt ein grundlegendes Bestreben, wesentliche von unwesentlichen Fehlern zu trennen. Das beginnt beim Verbessern von Hausübungen im Unterricht und reicht über Fehler bei Schularbeiten bis hin zu Fehlern, deren Entstehung mit einer speziellen Förderung oder Lerntherapie bekämpft bzw. verhütet werden soll.

[16] Zu dieser Problematik vergleiche auch HANISCH 1990, insbesondere ab Seite 153.

- "Schwere" und "leichte" Fehler

Beim Beschreiben, was genau unter einem "wesentlichen" bzw. "unwesentlichen" Fehler verstehen ist, gibt es schon in vielen LehrerInnenzimmern heftige Diskussionen. Dabei geht es meistens um das Problem der Gewichtung der Fehler bei der Leistungsbeurteilung.[17] Dahinter steht die Frage "Was soll eine SchülerIn können?". Die Frage "Warum passieren diese Fehler?" verschwindet leider allzu oft im Schatten der "Benotungskeule".

In der wissenschaftlichen Fehleranalyse werden Fehler eher in Hinblick auf mögliche Konsequenzen für den Unterricht[18] bzw. für spezielle Fördermaßnahmen[19,20] oder in Hinblick auf das Erforschen des Lehr-Lern-Prozesses untersucht:

- Zufällige Fehler

"Zufallsfehler, die aufgrund der allgemeinen Rahmenbedingungen oder aufgabenspezifischer Besonderheiten einem unkonzentrierten Schüler unterlaufen, sind meistens von geringem Interesse. Von Bedeutung sind Fehler, denen ein generelles Mißverständnis, ein fehlerhafter Algorithmus, ein zu eng oder zu weit gefaßter Begriff o. ä. zugrunde liegen, so daß dieselben Fehler bei einer Wiederholung der Aufgabe wieder auftreten und bei ähnlichen Aufgaben Antworten gegeben werden, die aus der dem Fehler zugrundeliegenden Regelstruktur vorhergesagt werden können."[21]

Für eine deskriptive Fehleranalyse, die sich nur auf schriftliches Material stützt, ergibt sich bei dieser Unterscheidung in wesentliche und unwesentliche Fehler das

---

[17] Zu dieser Problematik sei auf HANISCH 1990, ab Seite 153 verwiesen.

[18] Hier reicht die Bandbreite vom Unterricht einzelner Klassen über die Unterrichtsmethoden einer LehrerIn bis hin zu Fragen, die den Lehrplan betreffen.

[19] Meistens als individuelle Therapie, aber auch gut in Gruppen möglich.

[20] Leider wird dieser positive und produktive Umgang mit Fehlern in der üblichen Unterrichtspraxis sträflich vernachlässigt. Z.B. in BARUK 1989 sind die erschreckenden Folgen, die sicherlich auf Österreich übertragbar sind, nachzulesen.

[21] SOMMER 1985, Seite 40. Durch das oben angeführte Zitat werden auch Fragen nach der Konsistenz von Fehlern aufgeworfen. Sie werden (zusammen mit Fragen der Persistenz bzw. Stabilität und der Resistenz von Fehlern) an anderer Stelle behandelt.

Problem, dass man einem Fehler oft nicht ansieht, ob er Flüchtigkeit als Ursache hat (oder zufällig passiert ist), oder nicht.[22]

Flüchtigkeitsfehler bzw. zufällige Fehler werden im Kapitel A.2.3 näher besprochen.

- Weitere "unwesentliche" Fehler

Wie bereits oben angesprochen, sind auch Fehler, "die aufgrund ... aufgabenspezifischer Besonderheiten einem ... Schüler unterlaufen, ... meistens von geringem Interesse."[23] D.h., dass auch die Auftretenshäufigkeit von Fehlern als Maß für ihre "Wesentlichkeit" herangezogen werden kann. Diese Häufigkeit kann mehr oder weniger von aufgabenspezifischen Besonderheiten abhängen.

A.2.2.2 Die Begriffe im Überblick

In der Literatur wurden (u.a.) folgende Begriffe gefunden (alphabetisch geordnet): äußeres Erscheinungsbild eines Fehlers, Denkfehler, Fehlerbedingungen, Fehlerergebnis, Fehlermuster, Fehlerphänomen, Fehlerstrategie, Fehlertechnik, Fehlerursache, Fehlerverhalten, Fehlleistung, Flüchtigkeitsfehler, formaler Fehler, hartnäckiger Fehler, logischer Fehler, rechnerischer Fehler, Schlampigkeitsfehler, spezifischer Fehler, systematischer Fehler, Systemfehler, typischer Fehler, zufälliger Fehler sowie Fehlerbenennungen wie Übertragungsfehler, Vorzeichenfehler, usw.

An dieser Stelle seien nochmals die zwei wesentlichen Problemstellungen der deskriptiven Fehleranalyse genannt: Es geht einerseits darum, Fehler zu beschreiben - und zwar ohne (implizite) Vorwegnahme der Fehlerursache! - und andererseits um die Frage, wie man jene Fehler benennen soll, die als "wesentlich" erachtet werden.

Obige Begriffe (die Wichtigsten werden im Folgenden besprochen) sind also vor allem vier Anwendungsbereichen zuzuordnen:

---

[22] Weiteres zu dieser Problematik siehe Kapitel A.2.3 weiter unten.

[23] Nach SOMMER 1985, Seite 40.

- Allgemeines Beschreiben von Fehlern (im Unterschied zu den wesentlichen Fehlern und ohne Vorwegnahme von Fehlerursachen) - siehe A.2.2.3,

- Benennung (bzw. Beschreibung) von Fehlern, die als "wesentlich" erachtet werden (- wichtig für die Auswahl der Fehler, die untersucht werden sollen) - siehe A.2.2.4,

- Spezielles Beschreiben von Fehlern (Beschreiben der Fehlerinhalte - wichtig bei der Kategorisierung der Fehler), und

- Ursachen von Fehlern - siehe A.2.2.5.

A.2.2.3 Beschreiben von Fehlern

In diesem Kapitel werden Begriffe vorgestellt, die in der Literatur zur allgemeinen Beschreibung von Fehlern (im Unterschied zur Beschreibung der wesentlichen Fehler und ohne Vorwegnahme von Fehlerursachen) verwendet werden. Hierher gehören Bezeichnungen wie: äußeres Erscheinungsbild eines Fehlers, Fehlerergebnis, Fehlerphänomen und Fehlertechnik; die beiden letzteren werden näher beschrieben.

Fehlerphänomen

"Für die Zwecke der Fehleranalyse erweist es sich als vorteilhaft, zwischen Fehlerphänomen und Fehlerursache zu unterscheiden. Zum Fehlerphänomen zählen die während und nach der Aufgabenbearbeitung anfallenden Notizen, Zeichnungen und mündlichen Mitteilungen des Schülers, ferner die nicht ausgesprochenen, grundsätzlich aber mitteilbaren Überlegungen zum Fehlverhalten."[24]

Was REITBERGER mit diesen "mitteilbaren Überlegungen" meint, ist aus dem Artikel nicht herauszulesen; auch "Fehlverhalten" wird nicht näher definiert. An anderer Stelle ist von "nicht-sprachlichen Äußerungen" die Rede: "Unter dem Fehlerphänomen versteht man die beobachtbaren Teile des fehlerhaften

---

[24] REITBERGER 1989b, Seite 111.

Denkvorgangs, d.h. die diesbezüglichen sprachlichen oder bildhaften Aufzeichnungen und nicht-sprachlichen Äußerungen."[25]

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen Fehlerphänomen und Fehlerursache, REITBERGER stellt dazu fest: "Es ist nicht möglich, ohne zusätzliche empirische Kontrolle aus einem bestimmten Fehlerphänomen auf eine bestimmte Fehlerursache zu schließen."[26]

"Die Fehlerphänomene gliedern sich in situative (z.B. flüchtigkeitsbedingte), personale (z.B. gewohnheitsmäßige) und gegenstandsbezogene (z.B. auf den Unterrichtsgegenstand Bruchzahlbegriff bezogene) Phänomene."[27] Diese Einteilung der Fehlerphänomene ist aber erst dann sicher anwendbar, wenn die Fehlerursachen ergründet sind![28]

Da diese Einteilung nicht auf alle Fehlerphänomene angewendet werden kann, wäre es sinnvoll, zuerst zwischen "identifizierten und nicht identifizierten Fehlerphänomenen" zu unterscheiden[29]:

Bei einem "identifizierten Fehlerphänomen" ist die Fehlerursache bekannt, ein "nichtidentifiziertes Fehlerphänomen" beschreibt PESCH wie folgt: "Die Aufzeichungen oder Äußerungen des Schülers sind unzureichend, d.h. unvollständig, nicht verständlich oder überhaupt fehlend."[30]

Eine weitere Schwierigkeit bei der Einteilung der Fehlerphänomene nach REITBERGER ergibt sich aus der folgenden Feststellung: "Es gibt verschiedene Deutungsmöglichkeiten für ein- und denselben Fehler. Manche Fehler sind

---

[25] REITBERGER 1992, Seite 295.

[26] REITBERGER 1992, Seite 291-292.

[27] REITBERGER 1992, Seite 295.

[28] Aus der Beschreibung seiner Vorgehensweise (REITBERGER 1992, Seite 292) muss vermutet werden, dass REITBERGER diese Einteilung bereits vor einer Untersuchung der Fehlerursachen vornimmt, also aufgrund einer spekulativen Ursachenzuordnung. REITBERGER nimmt damit in Kauf, dass Fehlerphänomene, die er als situativ oder personal einstuft und aus diesem Grund nicht weiter untersucht, doch andere Ursachen aufweisen können. (Vergleiche auch "Typische Fehler" in A.2.2.4)

[29] Wie in PESCH 1996, Seite 22.

[30] PESCH 1996, Seite 22.

möglicherweise deshalb so 'hartnäckig', weil ihnen mehrere Fehlerursachen zugrunde liegen."[31]

Fehlertechnik

Dieser Begriff wird in der Literatur öfter verwendet, RADATZ definiert ihn so:

"Man kann begrifflich zwischen Fehlertechnik und Fehlerursachen unterscheiden, wobei unter Fehlertechnik die an einer Fehllösung analysierbare Strategie, Regel oder der falsche Algorithmus verstanden werden."[32]

Der Begriff Fehlertechnik nach RADATZ liegt vom Bedeutungsinhalt her also zwischen einem allgemeinen und einem (richtig) identifizierten (nichtsituativen) Fehlerphänomen nach REITBERGER.

Nicht zu jedem Fehlerphänomen lässt sich eine Fehlertechnik angeben, manchmal findet man die Fehlertechnik erst nach einigem Nachdenken und Probieren (z. B. Vertippen am Taschenrechner): "...nicht alle Schülerfehler sind im Hinblick auf Fehlertechnik analysierbar und erst recht nicht auf das zugrunde liegende Ursachengeflecht."[33]

Eine ursachenorientierte Beschreibung einer Fehlertechnik kann zu falschen Vermutungen über die Fehlerursache führen: "Bei einer Beschränkung auf die internen Fehlerbedingungen auf Seiten der Schüler ist es überaus schwierig, den Prozeß des Lösungsvorganges zu erfassen. Das Produkt allein oder die Fehlertechnik liefern nur selten ausreichende Informationen für eine Analyse der Ursachen. So können äußerlich idente Fehlerergebnisse aus sehr divergenten Lösungsprozessen heraus resultieren."[34] Es ist daher darauf zu achten, dass weder explizite noch implizite Spekulationen über die Fehlerursachen in die Beschreibung einer Fehlertechnik einfließen.

[31] TREMSCHNIG 1995, Seite 129.

[32] RADATZ 1980b, Seite 219.

[33] MÜLLER 1998, Seite 50.

[34] RADATZ 1980b, Seite 220.

A.2.2.4 Benennen von wesentlichen Fehlern

Im vorigen Kapitel ging es um die Abgrenzung der Fehlerbeschreibung von den Fehlerursachen. In diesem Kapitel geht es um Begriffe, mit deren Hilfe wesentliche Fehler bezeichnet werden - mit dem Ziel einer Eingrenzung des Fehlerbegriffs unter einem bestimmten Blickwinkel[35]: Meist werden bestimmte Fehlerhäufigkeiten (bei einer SchülerIn, bei mehreren SchülerInnen und/oder bei mehreren Aufgaben) verlangt und Fehler mit bestimmten Ursachen (wie z.B. Flüchtigkeit) ausgesondert.

Entsprechende Termini sind: (Denkfehler[36]), Fehlermuster, (hartnäckiger Fehler), (spezifischer Fehler), systematischer Fehler, (Systemfehler[37]), typischer Fehler bzw. Fehlertyp; zum Begriff Fehlerstrategie sei auf das folgende Kapitel verwiesen.

Fehlermuster

Dieser Begriff wird häufig verwendet, aber nur selten klar definiert, was auch WELLENREUTHER moniert: "In der Literatur werden die Begriffe 'Fehlermuster' oder 'Fehlertypen' in recht laxer Weise verwendet."[38]

"Zumindest erschiene es sinnvoll, nur dann von einem 'Fehlermuster' zu sprechen, wenn gezeigt wurde, daß sich der betreffende Fehler mit einer hohen Konsistenz in einer Stichprobe der relevanten Aufgaben zeigt." Aus dieser weiteren Beschreibung von WELLENREUTHER wird deutlich, dass er unter "Fehlermuster" einen "wesentlichen Fehler" versteht, was in etwa einem "typischen Fehler" nach REITBERGER entspricht (dieser Begriff wird als Nächstes besprochen).

LORENZ teilt diese Auffassung: "Sinnvoll an der Verwendung dieses Begriffs ist ... die Forderung, erst dann von Fehler*mustern* zu sprechen, wenn diese sich an einer Fülle von Aufgaben gezeigt haben. In diesem Zusammenhang ließe sich

---

[35] Welche Blickwinkel dies sein können, dazu siehe auch Kapitel A.2.2.1.

[36] Siehe Seite 43

[37] Ein von einer Schülerin gebrauchter Begriff im Sinne von "Denkfehler": "Bei diesem Lehrer wog ein Rechenfehler genauso schwer wie ein Systemfehler, beim anderen war es vor allem wichtig, daß der Weg richtig war." - zitiert in HANISCH 1990, Seite 12.

[38] WELLENREUTHER 1986, Seite 276.

diskutieren, ob eine Einigung auf einen Fehlermindestprozentsatz wünschenswert ist (was ich bezweifle.)"[39]

RADATZ beschreibt den Begriff so:

"Schülerfehler im Mathematikunterricht entstehen nur selten zufällig oder durch flüchtiges Verrechnen, ihnen liegt (fast) immer eine bestimmte Lösungsstrategie bzw. Regelstruktur zugrunde, die nachvollziehbar, begründbar und für die Schüler selbst sinnvoll ist. Diese Fehlermuster wenden die Schüler in Aufgabenklassen oft systematisch und konsequent an."[40]

Weiters:[41] "Die inhaltlich-mathematische Beschreibung von Fehlern erlaubt oft das Nennen von Fehlermustern." und "Wahrnehmbar und beschreibbar aus Schülerfehlern sind Fehlermuster ('Bilder' einer Leistungsschwierigkeit, buggies). Derartige Oberflächenphänomene gestatten eine inhaltlich-deskriptive Fehlertypologie mit Fehlerklassen (z.B. Übertragsfehler bei der schriftlichen Subtraktion)."

Neben einer Bemerkung von RADATZ, dass "Fehlermuster oft nicht mehr eindeutig beschreibbar sind."[42] sei noch die Feststellung von WELLENREUTHER angeführt, dass sie oft auch schwer erkennbar sind:

"Viele spezielle 'Fehlermuster' fallen dem Lehrer beim Korrigieren von Klassenarbeiten nicht auf, obwohl der Schüler sie systematisch und konsequent anwendet. Diese Fehler werden dann vorschnell als Leichtsinns- oder Konzentrationsfehler angesehen, da der Schüler ansonsten ja alle Aufgaben zu dem fraglichen Verfahren sicher gelöst hat. Um solche speziellen Schwierigkeiten und sich daraus ergebende Fehlermuster festzustellen, ist es notwendig, diese speziellen Schwierigkeiten näher zu definieren und zu Ihnen gezielt Testaufgaben zu konstruieren."[43] "Denn Fehlermuster eines Schülers können sich nur in solchen

[39] LORENZ 1987, Seite 220; vergleiche hierzu auch den Begriff "systematischer Fehler" (nach COX) in diesem Kapitel weiter unten.

[40] RADATZ 1985, Seite 18.

[41] RADATZ 1985, Seite 20, 22.

[42] RADATZ 1985, Seite 21.

[43] WELLENREUTHER 1986, Seite 271.

Aufgaben manifestieren, die das fehlerauslösende Schwierigkeitsmerkmal enthalten."[44]

Typische Fehler (auch Fehlertypen)

"Die Fehlerphänomene sind im Hinblick auf Planung und Realisation von Unterricht nicht gleichwertig."[45] Die in diesem Sinne wesentlichen Fehler nennt REITBERGER "typische Fehler" und beschreibt sie wie folgt:

"Anhand der Testergebnisse werden ... die Fehlerphänomene ermittelt. Nach Aussonderung situativer, personaler und anderer Fehlerphänomene verbleiben ... typische Fehler."[46] "Sie treten zugleich bei *mehreren* Schülern und *mehreren*, durch Aspekte des Unterrichtsgegenstandes charakterisierten Aufgaben auf."[47]

Etwas vereinfacht dargestellt bedeutet dies Folgendes:

REITBERGER betrachtet flüchtigkeitsbedingte und seltene Fehlerphänomene als nicht wesentlich und scheidet sie zu Beginn der Untersuchung aus.[48] Die verbleibenden Fehlerphänomene nennt er typische Fehler und untersucht ihre Ursachen. ("Da für ein Fehlerphänomen oft mehrere Ursachen möglich sind, müssen sofort nach dem Test die typischen Fehler gefunden und dann die Hypothesen über Ursachen mittels Interview geprüft werden."[49])

Dabei kann es passieren, dass Fehlerphänomene, die als flüchtigkeitsbedingt ausgeschieden wurden, auf andere Ursachen zurückzuführen sind, u.U. können sie nichterkannte typische Fehler sein - dies ist aber im Nachhinein nicht mehr feststellbar.

---

[44] GERSTER 1984, Seite 63.

[45] REITBERGER 1992, Seite 295.

[46] REITBERGER 1992, Seite 292. Mit "anderen" Fehlerphänomenen meint REITBERGER "aufgabenspezifische Fehlerphänomene, die aufgrund ihrer Besonderheit von untergeordneter Bedeutung sind."

[47] REITBERGER 1992, Seite 295; (zu Aspekten siehe Kapitel A.1.2.2)

[48] Zur Problematik dieser Vorgangsweise siehe A.2.2.3.

[49] PESCH 1996, Seite 20. (Sie orientiert sich sehr stark an REITBERGER.)

Andererseits können sich als typisch angesehene Fehler bei der Untersuchung der Ursachen als flüchtigkeitsbedingt herausstellen. REITBERGER gibt diesen Anteil der "scheinbaren typischen Fehler" mit 8% bzw. 14% an.[50]

TREMSCHNIG spricht in ihrer Arbeit von "hartnäckigen, immerwiederkehrenden Fehlertypen ..., deren Ursachen nicht Schlampigkeit, Mangel an Konzentration, Aufregung oder Angst sind, sondern im Nichterfassen der Komplexität des Variablenbegriffs oder aber in Mißinterpretationen der algebraischen Symbolik, welche nicht nur als Notationsform, sondern vielmehr in ihrer begrifflichen Bedeutung verstanden werden muß, zu suchen sind."[51]

Zum Zusammenhang zwischen der Gesamtfehlerzahl und dem Anteil der typischen Fehler stellt REITBERGER fest, daß mit abnehmender Leistungsfähigkeit (definiert als höhere Gesamtfehlerzahl) weniger typische Fehler auftreten.[52] Ähnliches findet CASEY.[53]

Systematische Fehler

Auch dieser Begriff findet sich in der Literatur recht häufig, aber selten definiert. In anderen Bereichen wird er unterschiedlich gebraucht, sodass seine Bedeutung für die Fehleranalyse nicht von vornherein klar ist:

1) In der experimentellen Psychologie versteht man unter einem systematischen internen Fehler die (verfälschenden) Einflüsse von unkontrollierten Variablen auf die interne Validität.[54]

2) In der Naturwissenschaft bezeichnet man als systematischen Fehler, wenn ein gemessener Wert in immer gleicher Weise vom wahren Wert abweicht.

---

[50] REITBERGER 1992, Seite 307 (es wurden zwei Populationen untersucht, daher zwei Zahlenangaben.)

[51] TREMSCHNIG 1995, Seite 2.

[52] Siehe REITBERGER 1992, Seite 301 - die Gründe erläutert REITBERGER auf Seite 301-303.

[53] Besprochen in TREMSCHNIG 1995, Seite 126.

[54] Nach FRÖHLICH 1993, Seite 161.

Wenn SchülerInnen von einer richtigen Aufgabenlösung abweichen, so muss dieses "immer" i.A. durch eine bestimmte Wahrscheinlichkeit bzw. Fehlerhäufigkeit ersetzt werden, wie z.B. die Definition von COX zeigt:

"So unterscheidet z.B. Cox zwischen systematischen Fehlern, das sind jene Fehler, bei denen mehr als 60% der Aufgaben und Probleme gleichen Schwierigkeitsgrads mit der gleichen Fehlertechnik bearbeitet werden, Zufallsfehlern ohne systematische Wiederholung und offensichtlichen Sorgfalts- bzw. Konzentrationsfehlern."[55]

Zusammenfassung

So verständlich das Bemühen ist, sich auf wesentliche Fehler zu konzentrieren, so schwierig und unsicher ist andererseits die Abgrenzung zu unwesentlichen Fehlern. Dies zeigen die oben besprochenen Begriffe deutlich. Will man allein aus schriftlichen SchülerInnenarbeiten (ohne der Möglichkeit des Nachfragens) die typischen Fehler erkennen, ist man oft auf Spekulationen und Vermutungen angewiesen und muss mit einem relativen großen Anteil an nicht erkannten typischen Fehlern (die zu Unrecht ausgesondert wurden) bzw. an scheinbaren typischen Fehlern (die zu Unrecht als solche bezeichnet werden) rechnen.

WELLENREUTHER nennt als "grundlegende methodologische Probleme von Fehleranalysen: Wie sind systematische Fehler oder typische Fehlermuster empirisch festzustellen?..."[56]

A.2.2.5 Fehlerursachen

Das Ergründen von Fehlerursachen ist nicht Thema dieser Arbeit und wird daher sehr kurz behandelt. (Siehe auch die Kapitel A1.1.1 (die Erklärungsebene III nach RADATZ) und A.1.1.2 mit Hinweisen auf weiterführende Literatur.)

An dieser Stelle sollen zur Abgrenzung von nicht ursachenbezogenen Begriffen die wichtigsten Begriffe, die sich auf Fehlerursachen beziehen, vorgestellt

---

[55] In MÜLLER 1998, Seite 51; zur Frage eines Fehlermindestprozentsatzes vergleiche auch das Zitat von LORENZ auf Seite 52

[56] WELLENREUTHER 1986, Seite 270.

werden: Fehlerbedingung, Fehlerstrategie, Fehlertendenz, (Fehlerverhalten[57] bzw. Fehlerverhaltensweisen[58]), (innere Systematik von Fehlern[59]). Im Rahmen dieser Begriffsklärung werden auch einige wichtige Aspekte zur Problematik der Fehlerursachen besprochen.

RADATZ weist darauf hin, dass Fehlerursachen nicht nur bei den SchülerInnen zu suchen sind: "Bei der Analyse der Fehlerursachen gibt es einige Ansätze der Beschreibung auf der Ebene der Schülerfaktoren, es fehlt aber an Untersuchungen möglicher Ursachen im komplexen Lehr-Lern-prozeß, etwa zu curricular bedingten Fehlerursachen (z.B. welche didaktisch-curricularen Modelle, welche didaktischen Prinzipien u.a. erzeugen besondere Lernschwierigkeiten und Fehler?), Untersuchungen zum Lehrerverhalten im Unterricht (z.B. die Rolle der Lehrersprache oder der Unterrichtsform im Zusammenhang mit Schülerfehlern)."[60]

Das ist zwar eine Binsenweisheit, erscheint aber aufgrund der von RADATZ angesprochenen Defizite in der Literatur erwähnenswert. Der Grund für das Fehlen entsprechender Untersuchungen dürfte im ausgesprochen schwer zu entwirrenden Variablenbündel zu suchen sein, von dem die Fehlerursachen abhängen.

So sieht LORENZ es als großen Erfolg an, dass fehlerverursachende Schülerkognitionen individuell erklärt werden können, räumt aber ein, dass die kognitive Fehleranalyse (noch) nicht imstande ist, populationsbezogene Aussagen über Fehlerursachen zu machen (schon gar nicht zurückreichend bis zur unterrichtlichen Ebene).

Hierzu passt der folgende Vorwurf von WELLENREUTHER: "Fehlerstrategien sind weitergehende Beschreibungen von Fehlern, nicht aber 'Ursachen' von Fehlern. Die didaktische Relevanz kognitiver Fehleranalysen ist dadurch begrenzt, daß sie das relevante Ursachenfeld für Fehler, den Unterricht, in der

---

[57] Aus den Ausführungen von WELLENREUTHER 1986 (Seite 282-283) kann man folgern, dass er in diesen Begriff auch die Fehlerursachen einbezieht. Eine genaue Definition gibt er nicht.

[58] Auch für diesen Begriff bei SOMMER 1985 (Seite 41) gilt Ähnliches.

[59] Damit meint BECKER 1985 (Seite 48-49) Fehlerursachen.

[60] RADATZ 1980b, Seite 225.

Regel nicht berücksichtigt."[61] Weitere Rede und Gegenrede sowie Ausführungen über die Ansätze und Probleme der experimentellen Unterrichtsforschung sind in LORENZ 1987 und WELLENREUTHER 1986 nachzulesen.[62]

Fehlerbedingung (und Fehlertendenz)

Diese beiden Begriffe sollten nicht synonym für "Fehlerursache" verwendet werden, weil man unter ihnen nach REITBERGER Faktoren versteht, aus denen sich eine Fehlerursache zusammensetzen kann:

"Nach Kiessling setzt sich die Ursache eines Fehlers aus mehreren, von ihm als Dispositionen und Bedingungen bezeichneten Faktoren zusammen. In Anlehnung an Kiessling werden im folgenden drei Faktoren unterschieden: *fehlerbegünstigende Einstellungen*, *Fehlertendenzen* und *fehlerbegünstigende Bedingungen*. Die Fehlertendenzen werden entsprechend einem Vorschlag von Radatz (1980) nach Fehlerursachen bei der Informationsaufnahme und der Informationsverarbeitung unterteilt."[63]

Die fehlerbegünstigenden Einstellungen beruhen auf sozialer Interaktion, unter den fehlerbegünstigenden Bedingungen (oder kurz Fehlerbedingungen) sind vor allem Flüchtigkeit und der Luchins-Effekt zu verstehen.[64]

RADATZ verwendet den Begriff deutlich anders (nicht sehr klar und nicht näher definiert): "Bei einer Beschränkung auf die internen Fehlerbedingungen auf Seiten der Schüler ist es überaus schwierig, den Prozeß des Lösungsvorganges zu erfassen. Das Produkt allein oder die Fehlertechnik liefern nur selten ausreichende Informationen für eine Analyse der Ursachen. So können äußerlich idente Fehlerergebnisse aus sehr divergenten Lösungsprozessen heraus resultieren."[65]

Auch WELLENREUTHER meint mit "Bedingungen, die zu Fehlern führen" wohl etwas anderes als REITBERGER mit dem Begriff "Fehlerbedingung", wenn er schreibt: "Auch Forschungen über den Erwerb kognitiver Strategien z.B. zur Bewertung der Richtigkeit von Ergebnissen (vgl. CAMPIONE 1984) können

---

[61] WELLENREUTHER 1986, Seite 299.

[62] Vergleiche auch HASEMANN 1985, Seite 8.

[63] REITBERGER 1992, Seite 302.

[64] Nach REITBERGER 1992, Seite 302-304; Zu den Fehlerbedingungen siehe vor allem REITBERGER 1989b und auch PESCH 1995, Seite 47-62.

[65] RADATZ 1980b, Seite 220.

helfen, unser Wissen über die Bedingungen zu erweitern, die zu Fehlern bei Schülern führen."[66]

Der Begriff Fehlerbedingung scheint somit nicht sehr glücklich gewählt zu sein. Es zeigt sich hier die Schwierigkeit, geeignete Bezeichnungen für die zahlreichen Aspekte des Fehlerbegriffs zu finden.

Fehlerstrategie

SOMMER beschreibt diesen Begriff wie folgt: "Von Bedeutung sind Fehler, denen ein generelles Mißverständnis, ein fehlerhafter Algorithmus, ein zu eng oder zu weit gefaßter Begriff o. ä. zugrundeliegen, so daß dieselben Fehler bei einer Wiederholung der Aufgabe wieder auftreten und bei ähnlichen Aufgaben Antworten gegeben werden, die aus der dem Fehler zugrundeliegenden Regelstruktur vorhergesagt werden können. Eine solche stabile Ursache nennen wir eine 'Fehlerstrategie'."[67]

Auch LORENZ sieht das Kriterium der Vorhersagbarkeit als wesentlich an: "Hat man herausgefunden - durch geeignete Methoden wie das Vorlegen bekannter Aufgaben, vorsichtiges Nachfragen, wie er denn gerechnet habe etc. - welche Fehlerstrategie der Schüler benutzt, dann lässt sich mit einer gewissen, relativ hohen Genauigkeit vorhersagen, welches Ergebnis er bei anderen, ähnlichen Aufgaben errechnen wird."[68]

Fehlerstrategie ist somit die Benennung eines in Hinblick auf bestimmte Fehlerursachen (mit einer bestimmten Konsistenz) wesentlichen Fehlers.

---

[66] WELLENREUTHER 1986, Seite 299.

[67] SOMMER 1985, Seite 40.

[68] LORENZ 1987, Seite 211.

A.2.3 Flüchtigkeitsfehler

Die Flüchtigkeitsfehler selbst stehen nur selten im Mittelpunkt des Interesses der wissenschaftlichen Fehleranalyse[69] (Vergleiche die Kapitel A.2.2.1, A.2.2.2 und A.2.2.4). In der Unterrichtspraxis werden solche Fehler ebenfalls oft als unwesentlich eingestuft. Aber sollte es nicht auch ein Ziel des Schulbesuchs sein, ihre Anzahl zu verringern?[70]

Ihre Wichtigkeit erlangen die Fehler dieser Art aus der Grundannahme der Fehleranalyse, die davon ausgeht, dass "Fehler nur selten zufällig oder durch flüchtiges Verrechnen entstehen, ..."[71]. Daraus ergeben sich zwei Fragen: Wie erkennt man Flüchtigkeitsfehler (um sie in einer Vorselektion der Fehler aussondern zu können) und wie groß ist ihr Anteil an der Fehlergesamtheit?

Zur Benennung dieser Fehler

Weitere Bezeichnungen für diese Art Fehler sind "careless error" und Schlampigkeitsfehler (mit deutlich negativerem Assoziationshintergrund) sowie zufälliger Fehler[72] - wobei Flüchtigkeitsfehler und zufälliger Fehler nicht immer synonym gebraucht werden, z.B. unterscheidet COX zwischen "Zufallsfehlern ohne systematische Wiederholung und offensichtlichen Sorgfalts- bzw. Konzentrationsfehlern."[73] Die Benennungsvielfalt ergibt sich wohl aufgrund des breiten Ursachenspektrums dieser Fehlerart[74] - "Flüchtigkeit ist ein Synonym für mangelnde Aufmerksamkeit und bezeichnet eher eine psychische Fehlerursache"[75] als ein Fehlerphänomen.

---

[69] Eine Ausnahme ist z.B. REITBERGER 1989b; siehe auch PESCH 1996, Seite 47-49 und MÜLLER 1998, Seite 27-28 sowie an einigen anderen Stellen (mit kommentierten Beispielen).

[70] Wer kennt nicht die Mär von der SchülerIn, "die alles kann, aber jede Schularbeit verhaut, weil sie so unkonzentriert ist."

[71] RADATZ 1985, Seite 18; vergleiche auch Seite 11 .

[72] Siehe hierzu auch A.2.2.1.

[73] MÜLLER 1998, Seite 51.

[74] Zu möglichen Einteilungen von Flüchtigkeitsfehlern und weiteren Benennungen siehe z.B. REITBERGER 1989b; PESCH 1996, Seite 47-49; TREMSCHNIG 1995, Seite 142.

[75] REITBERGER 1989b, Seite 111.

Häufigkeit und Definition von Flüchtigkeitsfehlern

TREMSCHNIG referiert drei Arbeiten (mit unterschiedlicher Interview-Technik und unterschiedlicher Auswahl der SchülerInnen!) über Algebra-Fehler von SchülerInnen der 5. bis 9. Schulstufe.[76] Als "careless error" wird darin ein Fehler definiert, der in einem nachfolgenden Interview nicht in gleicher Weise wiederholt, sondern von der SchülerIn selbst korrigiert wurde. In den drei Studien liegt der Anteil an solchen "careless errors" zwischen 20 % und 40%.

Zu obiger Definition ist zu bedenken, dass "careless errors" zwar meistens versehentlich passieren[77] (d.h. zu einem zufälligen Zeitpunkt eintreten, sodass ihr Auftreten nicht vorhersagbar ist), das Ergebnis solcher "carelessness" ist jedoch sehr oft gut vorhersagbar (also nicht zufällig). So wird die Regel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ häufig in der verkürzten Form $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ angewendet - dies passiert vielen SchülerInnen versehentlich, d.h. auf Nachfragen korrigieren sie selbst den Fehler. Die Art und Weise sowie die große Häufigkeit gerade dieser falschen Regelanwendung ist aber kein Zufall - bzw. Zeichen eines "kausal determinierten Zufallsfehlers."[78]

SOMMER berichtet von ähnlichen Ergebnissen: "Bei der Interpretation von Einzelfehlern werden in verschiedenen Untersuchungen mit erstaunlicher Übereinstimmung ca. 70% der Fehler als regelhaft und nicht zufällig erkannt. Betrachtet man dagegen das Lösungsverhalten eines Schülers bei mehreren gleichartigen Aufgaben, fällt die Erklärungsrate mit ca. 50% deutlich geringer aus, wie Cox (1975) zeigt. Er erkennt einen Fehler nur dann als systematisch an, wenn ein Schüler mindestens drei von fünf vergleichbaren Aufgaben auf dieselbe Art und Weise falsch macht."[79] Und: "Die Beurteilung eines Schülerverhaltens als 'zufällig' ist immer bezogen auf die Reichweite der Theorie dieses Verhaltens".[80]

---

[76] TREMSCHNIG 1995 Seite 119-127: NEWMAN 1977, CASEY 1978, CLEMENTS 1980.

[77] Es kann sich auch um das Ergebnis eines wohlüberlegten Prozesses handeln, wenn z.B. eine SchülerIn zwischen zwei Lösungsmöglichkeiten schwankt. Im nachfolgenden Interview nennt sie dann oft die andere Variante - ohne weiteres Nachfragen scheint somit ein Flüchtigkeitsfehler identifiziert, obwohl es im Denken der SchülerIn eine (u.U. große) Unsicherheit gibt.

[78] Vergleiche das Zitat von RADATZ auf Seite 10.

[79] SOMMER 1985, Seite 40 - Beachte, dass die angeführten Prozentsätze sich auf die <u>nicht</u> zufälligen Fehler beziehen!

[80] SOMMER 1985, Seite 40; im Folgenden beschreibt er die repair-theory von BROWN/VAN LEHN, siehe Seite 45.

Bei REITBERGER findet man die kleinsten Häufigkeiten für Flüchtigkeitsfehler: "... der Anteil der diesbezüglichen Fehler beträgt nach Schätzung des Verfassers anhand eigener Untersuchungen weniger als 10 Prozent."[81]

Weiters sei noch auf Ergebnisse von REITBERGER hingewiesen[82], in denen er den Anteil der typischen Fehler an der Gesamtfehlerzahl bespricht (siehe Seite 55). Der Anteil an Flüchtigkeitsfehlern ist daraus aber nicht direkt ersichtlich, weil nicht alle nicht typischen Fehler durch Flüchtigkeit bedingt sind.

Zusammenfassung

- Unter dem Begriff Flüchtigkeitsfehler (u.ä. Benennungen) wird eine Vielzahl von Fehlerursachen zusammengefasst. Er kann daher nur dann mit einiger Sicherheit verwendet werden, wenn zusätzlich zu den schriftlichen Arbeiten der SchülerInnen die Möglichkeit zu Interviews o.Ä. besteht.

- Die tatsächliche Häufigkeit ihres Auftretens hängt von vielen Faktoren ab, u.a. von der Unterschiedlichkeit der Aufgaben, von der Art der Lösungsmethoden, von den Unterrichtsmethoden und vom Verhalten der LehrerInnen, von kognitiven Stilvariablen und anderen Persönlichkeitsmerkmalen der SchülerInnen, vom Lernfortschritt und dem Leistungsniveau der SchülerInnen sowie von äußeren Rahmenbedingungen.[83]

- Die gemessenen Häufigkeiten von Flüchtigkeitsfehlern werden neben den obigen Faktoren wesentlich von der Vorgangsweise der Untersuchung bestimmt! - Was wird unter einem Flüchtigkeitsfehler verstanden? Wird mit Steckenbleiben oder Weiterhelfen gearbeitet (siehe Kapitel A.1.2.9)? Die gefundenen Fehlerhäufigkeiten reichen von weniger als 10% bis 50% (dabei handelt es sich um populationsbezogene Mittelwerte, die Häufigkeiten bei einzelnen SchülerInnen können stark differieren). Wirklich aussagekräftig werden diese relativen Häufigkeiten erst, wenn auch die absoluten Häufigkeiten und die Art der SchülerInnen- und Aufgabenauswahl bekannt sind (Vergleiche die Ausführungen über die Fehlerhäufigkeit in Kapitel A.1.2.5).

---

[81] REITBERGER 1989b, Seite 114.

[82] REITBERGER 1992, Seite 301(-303).

[83] Vergleiche hierzu REITBERGER 1989b; REITBERGER 1992, Seite 301-303 und TREMSCHNIG 1995.

A.3 Vergleichbare Arbeiten zur gegebenen Themenstellung

Fehleranalytische Arbeiten zum Mathematik-Stoff der 9. bis 12. Schulstufe sind selten[1], zu Fehlern bei Abschlussprüfungen in der Sekundarstufe II wurden nur zwei verfügbare Untersuchungen in Deutsch (aus der ehemaligen DDR) bzw. Englisch (aus Israel) gefunden. Sie werden im Folgenden besprochen.

A.3.1. BIRTH, I. u.a. (1979)

Titel: „Zu Ergebnissen der schriftlichen Abschluß- und Reifeprüfungen im Fach Mathematik des Schuljahres 1977/78 und den sich daraus ergebenden Schlussfolgerungen für die Unterrichtsarbeit und die Vorbereitung der Prüfungen am Ende des Schuljahres 1978/79"

Dieser Artikel ist sehr allgemein gehalten und für die vorliegende Arbeit kaum hilfreich, aus geschichtlichen Gründen aber lesenswert, wie ein kurzes Zitat zeigen soll: „Mit den jetzt geltenden Lehrplänen für Mathematik haben wir endgültig mit dem bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterricht gebrochen."[2]

In der DDR (genauso wie z.B. heute noch in Bayern, Frankreich, Ungarn oder Israel) wurden die Maturaangaben zentral erstellt und waren für alle Schulen gleich. Aus den Beispielangaben, die der Artikel enthält, kann man unschwer erkennen, dass sich das „Brechen mit dem bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterricht" in meist sehr oberflächlicher Kosmetik der Angabetexte

---

[1] Als ein Beispiel sei die Dissertation von MÜLLER 1998 über Trigonometriefehler erwähnt.

[2] BIRTH 1979 Seite 16; die darauf folgenden und vorangehenden Zeilen sind Lehrstücke dafür, was es zwischen den Zeilen zu lesen gibt und wie man Allgemeinplätze formuliert. Es wäre interessant, auch einmal unsere Lehrpläne mit einem ähnlichen inneren und geschichtlichen Abstand lesen zu können.

erschöpft. Diese Kunst des Modernisierens der Verpackung bei gleichem Inhalt beherrschen allerdings auch österreichische SchulbuchautorInnen[3].

Jedenfalls sind die Aufgaben des Abiturjahrgangs 1977/78 in der DDR durchaus vergleichbar mit den in dieser Arbeit untersuchten Maturaaufgaben.

Aus den sehr allgemein gehaltenen Ergebnissen bei BIRTH 1979 sind im Folgenden einige Punkte ausgewählt, bei denen es Übereinstimmung oder Gemeinsamkeiten mit den Ergebnissen dieser Untersuchung gibt:[4]

Bei den 1500 Arbeiten aus 70 Klassen waren „zum Teil erhebliche Leistungsunterschiede zwischen den ... Klassen festzustellen".

Nicht näher spezifizierte Probleme mit Unterstufen-Fehlern werden im Zusammenhang mit möglichem Zeitdruck genannt, sie dürften aber doch relativ massiv aufgetreten sein: „Es wird aber auch von einigen Lehrern betont, daß der Umfang der Arbeit und damit der Zeitaufwand für ihre Bewältigung größer als im Vorjahr war. Wenn auch für die Abiturienten kein genereller Zeitmangel entstand, so kann doch nicht ausgeschlossen werden, daß die wiederum recht zahlreichen Punktverluste infolge elementarer Fehler beim Rechnen, beim Differenzieren und Integrieren sowie beim Lösen von Gleichungen damit zusammenhängen."

Der Folgerung „Ein besseres Ergebnis kann zweifellos erreicht werden, wenn es gelingt, alle Abiturienten langfristig und systematisch an das selbständige Kontrollieren ihrer Lösungswege und Ergebnisse zu gewöhnen und sie zur Durchführung solcher Kontrollen zu befähigen." kann man sich nur anschließen.

„Auch im Hinblick auf Sorgfalt und Exaktheit im Detail sowohl bei der Erfassung der einzelnen Teilaufgaben als auch bei der Niederschrift beschrittener Lösungswege (einschließlich verlangter Zeichnungen und Skizzen) ist in nicht wenigen Klassen noch eine umfangreiche Erziehungsarbeit zu leisten." Abgesehen vom Unbehagen, das diese Wortwahl auslösen mag, trifft der Kern dieser Aussage ein wichtiges Problemfeld.

---

[3] Als ein Beispiel soll die an den Haaren herbeigezogene Einleitung des Kapitels Ellipse in NOVAK 1991, Seite 7 genannt sein. In Stichworten: Formel I → Elektronik → Oszilloskop → Ellipse. Wirklich neuartige Aufgaben (im Sinne des neuen Lehrplans) findet man in REICHEL/MÜLLER/HANISCH 1999a bis 1999d, wenn auch manchmal noch in geringem Umfang.

[4] BIRTH 1979 Seite 22 bis 27.

Bei einer Extremwertaufgabe „fällt auf, daß der Punkt für *Nachweis des Minimums* nur von weniger als 70% der Abiturienten erreicht wurde." Damit hat sich bei diesem Aufgabentyp (zumindest was die Punktevergabe anlangt) genau derselbe Teilschritt als problematisch erwiesen wie bei den hier untersuchten Arbeiten, wenn auch unklar ist, warum.

Auch die „Veranlassung, noch einmal nachdrücklich auf die Notwendigkeit exakter Größenangaben (spätestens im Antwortsatz) hinzuweisen" besteht bei einigen der hier untersuchten Arbeiten.

A.3.2 MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/ INBAR (1987)

Titel: "An empirical classification model for errors in High School mathematics"

"... the guiding idea in this study was to classify the errors by means of documented performance without appealing to processes in the students´ minds that might or might not have yielded the errors committed and without faulting what the student did not do."[5]

Als wichtigstes Ergebnis sind dem Titel der Studie entsprechend die 6 sorgfältig erarbeiteten Fehler-Kategorien zu nennen, wobei jeder gefundene Fehler eindeutig einer Kategorie zuzuordnen ist:

"Misused data / Misinterpreted language / Logically invalid inference / Distorted theorem or definition / Unverified solution / Technical error"[6]

Zu jeder Kategorie findet man einige Unterkategorien in verbaler Beschreibung und einige Beispiele (leider zu wenige, um sich von jeder Fehlerkategorie ein umfassendes Bild machen zu können).

[5] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 4.

[6] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 9-13

Die konkrete Vorgangsweise ist auf eine österreichische Matura leider nicht übertragbar (zu den Gründen siehe unten). Das Ergebnis dieser israelischen Arbeit (die Fehlerkategorisierung) ist für die vorliegende Themenstellung zu allgemein und wurde daher nicht übernommen. In den Detailbeschreibungen der einzelnen Fehlerkategorien waren aber wertvolle Anregungen enthalten. Es folgt eine kurze Zusammenfassung des Artikels und eine Auflistung der wichtigsten Ideen für die vorliegende Arbeit:

Zusammenfassung

Ähnlich wie in Frankreich ist in Israel die Abschlussprüfung landesweit in allen Schulen gleich und wird auch anonym korrigiert und beurteilt. Sie findet am Ende der 11. Schulstufe statt, also ein Jahr früher als in Österreich, und zwar für rund 20.000 SchülerInnen jährlich „in the nonscientific tracks of academic high schools in Israel on the completion of their mathematical education."[7]

Das Vorhandensein einer großen Zahl von Arbeiten mit den gleichen Angaben ist für eine fehleranalytische Arbeit natürlich von großem Vorteil. In Österreich ist dies bei Prüfungsarbeiten nicht zu finden.

Ähnlichkeiten zur vorliegenden Arbeit ergeben sich aus dem Alter der SchülerInnen und daraus, dass es um Aufgaben aus verschiedenen Stoffgebieten der Mathematik geht.

Unterschiedlich sind die Inhalte und die Länge der Aufgaben. Soweit dies aus dem Artikel ersichtlich war, entsprechen die israelischen Stoffgebiete im Wesentlichen dem, was in Österreich bis zum Ende der 6. Klasse AHS (10. Schulstufe) unterrichtet wird sowie der einfachen Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der 7. Klasse. In Israel besteht die Prüfung aus 18 eher kurzen Aufgaben[8], während die Matura in Österreich i.A. 4 lange Aufgaben umfasst.

---

[7] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 3.

[8] Was laut HANISCH 1990, Seite 72 nicht sinnvoll erscheint, weil dadurch wesentliche Aspekte des Mathematikunterrichts wie das Kombinieren von Lernzielen und das kreative Problemlösen unberücksichtigt bleiben.

Wichtige Details

Die AutorInnen nennen ihren Ansatz "Constructive Error Analysis" und beschreiben die Grundgedanken wie folgt[9]: "The errors were analyzed in a qualitative manner we called *constructive analysis*. It was conducted in the spirit of finding answers to the following questions: To what question (or questions) is the wrong solution a right answer? What logic can justify what the student in fact did?"

Im Weiteren wird auf interessante Details eingegangen: "Only the student´s performance as exhibited in his or her paper, including sometimes crossed-out, untidy parts, was considered in this process."

Um Spekulationen über Fehlerursachen zu vermeiden, wird ausdrücklich vermerkt: "We did not bother with questions like these: What did he or she not understand? Why did the student not do the right thing? Is the mistake a serious one? How far is it from the right solution?"

In einer Vorerhebung mit 110 Abschlussarbeiten wurden die Fehler erhoben und daraus eine erste Version des Kategoriensystems erstellt, das dann zweimal in relativ aufwendigen Tests auf Reliabilität geprüft und verfeinert wurde (insbesondere in Hinblick auf "the mutual exclusiveness of the categories themselves."): "As a result, the definitions were revised to make them clearer, more precise, and more operational."[10]

Wieder finden sich interessante Details: "For simplicity, only the first error was marked in each incorrect solution." (Bei den langen Aufgaben einer österreichischen Matura wäre eine solche Vorgangsweise nicht sinnvoll.) "The marking included 'correct' solutions that arose from errors that canceled one another. However, errors derived from previous errors were disregarded."[11]

---

[9] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 5. Auch die folgenden Zitate finden sich auf Seite 5.

[10] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 7-8.

[11] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 7.

Dass die gefundenen Fehler(kategorien) von den fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmalen der untersuchten Aufgaben abhängen, zeigt sich auch in dieser Untersuchung. Im zweiten Jahr der Anwendung musste aufgrund einer neuen Aufgabe zu den fünf Kategorien des ersten Jahres eine sechste Kategorie hinzugefügt werden. Auch im Schlusswort der Studie wird explizit vor falschen Schlüssen aus den relativen Fehlerhäufigkeiten gewarnt: "For instance, rather than concluding that students rarely commit logical errors, one might more reasonable speculate that the 36 items in the two examinations gave less opportunity to err this way than, say, to misinterpret the language."[12]

Abschließend sei noch auf eine der im Schlusswort angeführten Anwendungsmöglichkeiten solcher deskriptiven Kategoriensysteme hingewiesen: "...descriptive models of mathematical errors, ..., can help one accumulate a classified inventory of errors, with indices of frequencies per category per item. Grouping items by the typical errors they yield and investigating common features of items in each group may prove indicative of errors expected from similar items, a process that may in turn give rise to a predictive model of errors in high school mathematics."[13]

[12] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 13.

[13] MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 14.

A.4 Fehler und Mathematik(unterricht)

"Der Irrtum ist die Bewegung des Geistes. Diese Bewegung verhindern heißt, die Denkbewegung verhindern - und damit die Möglichkeit versperren, daß sich ein mathematisches Denkvermögen aufbauen kann."[1]

"Fehler" versus "Irrtum"

Das hervorragende Buch von Stella BARUK trägt (in der Übersetzung aus dem Französischen) den Untertitel "Über den Irrtum in der Mathematik".[2] Im gesamten Buch wird das Wort "Irrtum" gebraucht, einem Wort, das für deutschsprachige MathematiklehrerInnen wohl sehr ungewohnt klingt, wenn es um die Beschreibung der "Fehler" von SchülerInnen geht. Im Englischen heißt die Fehleranalyse "error analysis" und nicht "mistake analysis".

"Irren ist menschlich"[3], Irrtümer dürfen sein. Das Wort "Fehler" im Zusammenhang mit Mathematik ruft bei vielen (ehemaligen) SchülerInnen andere Assoziationen als "ist menschlich" hervor: Bestrafung durch schlechte Noten[4], Angst, Hemmung, etc.[5] Sollte das nicht zu denken geben?

---

[1] BARUK 1989, Seite 91; solcherart "verkrüppelte" SchülerInnen nennt BARUK (auf Seite 17-18) "Automathen " – eine gelungene Sprachschöpfung.

[2] BARUK 1989, im Original: "De l´erreur en mathématiques".

[3] Dazu vermerkt BARUK 198 auf Seite 56-57 kritisch: Der Irrtum ist das Ergebnis der *normalen* Verstandestätigkeit, er entstammt einer für die Mathematik spezifischen Verbindung zwischen dem Denken und dem *Begehren, dass es so sein soll*; und er ist alles andere als demütigend oder entehrend. Der Irrtum bezeugt - noch bevor die Frage der Gültigkeit aufgeworfen wird -, daß der psychische Mechanismus zur Produktion des Falschen dem psychischen Mechanismus zur Produktion des Wahren ganz ähnlich ist; daß dieser Mechanismus von der Beschaffenheit des mathematischen Stoffs abhängt und durch ihn überhaupt erst möglich wird.

Es gilt daher, den Trost zurückzuweisen, der vom 'Irren ist menschlich' ausgeht. Auch wenn es paradox erscheint: Mit diesem Trost will man lediglich vermeiden, der Wahrheit des Irrtums ins Auge zu sehen."

[4] HANISCH 1990 (Seite 178-179) beschreibt bei der Gegenüberstellung zweier Bewertungs-modelle für Schularbeiten die Geisteshaltung "Man sucht ständig Fehler": Bei der Methode "Von oben herunter" geht man von einer Maximalpunktezahl aus und zieht für jeden Fehler Punkte ab.

[5] Die Erfahrungen des Verfassers in der Erwachsenenbildung zeigen dies deutlich.

Fehler haben zwei Gesichter

- ein positives, in dem es das Wahre zu entdecken gibt, in dem das Lernen passiert und in dem das Verständnis wurzelt; und ein negatives, das drohend auf Schularbeiten blickt, das oft am Wesentlichen vorbeischaut und in dem die Angst keimt.

Die Tragik des Mathematikunterrichts besteht darin, gerade das Positive an Fehlern zu verdrängen oder zu ignorieren und sie als Ganzes zu verdammen: "Leider spielt im Mathematikunterricht der Fehler zu sehr die Rolle eines Kriteriums für die Leistungsfeststellung, verbunden mit einer negativen, defizitbezogenen Einschätzung (vgl. MAIER, 1982). Es käme darauf an, neben den oben angesprochenen Möglichkeiten, dem Fehler eine andere didaktische Sinngebung zukommen zu lassen. Fehler sind unverzichtbare Bestandteile des Lernprozesses. LÖRCHER (1984) weist darauf hin, daß durch das Anstreben des unerreichbaren Ziels der Fehlervermeidung häufig vergessen wird, den Schülern im Mathematikunterricht auf das Erkennen, Finden und Überwinden von Fehlern vorzubereiten."[6]

Wenn ein Kind (und auch viele Erwachsene tun das, sei es als Lernende im 2. Bildungsweg oder einfach im Alltag) lieber in Starre verharrt als sich der Gefahr einer fehlerhaften Äußerung auszusetzen, dann ist das vor allem aus der persönlichen Geschichte und dem gesellschaftlichen Umfeld[7] zu erklären - aber bei vielen hat der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu diesem Angstverhalten gesetzt.

Und wer weiß, ob nicht gerade ein Mathematikunterricht, in dem jahrelang gelernt wird, subjektiv Sinnloses und Absurdes als Inbegriff der Logik, "die man halt nicht versteht", zu akzeptieren, zu den Wegbereitern einer kritiklosen Gläubigkeit an esoterische Heilslehren zählt.

[6] RADATZ 1985, Seite 19 (wer hier einen Fehler gefunden hat: er steht im Originalzitat).

[7] Mit einer kurzen persönlichen Bemerkung beschrieben: Mein Bruder ist vor 10 Jahren in die USA ausgewandert. Als er nach Jahren wieder in Österreich zu Besuch war, sagte er spontan: "Was ich hier nicht aushalte, ist, dass dauernd auf deinen Fehlern herumgeritten wird. Drüben ist das ganz anders, da heißt es einfach: 'It´s okay - try it again!'."

Diese Kapitel soll daher einen kleinen Beitrag leisten, dem Mathematikunterricht mehr Sinn und mehr Menschlichkeit zu geben. In einem Werk über Fehler darf ihre positive Seite nicht ausgespart werden, solange sie ein derartiges Schattendasein fristen muss.

Die positive Seite der Fehler

"Schülerfehler sind die 'Bilder' individueller Schwierigkeiten und fehlerhafter Lösungsstrategien; sie zeigen, daß der Schüler bestimmte mathematische Begriffe, Definitionen, Techniken, u.a. nicht wissenschaftlich oder erwachsenengemäß verstanden hat."[8] Wobei man sich nicht nur auf die SchülerInnen konzentrieren darf: "Fehler sind nicht allein dem Schüler zuzuschreiben, sie sind auch ein Hinweis auf Probleme der didaktisch-methodischen Aufbereitung des Lehrstoffes."[9]

RADATZ hat sich ausführlich mit der positiven Seite der Fehler beschäftigt, er beschreibt ihre Bedeutung für die Unterrichtspraxis so: "Man kann Schülerfehler einerseits als notwendige Zwischenstadien in einem Lernprozeß ansehen (...; bei der Diagnose und Überwindung kommt dem Schüler eine aktive Rolle zu - vgl. LÖRCHER, 1979), zum anderen bietet die Fehleranalyse dem Mathematiklehrer hilfreiche Möglichkeiten, Lern- und Lehrschwierigkeiten zu erkennen und Hinweise auf Hilfs- bzw. Differenzierungsmaßnahmen zu gewinnen. Gerade dieser letzte Aspekt scheint im Mathematikunterricht der Sekundarstufe noch zu selten realisiert. Ungezielte Übungen oder Wiederholungen können für Schüler mit einem fehlerhaften Begriffsverständnis oder fehlerhaften Lösungstechniken bestenfalls sinnlos sein."[10] Dies deshalb, weil die Gefahr besteht, dass die Fehlertechniken eingeübt und verfestigt werden.[11]

---

[8] RADATZ 1985, Seite 18.

[9] SOMMER 1985, Seite 38.

[10] RADATZ 1985, Seite 18 (im Original ohne Hervorhebungen).

[11] Vergleiche MÜLLER 1998, Seite 53.

Zur aktiven Rolle der SchülerIn bei der Diagnose und Überwindung ihrer Fehler ist noch einiges anzumerken, um das Missverständnis zu verhindern, dass es sich dabei bloß darum handeln soll, dass die SchülerIn Übungsaufgaben rechnet:[12]

"Irrtümer sind Antworten, aber sie sind auch Fragen"[13] - eine wichtige Aufgabe der MathematiklehrerIn ist es, den SchülerInnen zu helfen, sich dieser Fragen bewusst zu werden, ihnen beim Formulieren dieser Fragen zu helfen und gemeinsam an ihre Beantwortung zu arbeiten. Wenn dies nicht passiert, dann entsteht "dieses Gefühl, niemals eine Erklärung *gehört* zu haben, auch wenn sie schon Dutzende Male gegeben worden ist."[14]

"Verstanden werden wollen heißt sich in jedem Moment fragen, was verstanden worden ist - in beiderlei Sinn des Wortes."[15] Dass die LehrerIn die SchülerIn fragt, das ist wesentlich beim Erklären! Aber nicht um bohrendes Fragen geht es, sondern darum, herauszufinden, was die SchülerIn einerseits gehört[16] und was sie andererseits begriffen hat, d.h., wie das zu Lernende in ihrer subjektiven Vorstellungswelt verankert und beschaffen ist - "das Wichtige daran ist, daß der Verstand immer nur von dem ausgeht, was ihm zur Verfügung steht".[17]

Erst wenn auf diese Weise tragfähige Fundamente im Gedächtnis der SchülerIn gefunden sind, kann darauf weiteres Wissen (verständiges Umgehen mit Richtigem) aufgebaut werden. Solche Erklärungen kommen an und vermitteln allen Beteiligten ein befreiendes, angenehmes Gefühl.

Im Übrigen sei darauf verwiesen, dass das Erforschen der Denkvorgänge nicht nur bei Falschem, sondern auch bei Richtigem sehr sinnvoll wäre - "Ein Lehrer kann ... durchaus ein richtiges Ergebnis der Hausübung erhalten ohne zu ahnen, daß sein Schüler die Aufgabe ohne Verständnis nach brav gelernten Regeln löst"

---

[12] Siehe auch Seite 44-43.

[13] BARUK 1989, Seite 90 (im Original ohne Hervorhebungen).

[14] BARUK 1989, Seite 97.

[15] BARUK 1989, Seite 151.

[16] In BARUK 1989 folgt ein Exkurs über "die 3 Sprachen": Die eigene Sprache, die Schulsprache und die Sprache der Wissenschaft (Seite 151-199, vergleiche auch 123-150).

[17] BARUK 1989, Seite 156; sie setzt fort: " - aber das ist eine Binsenweisheit, und es ist schon seltsam, sie überhaupt erwähnen zu müssen." Neuer Sinn braucht Anknüpfungspunkte an vorhandenen Sinn!

(vgl. HASEMANN 1986, Seite 2ff)."[18] - wobei viele LehrerInnen dies wohl ahnen, aber nicht wissen (wollen), wie damit umzugehen ist.

Die negative Seite der Fehler

Klarerweise ist das Ziel des Mathematikunterrichts, dass Aufgaben richtig gelöst werden. Daher werden Fehler in einer Leistungsfeststellung nicht als positiv empfunden. Man kann ihnen aber viel von ihrer negativen Bedeutung nehmen, wenn man eine Schularbeit nicht zum endgültigen Urteil stilisiert, sondern die dabei aufgetretenen Fehler als (wenn auch späte) Chance betrachtet, wenigstens jetzt noch die wichtigsten Hintergründe und Ursachen zu erhellen.

Außerdem "... sollte man sich ... nicht der Illusion hingeben, mit Hilfe irgendwelcher Methoden auch nur die häufigsten Schülerfehler vermeiden zu können."[19]

Auf einen wesentlichen Aspekt im Bemühen um eine Milderung negativer Fehlerfolgen weist RADATZ hin: "Neben den ... Einstellungen der Lehrer gegenüber Fehlern bildet das Wissen über die Einstellungen der Schüler verschiedener Altersstufen gegenüber den eigenen Fehlleistungen eine notwendige Voraussetzung für pädagogische Innovationen im Mathematikunterricht."[20]

---

[18] PESCH 1996, Seite 10.

[19] RADATZ 1980b, Seite 226.

[20] RADATZ 1980b, Seite 225; ähnlich MÜLLER 1998, Seite 53.

B UNTERSUCHUNGSPLAN

Es geht um eine deskriptive Fehleranalyse, d.h. um eine Beschreibung der gefundenen Fehler, nicht jedoch um die Ursachen dieser Fehler. Wie in den Kapiteln A.1.1 und A.2.2.5 dargelegt ist, würde eine Ursachenklärung zusätzliche Interviews erfordern, was zu den vorliegenden Maturaarbeiten nicht möglich war (und Jahre danach auch nicht sinnvoll wäre). Besonderer Wert wurde darauf gelegt, dass mit der Beschreibung der Fehler nicht schon bestimmte Denkvorgänge der SchülerInnen oder bestimmte Fehlerursachen suggeriert werden (wie z.B. mit "Flüchtigkeitsfehler").

Die Untersuchung ist explorativ, weil es noch keine vergleichbaren Arbeiten gibt und weil sich aus der Thematik von vornherein keine zu prüfenden Hypothesen abzeichneten.

Übersicht über den Ablauf

1) Auswählen der Maturaarbeiten; Beschreiben der Aufgaben.

2) Anhand einer Vorerhebung:

a) Ausarbeiten einer Fehlerkategorisierung mit einer möglichst präzisen und operationalen Beschreibung der Kategorien, um möglichst viele Fehler eindeutig einer Kategorie zuordnen zu können, und eine exemplarische Auflistung typischer, aber auch schwer einzuordnender Fehler.

b) Festlegen, welche Fehler untersucht werden sollen und welche nicht: Eingrenzen des Fehlerbegriffs; Auswahl bestimmter Aufgaben und Fehlerkategorien.

Damit waren die Vorarbeiten abgeschlossen. Der Untersuchungsgegenstand war genau definiert und sein Umfeld beschrieben. Es folgte:

3) Durchsehen der Maturaarbeiten nach Fehlern innerhalb des in 2) festgelegten Rahmens.

4) Darstellen und Auswerten der Ergebnisse.

B.1 Auswahl der Maturaarbeiten

Als Erstes waren geeignete Maturaarbeiten für die Untersuchung auszuwählen. Angesichts der zahlreichen Schultypen, die man in Österreich mit einer Matura abschließen kann, wurde entschieden, die Untersuchung auf den Bereich der AHS (Allgemeinbildende Höhere Schule) zu beschränken. Als "klassische" Matura gilt (trotz sinkender Anteile) immer noch die Matura an einem Gymnasium oder Realgymnasium, den bekanntesten Schultypen im AHS-Bereich.

Die Unterschiede im Fach Mathematik zwischen den verschiedenen AHS-Typen sind trotz deutlich verschiedener Lehrpläne und Stundenzahlen i.A. nicht aus diesen gesetzlichen Vorgaben ableitbar. Vielmehr kommt es auf die konkrete Schule und auf die jeweilige LehrerIn an.[1]

Aus organisatorischen Gründen sollte die Anzahl der beteiligten Schulen gering gehalten werden; aufgrund der oben angesprochenen Bedeutung der Unterschiede von Schule zu Schule war darauf zu achten, dass die ausgewählten Maturaaufgaben möglichst repräsentativ für eine AHS in Österreich sind. Dieses Problem operational zu lösen, hätte den Rahmen dieser Arbeit gesprengt. Es wurde daher nur in einem groben Vergleich der Aufgabenstellungen überprüft, ob diese "im Rahmen des Üblichen" liegen. Verglichen wurde mit den Angaben der Externistenmatura in Wien der Jahre 1993 bis 1998[2] sowie mit entsprechenden Aufgabensammlungen[3].

Ziel der Untersuchung ist es, einen Überblick über die Fehler in Maturaarbeiten zu bekommen. Eine spezielle Auswahl, wie z.B. nach der Note einer SchülerIn, erschien daher nicht sinnvoll.

---

[1] Aus den umfangreichen Erfahrungen (des Verfassers) im 2. Bildungsweg und bei der Lernhilfe in Kleingruppen oder mit einzelnen SchülerInnen sowie aus Gesprächen mit LehrerInnen, Eltern und SchülerInnen muss man zu diesem Schluss kommen. Wer aus den Inhalten der Mathematik-Schulübungshefte einer SchülerIn ihren Schultyp (im Rahmen der AHS) erraten möchte, darf sich keine allzu hohe "Trefferquote" erwarten.

[2] Die Angaben standen dem Verfasser aufgrund seiner beruflichen Tätigkeit zur Verfügung. Sie stammen aus den sechs Wiener AHSn, die mit der Prüfungstätigkeit zur Externistenmatura betraut sind.

[3] FIALA/MOSER 1989, KOTH 1993 und MASCHKA 1993.

Mit dem Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium (BG + BRG) Rahlgasse im 6. Wiener Gemeindebezirk wurde eine Schule gefunden, die (bezüglich der Mathematikmatura) in keiner besonderen Weise aus den AHSn in Wien heraussticht, in deren Archiv genügend Maturaarbeiten aufbewahrt werden und deren Direktorin den Zugang zu diesen Arbeiten ermöglichte. Für die Untersuchung wurden alle Maturaarbeiten dieser Schule der Jahrgänge 1991 bis 1998 herangezogen.

Die Angaben dieser Maturaarbeiten sind im Anhang nachzulesen.

In den Jahren 1991 bis 1998 sind in dieser Schule 349 SchülerInnen zur schriftlichen Matura (auch Klausur genannt) angetreten[4]. Ein Schüler hat gleich nach Durchlesen der Angabe und ohne etwas zu schreiben seine Arbeit abgegeben. Diese Arbeit wurde nicht berücksichtigt. Einige Arbeiten waren nicht mehr vorhanden[5] und konnten daher nicht untersucht werden.

Insgesamt standen somit 338 Arbeiten aus 19 Klassen zur Verfügung, sie wurden von fünf Lehrerinnen und einem Lehrer (seine Klasse steht in der letzten Zeile der Tabelle B1 - siehe nächste Seite) betreut. In allen Arbeiten wurden vier Aufgaben gestellt, mit einer Ausnahme waren auch alle vier zu bearbeiten.

Diese Ausnahme ist die Klasse 8C aus 1991/92 , hier konnten die SchülerInnen eine Aufgabe streichen, die restlichen drei waren zu bearbeiten. Die Matura dieser Klasse bietet auch in anderer Hinsicht Ausnahmen: sie war die einzige, die von einem Lehrer betreut wurde, die Formulierung der Angaben ist deutlich anders als bei den übrigen Maturaarbeiten und es war die einzige Klasse, in der eine Aufgabe als Kurzaufsatz zu einem mathematischen Stoffgebiet und nicht als Rechenaufgabe gestellt war.

[4] Es wurden nur die Arbeiten des jeweiligen Haupttermins herangezogen, ein eventuelles zweites Antreten einer SchülerIn zur Wiederholung der schriftlichen Mathematikmatura wurde nicht berücksichtigt.

[5] Die gesetzliche Aufbewahrungsfrist endet nach 3 Jahren. Danach können die Arbeiten den SchülerInnen auf deren Verlangen ausgefolgt werden. Dies kommt aber eher selten vor. Meist werden die Arbeiten nach Maßgabe des vorhandenen Platzes im Archiv noch einige Jahre aufbewahrt und dann vernichtet.

In der Folge ist unter "Anzahl der SchülerInnen" immer die Anzahl der SchülerInnen zu verstehen, deren Arbeiten vorhanden waren und untersucht wurden.

Tabelle B1

Verteilung der SchülerInnen nach LehrerInnen und Klassen.

LehrerIn	Anzahl der Klassen	Anzahl der SchülerInnen
B.	6	110
F.	5	88
P.	3	60
M.	3	44
L.	1	21
W.	1	15
Summen:	19	338

Zu erwähnen bleibt noch die Tatsache, dass die MaturantInnen ab dem Jahr 1993 nach dem neuen Lehrplan (für die 5. bis 12. Schulstufe der AHS) unterrichtet worden waren. Da ein neuer Lehrplan die Unterrichtspraxis aber nur sehr langsam (und keineswegs schlagartig mit seiner Einführung) verändert[6], wurde dieser Aspekt nicht weiter berücksichtigt.

[6] An einigen LehrerInnen gehen solche Veränderungen überhaupt spurlos vorüber, manche pervertieren die Idee des Neuen (z.B. wenn Sie das Auswendiglernen von Beweisen fordern - und das zusätzlich zum bisher schon verlangten Prüfungsstoff.)

B.2 Die untersuchten Aufgaben

Durch Angeben der Stoffgebiete, denen die Aufgabeninhalte zuzuordnen sind, lassen sich die Aufgaben für einen ersten Überblick gut beschreiben und zu Aufgabentypen zusammenfassen:

Tabelle B2 (Legende siehe nächste Seite)

Die Maturaarbeiten und ihre Aufgaben im Überblick.

Klasse	Typ	Lehr.	Schü.	1)	2)	3)	4)
8A/98	RG	P.	16	exp	EX-W	T	K-IV
8B/98	Gym	B.	24	EX	V2	K-IV	exp
8A/97	RG	F.	30	exp	KDU-IF	F	K-V2
8B/97	Gym	P.	27	EX	T	K-IV	W
8A/96	RG	B.	17	KDln-IF	W	V3	EX
8B/96	Gym	F.	21	V2	T	EX	KDU-IF
8A/95	RG	B.	8	KDe^x-IF	T	W	V3
8B/95	Gym	F.	7	EX	KDU-IF	V2	T
8C/95	Gym	M.	17	KDe^x-IF	C	V3	W
8A/94	RG	M.	14	KDe^x-IF	V3	GF	LO
8B/94	Gym	B.	25	K-IV	V2	EX	W
8A/93	RG	L.	21	KDU-IF	F	T	W
8B/93	Gym	F.	16	T	KDU-IF	V2	s
8C/93	Gym	P.	17	EX	V2	W	K-IV
8A/92	RG	B.	17	KDln-IF	T	W	LO
8B/92	Gym	F.	14	T	KDln-IF	EX	K-IV
8C/92	Gym	W.	15	s	ka	C	KDU-IF
8A/91	RG	B.	19	KDe^x-IF	T	K-V2	W
8B/91	Gym	M.	13	KDe^x-IF	T	K-IV	W

Legende zu Tabelle B2:

1. Spalte - Klassenbezeichnung, dabei wird nur das Maturajahr angeführt, d.h. die Klasse 8A des Jahrgangs 1997/98 wird kurz als 8A/98 bezeichnet.

2. Spalte - Schultyp: RG steht für Realgymnasium, Gym für Gymnasium.

3. Spalte - LehrerIn.

4. Spalte - Anzahl der SchülerInnen

5. bis 8. Spalte - Stoffgebiete, denen die Aufgabeninhalte zuzuordnen sind. Die verwendeten Abkürzungen bedeuten (in alphabetischer Reihenfolge):

C Komplexe Zahlen

EX Extremwertaufgabe

exp Textaufgabe zu einer Exponentialfunktion

F Folge in Termdarstellung

GF Geometrische Folge

IF Flächenberechnung mit Integral

IV Volumsberechnung mit Integral

K Kegelschnitte

ka Kurzaufsatz

KD Kurvendiskussion, der Funktionstyp ist durch e^x und ln näher beschrieben

KDU Umkehraufgabe zur Kurvendiskussion (von Polynomfunktionen)

LO Lineare Optimierung

s Sonstige (Aufgaben, die nicht klar zugeordnet werden können.)

T Trigonometrie

V Vektorrechnung (V2 in der Ebene, V3 im Raum)

W Wahrscheinlichkeitsrechnung

Tabelle B3

Häufigkeit der Aufgabentypen

Aufgabentyp	Anzahl der SchülerInnen	Anzahl der Klassen
1) Häufig vorkommende Typen:		
T	179	11
W	181	10
V	166	10
EX	152	8
KD-IF	119	8
K-IV	136	7
KDU-IF	110	6
2) Seltener vorkommende Typen:		
exp	70	3
F	51	2
K-V2	49	2
C	32	2
LO	31	2
EX/W	16	1
ka	15	1
GF	14	1
s	31	2

Aus den Tabellen B2 und B3 kann man erkennen, dass sich die untersuchten Maturaarbeiten im Wesentlichen aus sieben Aufgabentypen zusammensetzen:

I) Anwendungen der Integralrechnung [als 2. Aufgabenteil in drei verschiedenen Aufgabentypen: KD-IF, KDU-IF und K-IV].[1]

Unter den untersuchten Arbeiten gibt es keine einzige Matura ohne Integralrechnung, in rund zwei Drittel der Aufgaben dieses Typs handelt es sich um eine (Umkehraufgabe zu einer) Kurvendiskussion mit anschließender Flächenberechnung, im verbleibenden Drittel geht es um Kegelschnitte mit anschließender Volumsberechnung. Zwei Maturaarbeiten enthielten sowohl einen IF- als auch einen IV-Teil.

Damit sind diese Anwendungen der Integralrechnung das mit Abstand häufigste Stoffgebiet in den untersuchten Maturaarbeiten.

Die Zusammensetzung der entsprechenden Aufgaben ist - noch dazu in Hinblick auf die große Häufigkeit dieses Umstands - besonders problematisch, weil der Integralteil von einer SchülerIn meist nur dann in Angriff genommen werden kann, wenn sie den ersten Aufgabenteil (zumindest halbwegs) richtig gelöst hat. Schon bei der Vorerhebung war deutlich festzustellen, dass viele SchülerInnen aus diesem Grund den Integralteil gar nicht, nur teilweise oder nur mit schwierigeren Anfangsbedingungen lösen konnten.[2]

Es ist nicht einzusehen, dass gerade das Überprüfen wichtiger Fähigkeiten[3] (und Fertigkeiten) durch das Voranstellen unnötiger Barrieren verhindert wird.[4]

---

[1] Erläuterung der Abkürzungen zwei Seiten weiter oben in der Legende zu Tabelle B2.

[2] Bei mehreren SchülerInnen fanden sich Sätze wie: "Ich kann den Fehler nicht finden, für die Flächenberechnung mittels Integral nehme ich folgende Funktion an: ..." Dieser doch beachtenswerte Umgang mit der Verzweiflung zu wissen, wie es geht, aber ohne geeigneten Ausgangspunkt dieses Wissen nicht anwenden zu können, hat ihnen aber nichts genützt (d.h. Punkte gebracht), egal wie ausführlich ihre Ausführungen auch waren.

[3] Wenn in jeder Matura Integralrechnung geprüft wird, muss sie wohl als wichtig angesehen werden.

[4] Bei den betreffenden Aufgabentypen handelt es sich offenbar um eine unselige Tradition, die auch mit den besten didaktischen Hinweisen aus der wissenschaftlichen Forschung nicht auszurotten ist - vergleiche z.B. HANISCH 1990, Seite 72.

II) Ungefähr in jeder zweiten Maturaarbeit waren folgende vier Aufgabentypen zu finden: Trigonometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vektorrechnung und (etwas weniger häufig) Extremwertaufgaben.

Die in I) und II) angeführten sieben Aufgabentypen machen rund 80% aller Aufgaben aus (60 von 76). Die anderen Aufgabentypen sind deutlich seltener zu finden.

B.2.1 Auswahl der Aufgaben

Die 338 Maturaarbeiten stammen aus 19 Klassen. Bei 4 Aufgaben pro Maturaarbeit ergeben sich (19 · 4 =) 76 verschiedene Aufgaben und (338 · 4 =) 1352 einzelne Aufgabenbearbeitungen[5]. Es war nicht möglich, das gesamte Material zu untersuchen. Daher war eine sinnvolle Auswahl zu treffen.

Im Folgenden werden zuerst klare Begriffe und eine Kurzbezeichnung der Aufgaben eingeführt, dann wird die vorgenommene Auswahl der Aufgaben beschrieben.

Die verwendeten Begriffe

Es ist notwendig, zwischen den Begriffen Aufgabentyp, Aufgabe und Aufgabenbearbeitung klar zu unterscheiden.

Aufgabe und Aufgabentyp

Im schulüblichen Sprachgebrauch entspricht eine Aufgabe einem "Maturabeispiel", hier wird unter Aufgabe die Angabe eines solchen "Maturabeispiels" verstanden, wie sie den SchülerInnen vorgelegt wird (und im

---

[5] Da bei der Matura der Klasse 8C des Jahrgangs 1991/92 (mit 15 SchülerInnen) nur drei der vier gestellten Aufgaben zu bearbeiten waren, sind es nur 1337 Aufgabenbearbeitungen.

In manchen Maturaarbeiten haben die SchülerInnen einzelne Aufgaben gar nicht bearbeitet oder die Aufgabenbearbeitung nach wenigen Zeilen (aus meist nicht nachvollziehbaren Gründen) abgebrochen. Die genaue Zahl solcher Aufgaben-"Bearbeitungen" wurde nicht ermittelt, da nur die in den Tabellen B4 bis B12 (auf den folgenden Seiten) genannten Aufgabenbearbeitungen durchgesehen wurden. Die Gesamtzahl "substantieller" Aufgabenbearbeitungen kann daher nur geschätzt werden und dürfte zwischen 1250 und 1300 liegen.

Anhang nachzulesen ist). Die Zusammenfassung verschiedener Aufgaben zu Aufgabentypen ist oben (am Beginn des Abschnitts B.2) beschrieben. Die Anzahl der Aufgaben eines Aufgabentyps ergibt sich aus der Anzahl der Klassen, in denen eine Aufgabe dieses Typs gestellt wurde (- es kam nicht vor, dass in einer Klasse zwei Aufgaben desselben Typs gestellt wurden).

Aufgabenbearbeitung

Mit dieser Kurzbezeichnung ist alles, was eine SchülerIn bei der Bearbeitung einer Aufgabe geschrieben hat, gemeint. Die Anzahl der Aufgabenbearbeitungen eines Aufgabentyps ergibt sich aus der Anzahl der SchülerInnen, denen eine Aufgabe dieses Typs gestellt wurde.[6]

Kurzbezeichnung der Aufgaben (und Aufgabenbearbeitungen)

Um eine möglichst Platz sparende, aber klare Aufgabenbezeichnung zu erreichen, wurde jede Aufgabe mit einem dreistelligen Code (z.B. 7A4) eindeutig beschrieben:

An 1. Stelle steht eine Ziffer zwischen 1 und 8 für das Jahr, aus dem die Maturaarbeit stammt; z.B. steht 7 für das Jahr 1997, dem Maturajahr des Jahrgangs 1996/97.

An 2. Stelle steht der Buchstabe A, B oder C für die Klassenbezeichnung.

Mit den beiden ersten Stellen ist jede Klasse eindeutig beschrieben, z.B. steht 7A für die Klasse 8A des Jahrgangs 1996/97 mit der Matura im Jahr 1997. Daraus kann man mit Hilfe der Tabelle B2 auf die LehrerIn und auf die Anzahl der SchülerInnen dieser Klasse rückschließen. Der Schultyp ist dem Buchstaben zugeordnet: A steht immer für Realgymnasium, B und C für Gymnasium[7].

[6] Mit folgender Ausnahme: Bei der Matura der Klasse 8C des Jahrgangs 1991/92 waren nur drei der vier gestellten Aufgaben zu bearbeiten, hier muss die Anzahl der jeweiligen Aufgabenbearbeitungen durch Zählen ermittelt werden.

[7] Die Klassenbezeichnung C gab es nicht bei allen Jahrgängen.

An 3. Stelle steht eine Ziffer zwischen 1 und 4 für die Aufgabennummer in der Originalangabe (siehe Anhang).

Beispiel: Die Aufgabe 6A3 war in der Maturaarbeit des Jahres 1996 der Klasse 8A (des Jahrgangs 1995/96) die 3. Aufgabe.

Zur Kennzeichnung der einzelnen Aufgabenbearbeitungen wurde an den dreistelligen Aufgabencode noch eine zweistellige Zahl, die einer bestimmten SchülerIn einer Klasse zugeordnet wurde, angehängt.

Beispiel: 6A307 ist die Bezeichnung der Aufgabenbearbeitung der SchülerIn mit der Nummer 07 zur Aufgabe 6A3 aus obigem Beispiel.

Die ausgewählten Aufgaben

Als erstes Auswahlkriterium wurde die Häufigkeit der Aufgaben eines Aufgabentyps herangezogen. Wie in Tabelle B3 dargestellt, gibt es häufigere und seltenere Aufgabentypen. Die selten vorkommenden wurden nicht weiter untersucht.

In einer Vorerhebung wurden in Aufgaben der Typen T, W, V, EX, KD-IF, K-IV und KDU-IF (das sind die häufiger vorkommenden Typen) die SchülerInnenfehler untersucht. Sehr bald zeigte sich, dass bei einigen Aufgabentypen nur eine geringe Ausbeute zu erwarten war. Die Aufgabentypen mit niedrigerer Fehlerzahl wurden in geringerem Ausmaß in die weitere Arbeit einbezogen als die anderen Typen.

Die folgende Tabellen zeigen, welche Aufgaben auf SchülerInnenfehler untersucht wurden.

Tabelle B4 Aufgaben zur Trigonometrie (**Typ T**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
8 A 3	P.	16	
7 B 2	P.	27	27
6 B 2	F.	21	21
5 A 2	B.	8	
5 B 4	F.	7	
3 A 3	L.	21	21
3 B 1	F.	16	16
2 A 2	B.	17	17
2 B 1	F.	14	
1 A 2	B.	19	
1 B 2	M.	13	13
Insgesamt:		179	**115**

Tabelle B5 Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (**Typ W**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
7 B 4	P.	27	27
6 A 2	B.	17	17
5 A 3	B.	8	
5 C 4	M.	17	
4 B 4	B.	25	25
3 A 4	L.	21	
3 C 3	P.	17	
2 A 3	B.	17	
1 A 4	B.	19	19
1 B 4	M.	13	13
Insgesamt:		181	**101**

Tabelle B6 Aufgaben zur Vektorrechnung (**Typ V**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
V2 (Vektorrechnung in der Ebene)			
8 B 2	B.	24	24
6 B 1	F.	21	21
5 B 3	F.	7	
4 B 2	B.	25	
3 B 3	F.	16	
3 C 2	P.	17	17
	Summe V2:	110	62
V3 (Vektorrechnung im Raum)			
6 A 3	B.	17	
5 A 4	B.	8	8
5 C 3	M.	17	17
4 A 2	M.	14	
	Summe V3:	56	25
	Insgesamt:	166	**87**

Tabelle B7 Extremwertaufgaben (**Typ EX**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
8 B 1	B.	24	24
7 B 1	P.	27	27
6 A 4	B.	17	17
6 B 3	F.	21	
5 B 1	F.	7	
4 B 3	B.	25	25
3 C 1	P.	17	17
2 B 3	F.	14	
	Insgesamt:	152	**110**

Tabelle B8 Aufgaben zur Kurvendiskussion (e^x oder ln) und zum Flächenintegral (**Typ KD-IF**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
e^x (Diskussion einer Exponentialfunktion)			
5 A 1	B.	8	8
5 C 1	M.	17	
4 A 1	M.	14	14
1 A 1	B.	19	19
1 B 1	M.	13	
	Summe e^x:	71	41
ln (Diskussion einer Logarithmusfunktion)			
6 A 1	B.	17	17
2 A 1	B.	17	
2 B 2	F.	14	
	Summe ln:	48	17
	Insgesamt:	119	**58**

Tabelle B9 Untersuchte Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion von Polynomfunktionen und zum Flächenintegral (**Typ KDU-IF**)

Aufgabe	LehrerIn	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
7 A 2	F.	30	30
6 B 4	F.	21	21
5 B 2	F.	7	7
3 A 1	L.	21	21
3 B 2	F.	16	16
2 C 4	W.	15	
	Insgesamt:	110	**95**

Tabelle B10 Untersuchte Kegelschnittaufgaben mit Volumsintegral (**Typ K-IV**)

Aufgabe	Lehrerin	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht
8 A 4	P.	16	16
8 B 3	B.	24	24
7 B 3	P.	27	
4 B 1	B.	25	
3 C 4	P.	17	17
2 B 4	F.	14	14
1 B 3	M.	13	
	Insgesamt:	136	**71**

In den Tabellen B11 und B12 sind alle untersuchten Aufgaben aus zwei verschiedenen Blickwinkeln dargestellt.

Tabelle B11

Anzahl der untersuchten Aufgabenbearbeitungen und Aufgaben im Überblick

Aufgabentyp	Anzahl der SchülerInnen	davon untersucht	Anzahl der Klassen	davon untersucht
T	179	115	11	6
W	181	101	10	5
V	166	87	10	5
EX	152	110	8	5
KD-IF	119	58	8	4
K-IV	136	71	7	4
KDU-IF	110	95	6	5
Summe:	1043	**637**	60	**34**

Tabelle B12

Die untersuchten Aufgaben im Überblick (Vergleiche Tabelle B2)

Klasse	Typ	Lehr.	Schü.	1)	2)	3)	4)
8A/98	RG	P.	16			T	**K-IV**
8B/98	Gym	B.	24	**EX**	**V2**	**K-IV**	
8A/97	RG	F.	30		**KDU-IF**		
8B/97	Gym	P.	27	**EX**	**T**	K-IV	**W**
8A/96	RG	B.	17	**KDln-IF**	**W**	V3	**EX**
8B/96	Gym	F.	21	**V2**	**T**	EX	**KDU-IF**
8A/95	RG	B.	8	**KDe^{x}-IF**	T	W	**V3**
8B/95	Gym	F.	7	EX	**KDU-IF**	V2	T
8C/95	Gym	M.	17	KDe^{x}-IF		**V3**	W
8A/94	RG	M.	14	**KDe^{x}-IF**	V3		
8B/94	Gym	B.	25	K-IV	V2	**EX**	**W**
8A/93	RG	L.	21	**KDU-IF**		**T**	W
8B/93	Gym	F.	16	**T**	**KDU-IF**	V2	
8C/93	Gym	P.	17	**EX**	**V2**	W	**K-IV**
8A/92	RG	B.	17	KDln-IF	**T**	W	
8B/92	Gym	F.	14	T	KDln-IF	EX	**K-IV**
8C/92	Gym	W.	15				KDU-IF
8A/91	RG	B.	19	**KDe^{x}-IF**	T		**W**
8B/91	Gym	M.	13	KDe^{x}-IF	**T**	K-IV	**W**

Die weniger häufigen Aufgabentypen wurden weggelassen; untersuchte Aufgaben sind fett gedruckt, nicht untersuchte Aufgaben sind in kleinerer Schrift angeführt; ansonsten wie in Tabelle B2.

B.2.2 Beschreibung der Aufgaben

Um die auftretenden Fehlerhäufigkeiten oder den Schwierigkeitsgrad verschiedener Aufgaben vergleichen zu können, wäre eine Aufgabenbeschreibung bis in die Details der fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale notwendig. Dass dies bei der Komplexität von Maturaaufgaben ein äußerst schwieriges Unterfangen darstellt, das im Rahmen dieser Arbeit nicht zu bewältigen ist, wurde im Kapitel A.1.2.4 beschrieben (zur Problematik der Fehlerhäufigkeit siehe auch A.1.2.5).

Ganz allgemein zeigt sich, dass der genutzte "Vorrat" an Maturaaufgaben nicht allzu groß sein dürfte - sowohl was einzelne LehrerInnen als auch die Gesamtheit der LehrerInnen betrifft. So findet man öfter gleichlautende oder nur leicht veränderte Angaben.[8] (Es sei explizit darauf hingewiesen, dass mit dieser Feststellung keinerlei wertende Intentionen verbunden sind.)

---

[8] Dies kann natürlich auch ein Zufall sein, da ja nur eine (bezogen auf ganz Wien bzw. Österreich) sehr kleine Auswahl untersucht wurde. Viele ähnliche Aufgabenstellungen finden sich aber auch in den Maturaangaben zur Externistenmatura und in Aufgabensammlungen (siehe Seite 75). Als Ausnahme von dieser Tendenz sei auf die Angaben der Matura der Klasse 8C des Jahrgangs 1991/92 (siehe Anhang) verwiesen.

Vergleiche HANISCH 1993.

B.3 Auswahl der Fehler

Den SchülerInnen unterlaufen beim Bearbeiten ihrer Maturaaufgaben die unterschiedlichsten Fehler. Alle diese Fehler hier untersuchen zu wollen, ist weder machbar noch sinnvoll. In diesem Abschnitt soll die vorgenommene Auswahl der Fehler beschrieben und begründet werden, dabei wird auf die Abschnitte A.1 und A.2 Bezug genommen.

B.3.1 Vorgegebener Rahmen

Eine weitreichende Einschränkung ergibt sich aus den vorgegebenen Rahmenbedingungen:

I) Es können nur solche Fehler untersucht werden, die allein aus den vorliegenden schriftlichen Arbeiten als Fehler erkennbar sind.

In grob vereinfachter Form kann man das Lösen mathematischer Probleme, wie sie üblicherweise in der Schule gestellt werden, in zwei Teile gliedern:[1]

1) Das Finden eines Lösungsweges

2) Das Realisieren dieses Lösungsweges

Diese beiden Teile folgen meistens nicht linear aufeinander - sie sind ineinander verzahnt, d.h. z.B., dass mit der Realisierung des Lösungsweges begonnen wird, obwohl er noch nicht vollständig geplant oder gefunden wurde, dass im Zuge der Realisierung "Sackgassen" bzw. Fehler im Lösungsweg entdeckt werden, dass es Versuch-Irrtum-Phasen gibt, dass Fehler in schon berechneten Teillösungen gefunden werden, usw.

Nun ist es in Österreich nicht üblich, dass SchülerInnen bei Schularbeiten oder bei der Matura schriftlich festhalten, wie sie eine Aufgabe zu lösen gedenken und warum sie es gerade so machen wollen. Die Lösungskonzepte der SchülerInnen

---

[1] Auf die Komplexität und die Schwierigkeiten von kognitionstheoretischen Modellen zur Erklärung (und Beschreibung) von Problemlösungsvorgängen wird hier nicht näher eingegangen. In TREMSCHNIG 1995 (Seite 117-152) werden fünf Modelle besprochen.

bleiben deren "Geheimnis", sie notieren nur die (mehr oder weniger geglückte) Umsetzung dieser Konzepte. Schriftliche Arbeiten sind daher meist reine "Rechenprotokolle", aus denen die zugrundeliegenden Absichten der SchülerInnen nur mittelbar und oft unter großen Schwierigkeiten oder gar nicht erkennbar sind.

Entsprechend schwierig ist herauszufinden, ob der Lösungsweg einer SchülerIn auf fehlerhaften Konzepten und Vorstellungen aufbaut oder ob bei der Umsetzung eines richtig geplanten Lösungsweges Fehler passiert sind.

Vermutungen über die Art solcher "Denkfehler" oder "Methodenfehler" sind oft naheliegend und wohl auch in vielen Fällen zutreffend. Die Unsicherheit solcher Vermutungen ist ein Grund dafür, dass Fehler dieser Art im Weiteren nicht näher untersucht werden. Der zweite Grund liegt darin, dass Fehler im Lösungsweg meistens dem Stoff der AHS-Oberstufe zuzuordnen sind, die vorliegende Arbeit sich aber vor allem mit Unterstufen-Fehlern befasst.

Ein weiterer (sehr wichtiger) Aspekt des Problemlösens kann allein anhand der schriftlichen Aufgabenbearbeitungen ebenfalls nicht zufriedenstellend analysiert werden: Erkennen die SchülerInnen Unstimmigkeiten und Widersprüche zwischen Ergebnissen oder zwischen Ergebnis und Realität? Und wie gehen sie damit um?[2]

II) Die Beschreibung der Fehler kann sich nur auf das vorliegende schriftliche Material stützen.

Da Denkvorgänge einer SchülerIn aus den schriftlichen Arbeiten nur mit einiger Unsicherheit vermutet werden können, sollten solche Vermutungen nicht Grundlage der Fehlerbeschreibung sein - weder explizit noch implizit. Daher wird eine Unterscheidung in Flüchtigkeitsfehler und typische Fehler nicht vorgenommen (siehe Kapitel A.2.3).

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf Unterstufen-Fehlern. Bei MaturantInnen ist anzunehmen, dass ein Großteil dieser Fehler auf Flüchtigkeit beruht. Was hier festgestellt werden soll, ist die Art und die Häufigkeit dieser Fehler, nicht aber ihre Ursachen (vergleiche A.2.2.5).

B.3.2 Kernbereiche des Unterstufenstoffs

Wesentlicher Ansatzpunkt dieser Arbeit ist die Betrachtung von Fehlern, die dem Lehrstoff der 5. - 8. Schulstufe zuzurechnen sind. Dieser Lehrstoff umfasst ein breites Spektrum unterschiedlicher Fähigkeiten und Fertigkeiten und legt den Grundstein für das Verständnis der SchülerInnen für Mathematik und für ihre Einstellung zur Mathematik. In dieser Breite können die Anteile dieses Lehrstoffs am Wissen und Können der MaturantInnen kaum untersucht und schon gar nicht aus den Fehlern in schriftlichen Maturaaufgaben herausgelesen werden.

Nach einer Vorerhebung wurden daher jene Kernbereiche ausgewählt, deren Beherrschung in vielen Aufgabentypen notwendig ist, und bei denen eine größere Fehlerzahl zu erwarten war. Die Fehler in diesen Bereichen bilden im Wesentlichen den Gegenstand dieser Arbeit, andere Fehler wurden nur am Rande untersucht.

Im Abschnitt C werden die einzelnen Fehlerkategorien im Detail vorgestellt. Dort wird auch auf die genaue Fehlerbeschreibung eingegangen.

B.3.3 Nicht einbezogene Fehler

Für die Auswahl waren nicht nur inhaltliche Aspekte maßgeblich, es musste auch darauf geachtet werden, dass sich der Aufwand für die Fehlersuche in vertretbaren Grenzen hielt. Daher wurden bestimmte Teile der Maturaarbeiten nicht untersucht bzw. bestimmte Fehler nicht in die Untersuchung einbezogen.

B.3.3.1 Von den LehrerInnen nicht Korrigiertes

Die Maturaarbeiten sind ja bereits von den betreuenden LehrerInnen korrigiert worden. Diese Vorarbeit erwies sich als äußerst notwendig, weil die schriftliche Form der Aufgabenbearbeitungen bei vielen SchülerInnen (oftmals in mehrfacher Hinsicht) sehr zu wünschen übrig ließ:

[2] Vergleiche PESCH 1996, Seite 8.

Manche Aufgabenbearbeitungen ziehen sich über mehr als zehn Seiten (die von den SchülerInnen häufig nicht entsprechend nummeriert wurden!) und enthalten manchmal Fragmente anderer Aufgaben. Auf einer früher gerechneten Seite werden oft später noch Rechnungen dazugeschrieben oder "dazwischengeflickt". Mehrmaliges Abbrechen und Neubeginnen (nicht geordnet, sondern im Durcheinander) kann das Nachvollziehen der Aufgabenbearbeitung in detektivische Kleinarbeit ausarten lassen. Und bei manchem Schriftbild muss man die LehrerIn bewundern, dass sie es entziffern konnte.[3]

Im Zusammenhang mit den Korrekturen der LehrerInnen ergaben sich drei Problemfelder:

1) Prinzipiell nicht korrigierte SchülerInnenfehler

Auf das Einbeziehen solcher Fehler musste verzichtet werden, weil der Aufwand dafür zu groß gewesen wäre.

So wurden z. B. Rundungsfehler von mehreren LehrerInnen nicht korrigiert. Man kann über die Bedeutung dieser Fehler geteilter Meinung sein, ihre Häufigkeit ist jedenfalls groß.[4] Viele SchülerInnen lesen einige[5] Dezimalen einer berechneten Zahl vom Taschenrechner ab und schreiben diese Zahl als Ergebnis an, ohne sich um die nachfolgenden Dezimalen zu kümmern.

2) Irrtümlich nicht korrigierte (übersehene) SchülerInnenfehler

Ihre Zahl dürfte gering sein, nachgeprüft wurde sie nicht. Die wenigen (zufällig gefundenen) Fehler dieser Art wurden in die Untersuchung einbezogen.

3) Von den LehrerInnen nicht korrigierte Teile der Aufgabenbearbeitungen

---

[3] Angesichts besonders krasser Fälle wird das Bedürfnis nach einem verstärkten Einbeziehen der schriftlichen Form in die Benotung verständlich. Von MaturantInnen sollte man das Erfüllen gewisser Mindestanforderungen beim Präsentieren von Ergebnissen erwarten dürfen.

[4] Das zeigen sowohl die Vorerhebung zu dieser Arbeit als auch die Erfahrung (des Verfassers) im 2. Bildungsweg.

[5] Dass die Anzahl der Dezimalen, die man in einem Ergebnis angibt, mehr oder weniger sinnvoll sein kann, scheint vielen SchülerInnen unbekannt und ihren LehrerInnen egal: auch sinnlos genau angegebene Ergebnisse wurden nur sehr selten korrigiert.

Es wurden drei verschiedene Bereiche gefunden, in denen die LehrerInnen keine Korrekturen vorgenommen haben:

a) Von den SchülerInnen Durchgestrichenes

Das waren des Öfteren mehrere Seiten einer Aufgabenbearbeitung. Sie wurden nicht untersucht (was in etlichen Fällen auch gar nicht möglich gewesen wäre, da die SchülerInnen das [u.U. nur vermeintlich] Falsche regelrecht übermalt hatten).

Viele SchülerInnen haben eine Seite nur durchgestrichen, weil sie davon eine Reinschrift angefertigt hatten. Wenn in dieser Reinschrift fehlerhafte Zwischenschritte ausgelassen, im durchgestrichenen Konzept aber vorhanden waren, so wurde dieses herangezogen, um die Fehler einer Kategorie zuordnen zu können.

b) Nicht Zielführendes oder nicht Verlangtes - siehe Kapitel B.3.3.3.

c) Teile von Aufgabenbearbeitungen, in denen nach mehreren vorausgehenden Fehlern kein richtiges Ergebnis zu erwarten war.

Vermutlich wurde hier nicht weiter korrigiert, weil die LehrerInnen keinen weiteren Einfluss auf die erreichte Punktezahl sahen. Dies kam selten vor, die wenigen Passagen wurden nachkontrolliert und gefundene Fehler in die Untersuchung einbezogen.

B.3.3.2 Von den SchülerInnen selbst Korrigiertes

"LÖRCHER (1984) weist darauf hin, daß durch das Anstreben des unerreichbaren Ziels der Fehlervermeidung häufig vergessen wird, die Schüler im Mathematikunterricht auf das Erkennen, Finden und Überwinden von Fehlern vorzubereiten."[6]

Fehler, die von den SchülerInnen selbst gefunden und korrigiert werden, können von besonderem Interesse sein.[7] In die vorliegende Arbeit wurden sie nicht einbezogen[8], und zwar aus zwei Gründen:

[6] Nach RADATZ 1985, Seite 19.

[7] Wenn eine SchülerIn an der eigenen Arbeit etwas verändert, gibt es drei Möglichkeiten: 1) Falsches → Richtiges, 2) Falsches → Falsches, 3) Richtiges → Falsches. Für die vorliegende Untersuchung wurde immer das Ergebnis der Korrektur herangezogen, das ursprünglich Geschriebene und die Frage, ob die Korrektur selbst richtig ist, wurden nicht berücksichtigt.

1) Sie sind nur mit einem großen Zeitaufwand zu finden. Dies gilt insbesondere für jene Fehler, die erst wesentlich später (z.B. aufgrund offensichtlich falscher Ergebnisse) korrigiert werden und eine Kaskade von Folgekorrekturen nach sich ziehen.

2) Sie sind oftmals schwer oder gar nicht zu finden:

Manche Fehlerkorrekturen kann man nur an einem leicht veränderten Schriftbild erkennen, beispielsweise wenn ein Minus auf ein Plus ausgebessert wird, eine Klammer nachträglich eingefügt wird, u.Ä.

In vielen Maturaarbeiten sind die SchülerInnen ihren Fehlern mit dem Tintenlöscher zu Leibe gerückt, in den seltenen Fällen, in denen mit Bleistift geschrieben wurde, hat der Radiergummi ihre Spuren verwischt. Solchen "Fehlerbeseitigungsmitteln" kann man auch positive Aspekte abgewinnen:

"Erst die bedeutsame (pädagogische) Erfindung des Tintenkillers erlaubte vielen Schülern im Mathematikunterricht einen Schutz vor der negativen Benotung (vgl. LÖRCHER)."[9]

B.3.3.3 Nicht Verlangtes, nicht Zielführendes

Hier geht es um zwei Fragen:

1) Wenn eine SchülerIn etwas ausrechnet, das nicht verlangt ist - soll man diese Vorgangsweise als Fehler ansehen, sei es, weil die SchülerIn damit eine falsche Interpretation der Angabe erkennen lässt oder weil sie damit Zeit verliert?

Beides müsste man aber in jedem Einzelfall prüfen: eine sinnvolle Probe z.B. wird man nicht als Fehler bezeichnen; auch das Berechnen der y-Koordinaten der Schnittpunkte zweier Graphen (wobei nur das Ermitteln der x-Koordinaten als Integrationsgrenzen notwendig ist) wird man nicht als Fehler ansehen, eher schon als Zeitverschwendung; von einem Fehler im Lösungsweg könnte man in folgendem Fall sprechen: eine SchülerIn soll die von zwei Graphen

[8] In einer Stichprobe von 20 Aufgabenbearbeitungen wurden die von den SchülerInnen selbst vorgenommenen Korrekturen untersucht, die Ergebnisse sind in Abschnitt F.2 zusammengestellt.

[9] RADATZ 1985, Seite 19. Allerdings verstärkt der bei den SchülerInnen sehr beliebte Einsatz des Tintenkillers die ohnehin starke Tendenz zur Verdrängung der Fehler. Ein positiver Umgang mit ihnen, um falsche Vorstellungen zu erkennen und daraus zu lernen, wird durch den Tintenkiller nicht gefördert.

eingeschlossene Fläche berechnen, beginnt diesen Aufgabenteil mit der Berechnung der (nicht verlangten) Nullstellen eines der Graphen und bricht die Bearbeitung mittendrin (aus welchen Gründen auch immer) ab.

Von einem (nicht selbst korrigierten) Fehler könnte man sprechen, wenn eine SchülerIn bei der Aufgabenbearbeitung einen falschen Weg einschlägt und diesen für richtig hält[10] - dies entspricht einem Fehler, wie er in B.3.1 I) besprochen wurde.

Das Problem eines eventuellen Zeitmangels und seiner Ursachen ist aus den schriftlichen Arbeiten nicht erkennbar.[11]

Daher wurde entschieden, die bloße Existenz von nicht Verlangtem bzw. nicht Zielführendem nicht als Fehler anzusehen.

2) Wie verhält es sich mit den Fehlern in jenen Teilen einer Aufgabenbearbeitung, die nicht verlangt sind bzw. nichts zum Erreichen des verlangten Zieles beigetragen? Um eine einheitliche Vorgangsweise zu erreichen, wurde entschieden, dass Fehler in solchen Teilen einer Aufgabenbearbeitung nicht berücksichtigt werden, egal ob sie von der LehrerIn korrigiert wurden oder nicht.[12]

B.3.4 Keine Wertung der Fehler

Wenn man schriftliche Mathematikarbeiten auf die darin vorkommenden Fehler untersucht, dann drängen sich zwei Fragen auf:

1) Welche Auswirkungen haben die Fehler auf die Note?

2) Bei welchen Fehlern handelt es sich um typische Fehler?

---

[10] Es könnte auch das Motiv "Besser irgendetwas hinschreiben als gar nichts" dahinterstecken.

[11] In vielen mit Nicht genügend beurteilten Maturaarbeiten fehlt die Bearbeitung ganzer Aufgaben oder großer Aufgabenteile. Bei einer Untersuchung der Misserfolgsursachen müsste daher auch die Hypothese "Zeitmangel" geprüft werden.

[12] Wobei angemerkt werden muss, dass die Entscheidung, ob es sich z.B. um eine umständliche Variante eines Lösungsweges oder um etwas nicht Verlangtes bzw. Zielführendes handelt, nicht immer leicht zu treffen ist. Dieses Problem hat aber nur einen marginalen Einfluss auf die Ergebnisse.

Frage 2) kann in Hinblick auf bestimmte Aufgabentypen oder in Hinblick auf die mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten einzelner SchülerInnen oder einer Gesamtheit von SchülerInnen gestellt werden. Oft wird zwischen Flüchtigkeitsfehlern und typischen Fehlern unterschieden, wobei man auch den Begriff "typischer Flüchtigkeitsfehler" einführen könnte, z.B. für das häufig vorkommende $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.[13]

In beiden Fragen geht es um die Unterscheidung in wesentliche und unwesentliche Fehler (vergleiche Kapitel A.2.2.1).

Zu Frage 1): Die Frage nach den Fehlerfolgen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, daher wird in diesem Sinne auch nicht zwischen leichten und schweren Fehlern unterschieden, aufgrund der Wichtigkeit dieser Problematik wird aber in Kapitel F.3.2 noch kurz darauf eingegangen.

Zu Frage 2): Auf eine Unterscheidung in Flüchtigkeitsfehler und typische Fehler wird hier verzichtet [siehe Kapitel B.3.1 II)].

B.3.5. Die Auswahlprinzipien im Überblick

Der vorgegebene Rahmen

Die Auswahl der Fehler wird wesentlich von den Zielen und dem vorgegebenen Rahmen der Untersuchung beeinflusst (vergleiche Kapitel A.1.2.1 und die Abschnitte B.1 und B.2).

Eine Auswahl homogener Gruppen von SchülerInnen oder Aufgaben wurde nicht vorgenommen, daher ist eine vergleichende Auswertung der Fehlerhäufigkeiten (um z.B. den Stellenwert der Fehler quantitativ zu vergleichen) sowie eine statistische Auswertung der Ergebnisse nach bestimmten Variablen (wie z.B. Geschlecht, Schulleistung, etc.) nicht möglich (vergleiche Kapitel A.1.2.5).[14]

---

[13] Nach einem Hinweis auf einen Fehler wird diese Umformung von den meisten SchülerInnen problemlos (aber oft ärgerlich) richtig gestellt.

[14] Das wäre ein interessantes Thema für eine Dissertation.

Die Fehlerbeschreibung und die Auswahlkriterien

Die Fehlerauswahl und Fehlerbeschreibung bzw. -kategorisierung (in Abschnitt C) erfolgt auf der Ebene der Fehlerphänomene bzw. der Fehlertechniken (siehe Kapitel A.2.2.3) nach pragmatischen mathematisch-inhaltlichen Kriterien (vergleiche die Kapitel A.1.2.1 und A.1.2.6) mit besonderem Augenmerk auf Unterstufen-Fehler, andere Fehler wurden nur am Rande berücksichtigt; Fehler, zu deren Beschreibung Interpretationen oder Wissen über Denkvorgänge der SchülerInnen, Fehlerursachen oder Fehlerfolgen notwendig sind (vergleiche die Kapitel A.2.1, A.2.2.1, A.2.2.5 und B.3.1), wurden nicht berücksichtigt.

Daher wurde auch keine weitere Differenzierung (bzw. Vorauswahl) in wesentliche und unwesentliche Fehler wie z.B. in Flüchtigkeitsfehler und typische Fehler vorgenommen (vergleiche die Kapitel A.2.2.1, A.2.2.4, A.2.3 und B.3.1).

Die Vorgangsweise - (nicht) einbezogene Fehler

Neben den bisher besprochenen Festlegungen wurden im Sinne einer praktikablen Vorgangsweise folgende Fehler bzw. Aspekte nicht in die Untersuchung einbezogen (vergleiche die Kapitel A.2.1 und B.3.3):

Fehlendes; Unleserliches; von den LehrerInnen nicht Korrigiertes[15]; von den SchülerInnen selbst Korrigiertes[16] sowie nicht verlangte bzw. nicht zielführende Teile der Aufgabenbearbeitung.

Einbezogen wurden Folgefehler[17], worunter nicht das richtige Weiterrechnen (das aufgrund des ersten Fehlers i.A. zu falschen Ergebnissen führt) zu verstehen ist, sondern Fehler im weiteren Gang - wobei diese möglicherweise durch vorangegangene Fehler provoziert wurden (vergleiche Kapitel A.2.1).

---

[15] Mit Ausnahme von zufällig gefundenen Fehlern, die von der LehrerIn übersehen wurden, und jenen Teilen der Aufgabenbearbeitungen, die von den LehrerInnen nicht korrigiert wurden, weil sich daraus kein Einfluss auf die Punktezahl ergeben hätte - beides seltene Fälle.

[16] Nicht einbezogen wird das, was die SchülerIn vor der eigenhändigen Korrektur geschrieben hatte; was nach dieser Korrektur zu lesen war, wurde berücksichtigt - bei mehrmaligen Korrekturen nur die letzte Version.

[17] Die Fehlerfolgen werden nicht untersucht, vergleiche Kapitel F.3.2.

B.3.6 Zählen der Fehler

Gezählt wurden prinzipiell die in den schriftlichen Arbeiten eindeutig erkennbaren Einzelfehler (vergleiche Kapitel A.1.2.8), dabei wurde so vorgegangen, dass nachvollziehbar ist, ob eine SchülerIn einen Einzelfehler mehrmals gemacht hat bzw. wie viele (verschiedene) Einzelfehler sie gemacht hat.

"Was ist *ein* Fehler?"

Diese Fragestellung (vergleiche die einleitenden Bemerkungen zum Abschnitt A.2 und zum Kapitel A.2.2) führt auf zwei Problemstellungen:

1) Wie unterscheidet man Fehler? Siehe Kapitel A.1.2.8.

2) Was sieht man als *einen* Einzelfehler an? Hier gibt es einerseits a) die Schwierigkeit ineinander verschachtelter Fehlerphänomene und andererseits b) das Problem, dass man mehrere Fehler aufgrund nicht notierter Zwischenschritte nur als ein Fehlerphänomen wahrnehmen kann.

Zu a): Es kann vorkommen, dass zwei fehlerhafte Prozeduren ineinander greifen bzw. im äußeren Erscheinungsbild so eng beisammen liegen, dass sie schwer zu trennen sind bzw. dass nicht eindeutig erkennbar ist, ob es sich um *ein* Fehlerphänomen oder um die Kombination mehrerer Fehlerphänomene handelt.

In diesen Fällen wurde folgendermaßen vorgegangen: Wenn (auch unter Einbeziehung des Fehlerkontextes) mit hoher Wahrscheinlichkeit zwei Fehlertechniken identifizierbar waren, dann wurden beide Fehlertechniken als Einzelfehler ihren jeweiligen Kategorien zugeordnet, andernfalls wurde die Stelle als *ein* Einzelfehler (als ein nicht näher identifiziertes Fehlerphänomen) betrachtet.

Zu b): Häufiger passiert es, dass SchülerInnen mehrere Zwischenschritte im Kopf (oder mit dem Taschenrechner) erledigen und dabei zu einem falschen Ergebnis kommen. Dabei ist oft nicht (oder nur mit großem Aufwand) nachvollziehbar, ob es sich um eine einzige Fehlertechnik oder um die Kombination mehrerer Fehlertechniken handelt.

Zur konkreten Vorgangsweise in diesen Fällen sei auf den Abschnitt C verwiesen.

Weiteres zur Fehlerzählung siehe Abschnitt E.

C KATEGORISIERUNG DER FEHLER

Die grundsätzlichen Überlegungen zu einem Kategorisierungssystem von SchülerInnenfehlern sind im Kapitel A.1.2.6 dargelegt.

Im Zuge einer Vorerhebung wurde nach den im Kapitel B.3.5 (und B.3.6) zusammengefassten Auswahlkriterien ein populationsbezogenes Kategoriensystem entwickelt.

Die Vorerhebung umfasste jeweils rund 10 bis 20 zufällig ausgewählte Aufgabenbearbeitungen (aus verschiedenen Klassen und nur solche mit Fehlern) pro untersuchtem Aufgabentyp. Die Fehlerphänomene wurden mit "Post-it"-Zetteln lesezeichenartig markiert und vorläufig benannt, sodass sie von außen übersichtlich erkennbar waren.

In einer groben Vorklassifizierung wurden die Fehlerphänomene in zwei Gruppen eingeteilt:

1) Fehler aus Kernbereichen des Unterstufenstoffs (vergleiche Kapitel B.3.2) - die Untersuchung dieser Fehler ist der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit.

2) Weitere Fehler - unterschieden in:

   a) Sonstige Unterstufen-Fehler

   b) Oberstufen-Fehler[1]

   c) Übertragungsfehler und Notations- bzw. Formalfehler

   d) Verbleibende Fehlerphänomene

Am Ende der Vorerhebung war eine möglichst klare, präzise und operationale Beschreibung der Kategorien zu erarbeiten, sodass möglichst viele der

[1] Darunter sind Fehler, die dem Lehrstoff der Sekundarstufe II, also der 9. - 12. Schulstufe zuzuordnen sind, zu verstehen.

gefundenen Einzelfehler eindeutig und leicht identifizierbar einer Kategorie zugeordnet werden konnten.[2]

Die Beschreibung der Fehlerkategorien erfolgt nach mathematisch-inhaltlichen Kriterien[3] auf der Ebene der Fehlerbeschreibung[4] (mit den Begriffen Fehlerphänomen bzw. Fehlertechnik) und ist vor allem an curricularen Begriffen (wie z.B. Fehler beim Termumformen oder beim Lösen von Gleichungen) bzw. an fehlerhaft ausgeführten Verfahrensschritten (wie z.B. Vorzeichenfehler beim Einsetzen von Zahlen für Variable) orientiert.

Fehlerhafte Lösungsprozesse (wie z.B. falsch interpretierter Angabetext) wurden[5] nur in Einzelfällen zur Charakterisierung von Fehlerkategorien herangezogen.

Beschreibung der prinzipiellen Vorgangsweise

Im Zuge der Aufgabenbearbeitung notieren die SchülerInnen mehr oder weniger Zwischenschritte als karge Spuren des kognitiven (und affektiven) Feuerwerks, aus dem eine Aufgabenbearbeitung entsteht.[6]

Der Großteil dieser Notizen sind Terme und Aussagen (meist als Gleichungen), daneben gibt es Skizzen und Zeichnungen und gelegentlich verbale Mitteilungen; außerdem schreiben viele SchülerInnen Teile der Angabe ab.

Folgt man den schriftlichen Aufzeichnungen der SchülerInnen Schritt für Schritt[7], kann man, abgesehen von unklaren Notizen, die fehlerhaften Schritte erkennen. Die so gefundenen Fehlerphänomene sind in ein unterschiedlich komplexes Beziehungsgeflecht eingebettet:

---

[2] Nach MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987, Seite 7-8.

[3] Nach RADATZ 1985, Seite 22.

[4] Im Gegensatz zur Ebene der Fehlerursachen.

[5] Im Unterschied zur Untersuchung von MOVSHOVITZ-HADAR/ZASLAVSKY/INBAR 1987.

[6] Die sprichwörtliche Spitze eines Eisberges sagt beträchtlich mehr über diesen aus, als eine schriftliche Aufgabenbearbeitung über den inneren Anteil ihrer SchöpferIn berichten kann.

[7] Dies ist aufgrund der schriftlichen Form mancher Aufgabenbearbeitungen nicht immer möglich (vergleiche Kapitel B.3.3.1).

- (Zumindest) ein "Ansatzschritt" steht am Beginn jeder Aufgabenbearbeitung bzw. am Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteilen. Ansatzschritte sind direkt aus der Angabe abgeleitet.

- Ein "einfacher Folgeschritt" ergibt sich aus der Bearbeitung des unmittelbar vorher Stehenden, der Rest der Aufgabenbearbeitung spielt dabei keine Rolle. Auch die Bearbeitung einer länger zurückliegenden Notiz kann einen einfachen Folgeschritt darstellen.

- Von einem "kombinierten Folgeschritt" kann man sprechen, wenn das Notierte aus mehreren vorangegangenen Schritten, unter Einbeziehung der Angabe, oder aus einer Kombination dieser beiden Aspekte entsteht.

Wesentlich für die Zuordnung eines Fehlerphänomens zu einer Kategorie ist, dass die von der SchülerIn angewendete Fehlertechnik hinreichend genau analysiert werden kann. Entscheidend ist, ob man aus der schriftlichen Arbeit erkennen kann, was die SchülerIn gemacht hat und in welchem Umfeld sie es gemacht hat, d.h. auch, worauf sie sich bezogen hat.

- Ein einfacher Folgeschritt ergibt sich ausschließlich aus der Bearbeitung des vorhergehenden Schritts, ist diese fehlerhaft, so ist mit diesem einfachen Folgeschritt ein Fehlerphänomen in einem ganz bestimmten Umfeld gut lokalisiert. Die spezifische Art einer solchen fehlerhaften Bearbeitung und ihres Umfelds wurden zur Charakterisierung der Fehlerkategorien der Gruppe 1) [Siehe Seite 102] verwendet.[8]

- Fehlerhafte Ansatzschritte und insbesondere fehlerhafte "kombinierte Folgeschritte" stellen häufig schwer zu analysierende Fehlerphänomene dar, weil oft nicht eindeutig erkennbar ist, worauf sich die SchülerIn bezogen hat. Auf eine differenzierte Kategorisierung solcher Fehlerphänomene wurde daher - abgesehen vom zugehörigen Aufgabentyp - im Wesentlichen verzichtet.

[8] Eine Ausnahme gibt es bei der Fehler-Kategorie Ef (Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable), wo der Folgeschritt auch auf zwei vorangehenden Schritten beruhen kann - siehe Abschnitt C.1 bzw. C.2.

C.1 Die Fehler-Kategorien im Überblick

Jede Kategorie wird mit einer Abkürzung benannt, dies ist zur Darstellung der Fehlerhäufigkeiten in den Tabellen des Abschnitts E erforderlich und wurde auch bei der Durchführung der Arbeit zur Kennzeichnung der Einzelfehler verwendet.[1]

Im Folgenden werden die Fehler-Kategorien entsprechend der Vorklassifizierung in Gruppe 1) und 2) (siehe Seite 102) kurz vorgestellt, eine detailliertere Besprechung (insbesondere eventueller Unterkategorien) erfolgt im Abschnitt C.2, Beispiele zu einzelnen Fehler-Kategorien sind im Abschnitt D zu finden.

C.1.1 Fehler-Kategorien zu Kernbereichen des Unterstufenstoffs

Im Wesentlichen geht es bei Fehlern dieser Gruppe um fehlerhafte Umformungen (von Termen mit Zahlen und Variablen bzw. von Gleichungen) in einfachen Folgeschritten[2]. Diese Umformungen sind jene fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale des Lehrstoffs des Unterstufenstoffs, die nicht nur in vereinzelten Maturaaufgaben vorkommen, sondern in mehreren Aufgabentypen.

Damit soll keineswegs einer Sichtweise, die im breiten Spektrum des Lehrstoffs der Sekundarstufe I nur der elementaren Algebra Bedeutung beimisst, das Wort geredet werden. Andere Bereiche[3] dieses Lehrstoffs (wie z.B. Geometrie, Prozent- und Schlussrechnen) werden bei der Matura nur selten verlangt und von einem großen Teil der MaturantInnen auch nicht gekonnt.[4]

---

[1] Die Kurzbezeichnung jeder Fehler-Kategorie endet mit dem Kleinbuchstaben "f" (z.B. Rf, Ef, Vf, usw.), um Verwechslungen mit den Kurzbezeichnungen der Aufgabentypen (vergleiche Tabelle B2) zu vermeiden.

[2] Zu diesem Begriff vergleiche Seite 104.

[3] In Hinblick auf die Brauchbarkeit bzw. Notwendigkeit im Alltag sind einige dieser Bereiche deutlich wichtiger als die elementare Algebra.

[4] Das zeigen z.B. die Lösungswahrscheinlichkeiten für einfache Prozent- und Schlussrechnungen aus der TIMSStudy, z.B. in BAUMERT 1999, Seite 24-25.

Die für das mathematische Verständnis und die Einstellung zur Mathematik besonders wichtige Basis, die in der Unterstufe gebaut wird, ist in den Fehlern von MaturantInnen nur schwer dingfest zu machen.[5]

In den folgenden Kurzbeschreibungen werden die Fehler-Kategorien dieser Gruppe durch jene Umformungen charakterisiert, deren fehlerhafte Bearbeitung die Zuordnung eines derart (in einem einfachen Folgeschritt) lokalisierten Fehlerphänomens zu der jeweiligen Kategorie bedingt.

Dabei ist zu beachten, dass die Formulierung "fehlerhafte Umformung" Übertragungs- und Notationsfehler (Beschreibung der Fehler-Kategorien Üf und Nf in Kapitel C.1.2) nicht einschließt - zur praktischen Vorgangsweise siehe Kapitel C.1.3.

Kategorie **Gf** Fehler beim Umformen von Gleichungen

Eine Gleichung wurde fehlerhaft umgeformt - und zwar mit Blick auf die Gleichung als Ganzes.

Umformungen, die eindeutig zum Stoff der Oberstufe gehören (wie z.B. das Logarithmieren einer Gleichung) werden hier nicht berücksichtigt. Wenn es sich eindeutig um das fehlerhafte Vereinfachen *einer* Seite einer Gleichung handelt, dann wird das Fehlerphänomen den Kategorien Rf bzw. Vf zugeordnet.

Kategorie **Vf** Fehler beim Umformen von Termen mit Variablen

Ein Term mit Variablen wurde fehlerhaft in einen anderen Term mit Variablen umgeformt (beim Setzen und Auflösen von Klammern, Zusammenfassen von mehreren Summanden, usw.).

Wenn eindeutig erkennbar ist, dass Rechenoperationen zwischen Konstanten (ohne die Anwendung zusätzlicher Regeln, wie z.B. dem Distributivgesetz) fehlerhaft ausgeführt wurden, ist das Fehlerphänomen der Kategorie Rf zuzuordnen.

[5] Beim Durchsehen der untersuchten Maturaarbeiten drängt sich das Gefühl auf, dass diese Basis bei einigen MaturantInnen nicht sehr tragfähig sein kann.

Kategorie **Rf** Rechenfehler

Ein Zahlenterm wurde fehlerhaft in einen anderen Zahlenterm umgeformt (in den meisten Fällen war das ein Zwischenschritt beim Berechnen von Ergebnissen).

Kategorie **Ef** Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

Ein Term mit Variablen wurde durch Einsetzen von Zahlen in Variable fehlerhaft in einen Zahlenterm[6] umgeformt. Eine Zuordnung zu dieser Kategorie erfolgt nur dann, wenn der Zahlenterm ohne Inkludierung weiterer Rechenschritte (mit Ausnahme der Multiplikation eines Koeffizienten mit der eingesetzten Zahl) angeschrieben wurde und wenn sowohl der Term mit Variablen als auch die in diesen Term eingesetzte(n) Zahl(en) eindeutig erkennbar sind.

Kategorie **Bf** Fehler beim Berechnen des Werts eines Terms

Beim Berechnen des Werts eines Terms folgte auf einen richtig notierten Schritt ein falsches (Zwischen-)Ergebnis, wobei mehrere Zwischenschritte (Einsetzen und mehrere Berechnungsschritte) nicht notiert wurden. Die eingesetzten Zahlen müssen eindeutig erkennbar sein.

Das falsche (Zwischen-)Ergebnis kann auf einen oder auf mehrere Fehler (der Kategorie Rf und/oder Ef und/oder auf andere Fehlleistungen, wie z.B. Tippfehler beim Bedienen des Taschenrechners) zurückzuführen sein.

C.1.2. Weitere Fehler-Kategorien

Kategorie **sUf** Sonstige Unterstufen-Fehler

In dieser Kategorie werden alle Fehlerphänomene zusammengefasst, die - u. U. trotz eines bedeutenden Oberstufenkontexts - dem Lehrstoff der Sekundarstufe I

[6] Auch ein Fehlerphänomen, bei dem nicht alle Variable des Terms durch Zahlen ersetzt wurden, sich also nach dem fehlerhaften Einsetzen der Zahlen wieder ein Term mit Variablen ergab, wurde dieser Fehlerkategorie zugeordnet, wenn die sonstigen Bedingungen erfüllt waren.

zugeordnet werden können, die aber in den untersuchten Maturaarbeiten so selten auftreten, dass eine Unterteilung in weitere Kategorien nicht gerechtfertigt erschien.

Notations- bzw. Formfehler wurden nicht den Unter- bzw. Oberstufen-Fehlern zugeordnet, sie wurden zu einer eigenen Kategorie zusammengefasst. (Beschreibung der Kategorie Nf siehe unten.)

Kategorie **Of** Oberstufen-Fehler

Diese Kategorie umfasst Fehlerphänomene, deren Fehlertechnik soweit analysierbar ist, dass sie dem Lehrstoff der Sekundarstufe II zugeordnet werden kann.

Kategorie **Üf** Übertragungsfehler

Zu dieser Fehler-Kategorie zählen reine Übertragungsfehler, die keine weiteren Bearbeitungsschritte beinhalten - das ist der Fall, wenn eine SchülerIn einzelne Zeichen oder Zeilen falsch abgeschrieben hat: von der Angabe oder von ihren eigenen Notationen, egal wie groß der zeitliche bzw. räumliche Abstand zwischen Quelle und Abschrift war. Dieser Kategorie werden nur solche Fehlerphänomene zugeordnet, bei denen Quelle und Abschrift eindeutig vorliegen und wo aus dem Umfeld keine Hinweise erkennbar sind, die auf eine absichtsvolle Handlung der SchülerIn als Erklärung für den Unterschied zwischen Quelle und Abschrift hindeuten.[7]

Kategorie **Nf** Notations- bzw. Formalfehler

Zu den Schwierigkeiten, diesen Fehlerbegriff im Sinne des Abschnitts B.3 zu operationalisieren siehe Kapitel C.2.6; um diesen Schwierigkeiten zu begegnen,

[7] Diese Beschreibung beruht - wenn auch in einem bescheidenen Ausmaß - auf einer Interpretation der kognitiven Prozesse der SchülerIn. Damit soll aber keineswegs der Begriff des Flüchtigkeitsfehlers "durch die Hintertür" eingeführt werden. Übertragungsfehler sind ein kleiner, aber relativ klarer Aspekt des Sammelbegriffs Flüchtigkeitsfehler, sodass diese Abweichung von dem im Kapitel B.3.1 II) dargelegten Prinzip gerechtfertigt erscheint.

stützt sich die Fehlercharakterisierung nicht nur auf die folgende allgemeine Beschreibung, sondern auch auf die in Kapitel D.5.1 angeführten Beispiele.

- Ein mathematisches Zeichen (insbesondere Klammern; weiters Operatorzeichen wie das Integralzeichen oder "lim", usw.; Pfeile; etc.) wird falsch gesetzt oder fehlt, es ist aber eindeutig erkennbar, dass die Folgeschritte so erfolgen, als ob das Zeichen richtig gesetzt wäre.

- Mathematische Zeichen (Gleichheitszeichen; Symbole der Mengenlehre; übliche Notation einer Funktion) werden in formal falschem Kontext geschrieben, es ist aber eindeutig erkennbar, dass die Folgeschritte so erfolgen, als ob das Zeichen in richtigem Kontext geschrieben wäre.

Kategorie **sf** Sonstige Fehler (Verbleibende Fehlerphänomene)

Fehler werden erst dort fassbar, wo die sichtbaren Mitteilungen über die Vorstellungswelt der SchülerInnen dem Richtigen nahe kommen.

Alle Fehlerphänomene, bei denen eine Zuordnung zu einer der obigen Kategorien nicht möglich war (im Wesentlichen aufgrund nicht ausreichend identifizierbarer Fehlertechniken), wurden in dieser Fehler-Kategorie subsumiert.

C.1.3 Ablaufschema der Fehlerzuordnung

Bei jedem Fehlerphänomen wurde zuerst geprüft, ob es den Kategorien Üf oder Nf (siehe Kapitel C.1.2) zuzuordnen ist, war dies nicht der Fall, dann wurde festgestellt, ob das Fehlerphänomen in einem einfachen Folgeschritt lokalisiert ist und einer Fehler-Kategorie zu Kernbereichen des Unterstufenstoffs (siehe Kapitel C.1.1) zugeordnet werden kann.

Traf auch dies nicht zu, wurde untersucht, ob die Fehlertechnik soweit analysierbar ist, dass man das Fehlerphänomen in die Kategorien sUf oder Of (siehe Kapitel C.1.2) einreihen kann.

Fehlerphänomene, bei denen eine Zuordnung zum Stoff der Unterstufe bzw. der Oberstufe nicht sinnvoll bzw. möglich erschien, sowie unklare Fehlerphänomene (weil die Notizen und das zugehörige Umfeld für eine hinreichende Analyse der Fehlertechnik nicht genügten) bilden die Kategorie sf (siehe Kapitel C.1.2).

Im Folgenden ist diese Vorgangsweise schematisch dargestellt:

Fehlerphänomen geprüft auf:		Eingeordnet in Kategorie:	
Übertragungsfehler ?	Ja →	**Üf**	
Nein ↓			
Notationsfehler ?	Ja →	**Nf**	
Nein ↓			
Fehler der Gruppe 1) ?	Ja →	**Gf**	→ Unterkategorie ?
Nein ↓		oder	
↓		**Vf**	→ Unterkategorie ?
↓		oder	
↓		**Rf**	→ Unterkategorie ?
↓		oder	
↓		**Ef**	→ Unterkategorie ?
↓		oder	
↓		**Bf**	
Sonstiger Unterstufen-Fehler ?	Ja →	**sUf**	
Nein ↓			
Oberstufen-Fehler ?	Ja →	**Of**	→ Unterkategorie
Nein ↓			
Sonstige Fehler	→	**sf**	

C.2 Nähere Beschreibung ausgewählter Fehler-Kategorien

Kategorien mit besonderer Bedeutung - entsprechend dem Untertitel dieser Arbeit sind dies die Fehler-Kategorien zu Kernbereichen des Unterstufenstoffs (siehe Kapitel C.1.1) - bzw. Kategorien mit einer hohen Fehlerzahl wurden weiter differenziert.

Mögliche Unterkategorien wurden schon in der Vorerhebung unter Berücksichtigung der Fachliteratur und der Unterrichtserfahrung des Verfassers entwickelt.[1] Im Zuge der Fehlererhebung wurden die Unterkategorien noch leicht modifiziert bzw. einige (kaum vorkommende) Unterkategorien weggelassen, im Folgenden sind sie in ihrer endgültigen Form durch die Beschreibung der fehlerhaften Vorgangsweise einer SchülerIn dargestellt.

Bei der Zuordnung der Fehlerphänomene zu einer Unterkategorie ist auf die genaue Einhaltung der Reihenfolge der Unterkategorien zu achten! (Siehe Kapitel C.2.7)

C.2.1 Kat. Rf: Rechenfehler

Unterkategorie **Rf-zw** Rechenfehler mit fehlenden Zwischenschritten

Bei der fehlerhaften Berechnung bzw. Umformung eines Zahlenterms wurden zwischen dem richtigen und dem darauf folgenden fehlerhaften Term mehrere Bearbeitungsschritte nicht notiert.

Die Fehlertechnik ist in diesen Fällen nicht bzw. nur in Einzelfällen in detektivischer Kleinarbeit festzustellen.

---

[1] Nach denselben Prinzipien, die bei der Charakterisierung der Hauptkategorien herangezogen wurden (siehe Abschnitt B.3).

Unterkategorie **Rf-p** Rechenfehler beim Potenzieren

Fehlerhaftes Berechnen bzw. Umformen einer Potenz - auch mit einem Bruch oder einem Teil eines Bruches in der Basis oder im Exponenten.

Unterkategorie **Rf-b** Rechenfehler beim Bruchrechnen

Rechenfehler, bei denen ein Bruch in den fehlerhaften Teil einer Rechnung bzw. Umformung involviert ist; ausgenommen sind jene Fehlerphänomene, die der Unterkategorie Rf-p zugeordnet wurden.

Unterkategorie **Rf-s** Sonstige Rechenfehler

C.2.2 Kat. Ef: Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

Unterkategorie **Ef-vz** Vorzeichenfehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

Der fehlerhafte Folgeschritt unterscheidet sich nur durch ein oder mehrere falsche bzw. fehlende Vorzeichen von einer richtigen Fortsetzung des Rechengangs.

Unterkategorie **Ef-s** Sonstige Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

C.2.3 Kat. Vf: Fehler beim Umformen von Termen mit Variablen

Unterkategorie **Vf-vz**

Vorzeichenfehler beim Umformen von Termen mit Variablen

Der fehlerhafte Folgeschritt unterscheidet sich nur durch ein oder mehrere falsche bzw. fehlende Vorzeichen von einer richtigen Fortsetzung des Rechengangs.

Unterkategorie **Vf-bf** Fehler beim Anwenden von binomischen Formeln

Das Quadrieren eines Binoms (oder die Anwendung einer anderen binomischen Formel) wurde fehlerhaft ausgeführt; ausgenommen sind jene Fehlerphänomene, die der Unterkategorie Vf-vz zugeordnet wurden.

Wenn eindeutig erkennbar war, dass die SchülerIn nicht eine Formel verwendete, sondern z.B. den Weg "Ausmultiplizieren zweier Klammern" gewählt hatte, wurde das Fehlerphänomen nicht zu dieser Kategorie gezählt.

Unterkategorie **Vf-kl** Fehler beim Setzen oder Auflösen von Klammern

Bei der Umformung eines Terms mit Variablen wurden bestehende Klammern falsch aufgelöst, neue Klammern falsch gesetzt oder notwendige Klammern nicht gesetzt; ausgenommen jene Fehlerphänomene, die schon einer der vorangegangenen Unterkategorien zugezählt wurden.

Unterkategorie **Vf-b** Fehler beim Umformen von Brüchen

Fehlertechniken, bei denen eindeutig erkennbar ist, dass die SchülerIn eine Regel für das Umformen bzw. Berechnen von Brüchen fehlerhaft ausgeführt hat, und die nicht schon in einer der vorangegangenen Unterkategorien erfasst wurden.

Unterkategorie **Vf-s**

Sonstige Fehler beim Umformen von Termen mit Variablen.

C.2.4 Kat. Gf: Fehler beim Umformen von Gleichungen

Unterkategorie **Gf-vz** Vorzeichenfehler beim Umformen von Gleichungen

Der fehlerhafte Folgeschritt unterscheidet sich nur durch ein oder mehrere falsche bzw. fehlende Vorzeichen von einer richtigen Fortsetzung des Rechengangs.

Unterkategorie **Gf-gs** Fehler beim Lösen von Gleichungssystemen

Wenn eine SchülerIn im Zuge der Lösung eines Gleichungssystems zwei Gleichungen fehlerhaft zu einer Gleichung umgeformt hat (z.B. Substitution, Addieren zweier Gleichungen) und eindeutig erkennbar ist, von welchen Gleichungen sie dabei ausgegangen ist; ausgenommen jene Fehlerphänomene, die der Unterkategorie Gf-vz zugeordnet wurden.

Unterkategorie **Gf-uvä**

Unvollständiges Ausführen einer Äquivalenzumformung

Eine SchülerIn hat eine Äquivalenzumformung nur unvollständig ausgeführt, d.h. sie hat sie auf mindestens einen Teil der Gleichung nicht angewendet.

Wenn nicht eindeutig erkennbar ist, welche Äquivalenzumformung ausgeführt werden sollte oder wenn diese Umformung auf eine andere Art fehlerhaft ausgeführt war, so wurde das Fehlerphänomen nicht dieser Unterkategorie zugeordnet; dies gilt auch, wenn die Äquivalenzumformung mit anderen Bearbeitungsschritten kombiniert wurde, sodass nicht eindeutig erkennbar ist, in welchem (nicht notierten) Schritt der Fehler passiert ist.

Unterkategorie **Gf-s** Sonstige Fehler beim Umformen von Gleichungen

C.2.5 Kat. Of: Oberstufen-Fehler

Diese Kategorie weist klarerweise die mit Abstand größte Fehlerzahl auf, andererseits sind diese Fehler entsprechend dem Untertitel dieser Arbeit von geringerem Interesse, daher wurde nur eine grobe Differenzierung vorgenommen.

Es ist zu beachten, dass es hier nur um Fehlerphänomene geht, die nicht schon einer anderen Kategorie zugeordnet wurden (vergleiche das Ablaufschema in Kapitel C.1.3), weil sie mit großer Wahrscheinlichkeit auf Defizite aus dem Oberstufenstoff zurückzuführen sind.

Unterkategorie **Of-nlg** Fehler beim Lösen von nicht linearen Gleichungen

Z.B. Fehler beim Lösen von quadratischen Gleichungen, Gleichungen höheren Grades, Exponential- und Logarithmusgleichungen. Fehler in trigonometrischen Gleichungen werden der Kategorie Of-t (siehe unten) zugezählt.

Die folgenden Unterkategorien orientieren sich an den Stoffgebieten der Aufgabentypen (vergleiche Tabelle B2).

Unterkategorie **Of-d**

Fehler beim Differenzieren und Diskutieren von Kurven (auch Umkehraufgaben).

Unterkategorie **Of-i**

Fehler beim Integrieren und Anwenden der Integralrechnung für Flächen- oder Volumsberechnung.

Unterkategorie **Of-k** Fehler aus dem Stoffgebiet Kegelschnitte

Unterkategorie **Of-t** Fehler aus dem Stoffgebiet Trigonometrie

Unterkategorie **Of-v** Fehler aus dem Stoffgebiet Vektorrechnung

Unterkategorie **Of-w**

Fehler aus dem Stoffgebiet Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unterkategorie **Of-s** Sonstige Oberstufen-Fehler

In dieser Unterkategorie werden alle Fehlerphänomene zusammengefasst, die auf Defizite aus anderen Stoffgebieten (z.B. Exponential- und Logarithmusfunktionen) zurückzuführen sind bzw. bei denen eine Zuordnung zu *einem* der obigen Stoffgebiete nicht möglich ist.

C.2.6 Kat. Nf: Notations- bzw. Formalfehler

Im Kern der Sache geht es um fehlerhafte Schreibweisen, die den weiteren Rechengang i.A.[2] nicht beeinflussen und die dadurch charakterisiert sind, dass die mathematisch korrekte Bedeutung des Geschriebenen mit der von der SchülerIn intendierten Bedeutung nicht übereinstimmt:

- Im einfachsten Fall, weil die SchülerIn eine beabsichtigte Zeichensetzung (aus Gründen der Flüchtigkeit) unterlassen hat - eine solche "vergessene" Zeichensetzung ist in den Gedanken der SchülerIn aber oft noch präsent und taucht manchmal einige Schritte später auch in der schriftlichen Aufgabenbearbeitung wieder auf.

[2] Ein formaler Fehler kann durchaus zu einem fehlerhaften Rechengang führen, z.B.: Wenn eine SchülerIn in ihrer schriftlichen Bearbeitung "vergisst", eine richtig geöffnete Klammer zu schließen; in der Folge die "in ihrem geistigen Bild der Rechnung" noch vorhandene Klammersetzung in Angleichung an das unvollständige Schriftbild verblasst und schließlich die für ein richtiges Weiterrechnen notwendige Klammersetzung ganz aus dem schriftlichen Rechengang verschwindet.

- Es können aber auch fundamental fehlerhafte Vorstellungen bzw. Probleme im Verständnis der mathematischen Symbolsprache dahinter stecken.[3]

Von den LehrerInnen wurde solchen Fehlern in den untersuchten Aufgabenbearbeitungen offenbar nur geringe Bedeutung beigemessen, wenn man das Maß die Anzahl der vergebenen Punkte heranzieht. Fehler dieser Art blieben, auch bei SchülerInnen, die sie serienweise begingen, praktisch folgenlos, d.h., sie führten zu keinem Punkteabzug - ja sie wurden des Öfteren nicht einmal korrigiert.[4] Sie wurden daher entsprechend dem im Kapitel B.3.3.1 Gesagten auch nicht in vollem Umfang[5] in die Untersuchung einbezogen.

Für eine Operationalisierung nach den im Kapitel B.3 [insbesondere in B.3.1 II)] beschriebenen Prinzipien ist die oben angeführte Fehlerbeschreibung nicht brauchbar - Seitenblicke auf die Fehlerbewertung durch die LehrerInnen, vor allem aber Interpretationsversuche zu den Vorstellungswelten der SchülerInnen sollten darin nicht vorkommen (auch wenn sie sich angesichts der gefundenen fehlerhaften Schreibweisen nicht ganz vermeiden lassen). Diese Fehler liegen auf einer Ebene, die schwerer "greifbar" erscheint als z.B. "handfeste" Rechenfehler[6] - deshalb wurde bei diesen Fehlerphänomenen auf eine Differenzierung in Oberstufen- bzw. Unterstufen-Fehler (oder in andere Unterkategorien) verzichtet.

[3] Allein aus der schriftlichen Aufgabenbearbeitung ist oft nicht erkennbar, ob der SchülerIn nur ein "Versehen" unterlaufen ist oder ob sie gravierende Schwierigkeiten im Umgang mit mathematischen Inhalten hat.

[4] Laut Lehrplan soll der Unterricht in Mathematik das Lernziel "Argumentieren und *exaktes* Arbeiten" anstreben, angeführt unter "Allgemeine mathematische Fähigkeiten" in LEITNER/ BENEDIKT 1991, Seite 29-30.

[5] D.h., dass die Fehler dieser Kategorie nur dann berücksichtigt wurden, wenn sie von der LehrerIn korrigiert waren oder vom Verfasser zufällig gefunden wurden.

[6] So spricht z.B. HANISCH 1990 (Seite 22-24) von den "latenten Leistungsdimensionen" im Gegensatz zu den leichter abgrenzbaren "fachlichen und interaktiven Leistungsdimensionen". Zum "kognitiven Standardset latenter Leistungsdimensionen" zählen: "Sprachverständnis, Strukturieren können", u.a. Vor allem um das Verständnis für die mathematische Fach- bzw. Symbolsprache geht es bei den Fehlern dieser Kategorie (abgesehen von dem sicherlich zentralen Aspekt der Flüchtigkeit, der durch die Geringschätzung dieser Fehler seitens der LehrerInnen u.U. noch gefördert wird).

C.2.7 Die Unterkategorien im Überblick

Die eingerückte Darstellung der Unterkategorien deutet (unterstützt durch das Symbol "↳") auf die Reihenfolge hin, die bei der Zuordnung der Fehlerphänomene *inner*halb einer Fehler-Kategorie (Zur Bezeichnung der Hauptkategorien siehe Abschnitt C.1) einzuhalten ist.

Rf: Rf-zw Rechenfehler mit fehlenden Zwischenschritten

    ↳ Rf-p Rechenfehler beim Potenzieren

        ↳ Rf-b Rechenfehler beim Bruchrechnen

            ↳ Rf-s Sonstige

Ef: Ef-vz Vorzeichenfehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

    ↳ Ef-s Sonstige

Vf: Vf-vz Vorzeichenfehler beim Umformen von Termen mit Variablen

    ↳ Vf-bf Fehler beim Anwenden von binomischen Formeln

        ↳ Vf-kl Fehler beim Setzen oder Auflösen von Klammern

            ↳ Vf-b Fehler beim Umformen von Brüchen

                ↳ Vf-s Sonstige

Gf: Gf-vz Vorzeichenfehler beim Umformen von Gleichungen

    ↳ Gf-gs Fehler beim Lösen von Gleichungssystemen

        Gf-uvä Unvollständiges Ausführen einer Äquivalenzumformung

        ↳ Gf-s Sonstige

Of: Of-nlg Fehler beim Lösen von nicht linearen Gleichungen

    Of-d, Of-i, Of-k, Of-t, Of-v, Of-w (Unterkategorien, die sich an Stoffgebieten der Oberstufe orientieren - siehe Kapitel C.2.5)

    ↳ Of-s Sonstige

D ART DER FEHLER (mit zahlreichen Beispielen)

In diesem Abschnitt werden Fehlerphänomene und Fehlertechniken aus wichtigen Fehler-Kategorien exemplarisch vorgestellt, um ein Bild der in den Maturaarbeiten gefundenen Fehlleistungen der SchülerInnen zu skizzieren. Weiters soll damit die "trockene" Beschreibung der Fehler-Kategorien mit Leben erfüllt und die Abgrenzung der Kategorien voneinander deutlicher gemacht werden. Die Aufgabenbearbeitungen, aus denen die Fehler stammen, sind mit ihrer Kurzbezeichnung (siehe Kapitel B.2.1) angeführt.

Die Darstellung der Fehler folgt der Schreibweise der SchülerInnen. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit und der einfacheren Handhabung wurde auf eine Wiedergabe der Fehlerphänomene in handschriftlicher Form verzichtet, einige Fehlerphänomene sind nur durch eine verbale Beschreibung charakterisiert.

Zur besseren Orientierung sind manche fehlerhafte Stellen mit Hinweispfeilen versehen und/oder mit Kommentaren ergänzt.

D.1 Fehler aus Kernbereichen des Unterstufenstoffs

Diese Fehler bilden den Schwerpunkt dieser Arbeit (siehe Kapitel B.3.2). In den Kapiteln C.1.1 und C.2.1 bis C.2.4 wurde im Zuge der Beschreibung der Fehlerkategorien präzisiert, welche Kernbereiche des Unterstufenstoffs gemeint sind und warum gerade diese Bereiche ausgewählt wurden. Auch die Erklärung der verwendeten Abkürzungen findet sich in diesen Kapiteln.

Die Vorgangsweise bei der Zuordnung der Fehlerphänomene zu den Fehler-Kategorien und in weiterer Folge zu den Unterkategorien ist in den Kapiteln C.1.3 und C.2.7 dargestellt.

Die Fehlerhäufigkeiten sind in Abschnitt E ausführlich dargestellt, daher wird in diesem Kapitel nicht näher darauf eingegangen.

D.1.1 Rechenfehler

Diese Fehler-Kategorie umfasst vier Unterkategorien, die interessantesten Fehlerphänomene zeigten sich beim Bruchrechnen.

1) Rechenfehler mit fehlenden Zwischenschritten (Rf-zw)

7A2: $-\left(-\frac{64}{3} - 16 + 8\right) = 41,\dot{3}$ (Statt $29,\dot{3}$)

2) Rechenfehler beim Potenzieren (Rf-p)

4B4: $0,1^5 = 0,0001$ oder $\left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0,081$

3) Rechenfehler beim Bruchrechnen (Rf-b)

Die ersten drei Fehlerphänomene wurden aufgrund des Umfelds dieser Kategorie zugeordnet:

1A4: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{80}$ $\leftarrow$ (Der Nenner wurde falsch berechnet.)

6B1: Aus $S\left(\frac{5}{3} / -\frac{1}{3}\right)$ und $U(2 / -1)$ folgt: $\overrightarrow{SU} = \left(\frac{1}{3} / -\frac{4}{3}\right)$

(Richtig wäre: $-1-\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$) $\uparrow$

3B1: Auf den Schritt $\cos\beta = \dfrac{-1809}{-9804}$ folgt $\beta = 100{,}63°$

Der fehlerhafte Zwischenschritt ist $\cos\beta = -\,0{,}1845...$

↑ (Das Minus ist falsch.)

Dieser Schritt ist zwar nicht notiert, aber eindeutig erkennbar.[1]

2B4: $\dfrac{36 + 4x^2}{9} = 4 + \dfrac{2}{3}x^2$

↑ (Der Koeffizient wurde falsch gekürzt.)

Die folgenden Fehlerphänomene wurzeln möglicherweise in bedeutsamen Verständnisproblemen.

6B1: Bei der vollständig (aber fehlerhaft) ausgeführten Äquivalenzumformung

$$\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \qquad /\cdot 3$$

beging die SchülerIn zweimal denselben Bruchrechenfehler; es folgte:

$$4x + y = 20 - 1$$

$$\left(\text{statt } \frac{20}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

3A1: $-\dfrac{6}{3}\cdot\dfrac{8}{3} = -\dfrac{48}{3}$

8B3: $\dfrac{56}{3}\pi + \pi = \dfrac{57\pi}{3}$ (Fehler dieser Art wurden öfters gefunden.)

6A1: $\dfrac{15}{6} - \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

[1] Vergleiche den sehr ähnlichen Fehler (ebenfalls aus 3B1) in der Unterkategorie Gf-vz. Er beinhaltet denselben Rechenvorgang, aber in einem anderen Umfeld.

4A1: $-\frac{5}{4} + 2 = -\frac{3}{4}$

(Hier kommen zwei sehr unterschiedliche Fehlertechniken in Frage:

mit $-\frac{5+2}{4}$ oder $-\frac{5}{4} + \frac{8}{4}$ als Zwischenschritt.)

7A2: Ein Folgeschritt mit zwei Fehlern[2], als erste Fehlleistung hat die SchülerIn offensichtlich den Bruch $\frac{2^4}{16}$ zu null gekürzt - Zähler und Nenner waren durchgestrichen:

Auf $\left(\frac{2^4}{16} - \frac{3\cdot 4}{2} + 4\cdot 2\right)$ folgte

$(\quad - \ 3 \ + \ 8 \ )$

(Hier fehlt 1) $\uparrow$ $\uparrow$ (Falsches Ergebnis zum zweiten Bruch.)

4) Sonstige Rechenfehler (Rf-s)

In dieser Kategorie finden sich ausgesprochen triviale Fehlertechniken (mit teilweise gravierenden Folgen) neben sehr "originellen" Fehlerphänomenen (wie im ersten Beispiel).

7A2: $-15{,}93 - (-20) = 5{,}93$

1B4: "45 Fragen, er kann 30
10 nicht" (Es wurde $45 - 30 = 10$ gerechnet.)

(Zu diesem Fehler[3] siehe auch Kapitel F.3.2.)

[2] Die Fehlertechnik des zweiten Fehlers ist nicht erkennbar, u. U. könnte es sich auch um ein einziges Fehlerphänomen handeln.

[3] Dieser Fehler ist auch einer zweiten SchülerIn unterlaufen, was wohl kaum ein Zufall sein kann - als Ursache wäre z.B. möglich, dass im Unterricht eine ähnlich Aufgabe, bei der "10 nicht richtig beantwortete Fragen" korrekt war, intensiv geübt wurde. (Denkbar wäre natürlich auch ein "verunglückter" Schummelversuch.)

6B1: $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$

↑ (Das Minus fehlt) ↑

D.1.2 Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

Diese Fehler-Kategorie umfasst zwei Unterkategorien:

1) Vorzeichenfehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable (Ef-vz)

7A2: Auf $y = p\,x^2 + q\,x + r$, $P(-1/9)$ und $P \in f$ folgte:
$y = p + q + r$
↑ (Hier sollte ein Minus stehen.)

(Hier sollte ein Plus stehen.) ↓

7A2: Aus $-\frac{1\,x^3}{3}$ wurde mit $x = -4$ der Bruch $\frac{-64}{3}$

Häufig waren Fehler beim Einsetzen in x^2 wie beim folgenden Beispiel:

8B3: $\left.\left(\frac{-x^2}{4} + 3x\right)\right|_4^6 = (+9 + 18) - (+4 + 12)$

↑ ↑

(Zweimal ein falsches Plus.)

Fehlerphänomene dieser Art lassen auf Mängel im Verständnis der Potenzschreibweise schließen.

2) Sonstige Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable (Ef-s)

3B1: Auf den Schritt $e^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\beta$

folgte: $8836 = 7396 + 3249 - 2 \cdot [\,\underset{\uparrow}{7396} \cdot \underset{\uparrow}{3249} \cdot \cos\beta\,]$

(Statt a und b wurden a^2 und b^2 eingesetzt.)

(Wobei eindeutig erkennbar war, dass: $e = 94$, $a = 86$ und $b = 57$)

D.1.3 Umformungsfehler bei Termen mit Variablen

Diese Fehler-Kategorie umfasst fünf Unterkategorien. Dabei ist zu beachten, dass die beim Anwenden von binomischen Formeln, beim Setzen bzw. Auflösen von Klammern und beim Umformen von Bruchtermen häufigen Vorzeichenfehler in der ersten Unterkategorie zusammengefasst wurden.

1) Vorzeichenfehler beim Umformen von Termen mit Variablen (Vf-vz)

6A1: $-x^{-1} \cdot \ln x - x^{-1} = (-x^{-1})(\ln x \underset{\uparrow}{-} 1)$ (Das Minus ist falsch.)

6A1: $6 - (-20 + 24\ln x) = 26 \underset{\uparrow}{+} 24\ln x$ (Das Plus ist falsch.)

6A4: $-42 \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{58}{\sin\alpha} = -\dfrac{42\cos\alpha \overset{\downarrow}{+} 58}{\sin\alpha}$

2) Fehler beim Anwenden von binomischen Formeln (Vf-bf)

Die häufigsten Fehler dieser Kategorie liegen in der Bandbreite der beiden folgenden Beispiele:

8B1: $500 - x = \ldots \quad /^2$ ergab:

$250000 - x^2 = \ldots$ (Die rechte Seite der Gleichung wurde korrekt quadriert, das Quadrieren der linken Seite erfolgte grob fehlerhaft.)

8B2: $(13 + 2y)^2$ wurde zu $169 + 52y + y^2$

↑ (Koeffizient fehlt)

3) Fehler beim Setzen oder Auflösen von Klammern (Vf-kl)

Das erste Beispiel ist eher untypisch für diese Kategorie:

4A1: Im Zuge einer partiellen Integration hatte die SchülerIn den Integranden nicht als Produkt, sondern als Differenz angeschrieben. Aus dem Umfeld war erkennbar, dass es sich beim ersten Anschreiben um einen Notationsfehler der Art 2)a) gehandelt hatte (siehe Kapitel D.2.1), in der Folge hat die SchülerIn den Integranden aber als Differenz weiterbearbeitet:

Notiert war $2x - 2e^{-\frac{x}{2}}$

statt $2x(-2e^{-\frac{x}{2}})$ bzw. $2x \cdot (-2e^{-\frac{x}{2}})$

Häufiger passierten Fehler beim Ausmultiplizieren von Klammern oder beim Herausheben, beides meist in komplexerem Umfeld, wie z.B.:

↓ (29 · fehlt.)

4B3: $$\frac{29\left(x^2+1600\right)-29x^2}{\left(x^2+1600\right)\cdot\sqrt{x^2+1600}} = \frac{1600}{x^2+1600\cdot\sqrt{x^2+1600}}$$

↑ ↑

(Die fehlenden Klammern im Nenner wurden als Notationsfehler gewertet, weil die SchülerIn weitergearbeitet hat, als ob die Klammern noch da gewesen wären.)

1A1 $-2e^{-t}(t^2 + 2t + 4) + 4 = 2(-e^{-t}(t^2 + 2t + 4) + 4)$

(Hier müsste 2 stehen.) ↑

4) Fehler beim Umformen von Brüchen (Vf-b)

Die Fehler passierten meist in komplexeren Termen, wie z.B.:

6A4 Durch richtiges Substituieren kam eine SchülerIn auf den folgenden Term:

$$4200 \cdot \left(96 - \frac{\cos\alpha \cdot 40}{\sin\alpha} \right)$$

Durch nachträgliches Verlängern des Bruchstriches machte sie daraus:

$$\frac{4200 \cdot (96 - \cos\alpha \cdot 40)}{\sin\alpha}$$

5) Sonstige Fehler beim Umformen von Termen mit Variablen (Vf-s)

7B1: $1500\,x^2 + 4900 - x^2$ wurde zu 6400, wobei die SchülerIn beide x^2 durchgestrichen hat.

D.1.4 Umformungsfehler bei Gleichungen

Diese Fehler-Kategorie umfasst vier Unterkategorien. Bei auffallend vielen Fehlern haben die SchülerInnen zwei Umformungsschritte ausgeführt, ohne einen Zwischenschritt zu notieren, in den vorliegenden Fällen haben sie sich durch diese Art des "Kopfrechnens" offenbar überfordert.

1) Vorzeichenfehler beim Umformen von Gleichungen (Gf-vz)

Ein Beispiel für einen einfachen Fall:

8B2: $20 = -32\,a$ wurde zu $\frac{20}{32} = a$

$\uparrow$ (Das Minus fehlt.)

Beispiele mit Umformungschritten im Kopf:

5C3: Aus $16 + 64\,t + 6 + t - 36 + 16\,t = -95$ wurde

$81\,t = 81$

$\uparrow$ (Das Minus fehlt.)

3B1: Auf den Schritt $-1809 = -9804 \cos\beta$ folgte $\beta = 100{,}63°$

Der fehlerhafte Zwischenschritt ist $\cos\beta = -0{,}1845...$

↑ (Das Minus ist falsch.)

Dieser Schritt ist zwar nicht notiert, aber eindeutig erkennbar.[4]

Additive bzw. subtraktive Äquivalenzumformungen in Verbindung mit einem Seitentausch bzw. einem generellen Vorzeichenwechsel führten häufig zu Fehlern:

6B1: Auf $-10 = -28x + 44y$ folgte

$44y = 28x + 10$

↑ (Das Plus ist falsch.)

7A2: $8a + 2c + 4 = 0$ wurde wie folgt umgeformt:

$-8a - 2c = -4$

↑ (Das Minus ist falsch.)

Diese Umformung ist nur aus dem Kontext und den Feinheiten des handschriftlichen Originals heraus verständlich:

Die SchülerIn hat zuerst auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 4 korrekt abgezogen und dann die Gleichung mit (-1) multipliziert[5] (d.h. sie hat zu $8a$ das Minus dazugeschrieben und das Plus vor $2c$ auf ein Minus ausgebessert[6]). Auf das Ändern des Vorzeichens von -4 auf der rechten Seite der Gleichung hat sie dabei vergessen.

Auch Fehler wie der folgende wurden dieser Kategorie zugeordnet:

6B4:

$$\begin{array}{rcl} 5 &=& -4b - 2c - d \\ -2 &=& b + c + d \\ \hline 3 &=& 3b + c \end{array}$$

(Zumindest ein Vorzeichen ist falsch.)

[4] Vergleiche den sehr ähnlichen Fehler (ebenfalls aus 3B1) in der Unterkategorie Rf-b. Er beinhaltet denselben Rechenvorgang, aber in einem anderen Umfeld.

[5] Um diese Gleichung (als Teil eines Gleichungssystems) dann im Folgenden zur zweiten Gleichung $24a + 2c = 0$ zu addieren.

[6] Eine an sich schon fehleranfällige Vorgangsweise, weil ein Plus, das auf ein Minus korrigiert wurde, oft noch wie ein schlecht geschriebenes Plus ausschaut.

2) Unvollständiges Ausführen einer Äquivalenzumformung (Gf-uvä)

Fehlerphänomene dieser Kategorie wurden des Öfteren in der einfachsten Form (wie im ersten Beispiel), aber auch mit deutlich komplexerem Kontext (wie im zweiten Beispiel) angetroffen.

8B2: $2x + y = 1 \quad / \cdot 2$ wurde zu

$2x + 2y = 2$

↑ (2 x wurde nicht mit 2 multipliziert.)

2A2: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \quad / : \cos\beta$ wurde zu

$$\frac{e^2}{\cos\beta} = a^2 + b^2 - 2ab$$

↑ ↑

(Diese beiden Summanden wurden nicht durch cos β dividiert.)

Zwei Fehler unterliefen der SchülerIn im folgenden Beispiel:

7B1: Auf $1200\sqrt{x^2 + 4900} = 1500x \quad /\,^2$ folgte:

$1440000x^2 - 7056000000 = 2250000x$

↑ ↑ (Der Exponent 2 fehlt.)

↑ (Das Minus ist falsch.)

(Dieses "rätselhafte" Fehlerphänomen wurde der Kategorie Vf-s zugeordnet.)

Manchmal führten die SchülerInnen weitere Folgeschritte aus, ohne das Ergebnis der (unvollständigen) Äquivalenzumformung zu notieren. In Fällen wie den beiden folgenden ist die Fehlertechnik so gut erkennbar, dass das Fehlerphänomen dieser Unterkategorie zugeordnet werden kann:

8B1: $14400 + x^2 = \frac{25x^2}{4}$

$57600 = 24x^2$

(Der erste Schritt "/ · 4" wurde auf x^2 nicht angewendet; dann folgte korrekt der Schritt "/ – x^2")

7A2: $0 = -4p - 2q$
$9 = p - q \qquad / \cdot (-2)$

$9 = -6p$
↑ (Hier müsste -18 stehen.)

3) Fehler beim Lösen von Gleichungssystemen (Gf-gs)

Im Wesentlichen waren das Fehler beim Addieren zweier Gleichungen mit dem Ziel, eine Variable zu eliminieren. Sie wurden aufgrund der Fehlertechnik häufig den Unterkategorien Gf-vz oder Gf-uvä zugeordnet, bei nicht eindeutiger Fehlertechnik oder in Fällen wie dem folgenden war dies nicht möglich:

3A1: $-24a - 2b = 0$
$4ax + 2b = -4$

$-20ax = -4$
(Das Addieren von a und ax zeigt, dass der Wunsch nach einem Ergebnis für diese SchülerIn offenbar stärker war als die Regeln der elementaren Algebra.)

Einen Fehler beim Substituieren zeigt das folgende Beispiel:

7A2: Aus $8a + 2c + 12 = 0$ und $c = -12a + 8$
machte die SchülerIn: $8a - 12a + 20 = 0$
(Der Koeffizient von c ist bei dem im Kopf ausgeführten Einsetzen "auf der Strecke geblieben".)

4) Sonstige Fehler beim Umformen von Gleichungen (Gf-s)

Der bei SchülerInnen der 8. Schulstufe häufige "additive Gleichungsfehler"[7] tauchte in keiner einzigen Maturaarbeit auf.

z.B.: $3x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2 \qquad (/-3 \quad \text{statt} \quad /:3)$

Fehlertechniken wie bei den drei folgenden Beispielen waren eher selten:

[7] Vergleiche TREMSCHNIG 1995, Seite 147.

7A2: $2 = 8a \rightarrow a = 4$ (8 **:** 2 statt 2 **:** 8 gerechnet.)

6B4: $-1 = 1 + b + c + d \rightarrow 0 = b + c + d$

(Auf der rechten Seite "– 1" statt "+ 1" gerechnet.)[8]

8B3: $\frac{1}{b^2} = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5 = b^2$

Häufiger fanden sich fehlerhafte Umformungen, bei denen die SchülerInnen Umformungsschritte im Kopf ausführten; meist waren es zwei Umformungsschritte, wobei das Ergebnis des ersten Schrittes nicht notiert wurde - dann kam es entweder bei einem der beiden Schritte zu einem Fehler (vergleiche die entsprechenden Fehler aus den obigen drei Unterkategorien) oder die beiden Schritte wurde auf unzulässige Weise "vermischt", wie z.B. im folgenden Beispiel:

6B2: $e^2 = a^2 + b^2 - a\,b\cos\beta$ $\quad / + a\,b\cos\beta$

$\mathbf{:}\ e^2$ wurde[9] zu

$$a\,b\cos\beta = \frac{a^2 + b^2}{e^2}$$

(Die beiden Umformungsschritte führten zu einer fehlerhaften linken Seite der Gleichung - wären sie richtig ausgeführt worden, hätte die SchülerIn vielleicht erkannt, dass sie nicht zielführend sind.)

Auch fehlerhafte Umformungen mit unklarer Fehlertechnik (teils weil es zwei naheliegende Möglichkeiten gab) wurden dieser Kategorie zugeordnet, z.B.:

3B2: $0 = -a + b - 1 + \frac{2}{3} \rightarrow -\frac{1}{3} = -a + b$

↑ (Das falsche Minus kann die Folge einer fehlerhafte Gleichungsumformung oder eines Rechenfehlers sein.)[10]

---

[8] Diese SchülerIn hat den unglücklich gewählten Begriff "rüberbringen" bzw. "auf die andere Seite bringen" wörtlich genommen ("– 1" auf die andere Seite gebracht ergibt dann 1 – 1 = 0).

[9] Der falsch angeschriebene Kosinussatz wurde als Of-t-Fehler gezählt.

[10] Aufgrund des in den Kapiteln C.1.1 und C.1.3 beschriebenen Ablaufschemas wurde das Fehlerphänomen der Kategorie Gf-s zugeordnet.

D.2 Fehler aus weiteren Kategorien

Wie im Abschnitt D.1 soll durch exemplarisches Vorstellen bzw. näheres Beschreiben ein Bild des gefundenen Fehlerspektrums vermittelt werden. Da die Fehlerhäufigkeiten der in diesem Abschnitt besprochenen Kategorien im Abschnitt E nur teilweise (differenziert) dargestellt sind, werden sie hier ausführlicher behandelt.

D.2.1 Einige Oberstufen-Fehler

In diesem Kapitel werden Oberstufen-Fehler, die durch ihre Häufigkeit auffielen, kurz angesprochen.

Aus Of-v:

Rechnen mit einem Vektor, der in die falsche Richtung (bezogen auf die zum Rechengang passende Richtung) weist:

a) Normal auf die passende Richtung.

Ein sehr häufiger Fehler - z.B. 14-mal in 9 Aufgabenbearbeitungen einer Aufgabe (6B1 mit 21 SchülerInnen).

b) Zur passenden Richtung entgegengesetzt gerichtet.

Dieses Fehlerphänomen kam weniger oft[1], dafür aber bei einzelnen SchülerInnen mehrmals (z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 5C3 bis zu viermal) vor.

Beide Fehlerphänomene deuten darauf hin, dass die SchülerInnen beim Rechnen nicht (korrekt) "geometrisch mitdenken".[2]

---

[1] Dabei ist die unterschiedliche Verteilung der entsprechenden fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale in den Aufgaben zur Vektorrechung zu berücksichtigen.

[2] Gerade die Möglichkeit, zwischen zwei "Parallelwelten" - der Zeichnung (wenn möglich im Kopf!) und der Rechnung - hin und her wechseln zu können, erscheint dem Verfasser als ein wichtiger Aspekt der Vektorrechnung - im Lehrplan wird auf das "Denken in geometrischen Vorstellungen" hingewiesen (LEITNER/BENEDIKT 1991, Seite 59).

Aus Of-w:

a) Fehlerhaftes Verwenden von Tabellen (zur Normalverteilung).

b) Fehlerhaftes Anwenden der Gegenereignisregel.

Beide Fehlerarten traten bei mehreren SchülerInnen auf (bei diesen dann meistens mehrfach, z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 6A2).

Aus Of-s:

a) Fehler beim Umformen von Termen, wozu Wissen über den Umgang mit negativen oder gebrochenen Exponenten notwendig ist (z.B. beim Differenzieren von Funktionen mit Wurzeltermen nach der Quotientenregel in 7B1).

b) Fehler beim Ermitteln von Grenzwerten, z.B. aus 6A1:

$$\frac{10}{\infty} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{-\infty}{0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{20}{\infty} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{20}{0} = 0$$

D.2.2 Notations- bzw. Formalfehler

Diese Fehlerkategorie wurde nicht in Unterkategorien eingeteilt, auch auf eine Differenzierung nach Unterstufen- bzw. Oberstufenstoff wurde verzichtet (siehe Kapitel C.1.2 und C.2.6). Im Folgenden werden die (nicht nur vereinzelt) gefundenen Arten von Fehlerphänomenen exemplarisch aufgezählt.

1) Fehlende Klammern (als mathematischer "Rechtschreibfehler")

Fehler dieser Art wurden häufig gefunden, des Öfteren waren sie nicht korrigiert.

a) $2 \cdot -3$ statt $2 \cdot (-3)$.

b) Das Integral eines Polynoms wird angeschrieben, ohne den Integranden einzuklammern.

2) Sonstige fehlende Klammern

Im Gegensatz zu 1) führt das Weglassen der Klammern in diesen Fällen zu einer anderen Bedeutung des Ausdrucks.[3] Fehler der Arten 2b) und c) wurden häufig gefunden.

a) $2\ -3$ statt $2 \cdot (-3)$.

Dieser Fehler ist dem aus 1)a) sehr ähnlich, das zusätzliche Weglassen des Malpunktes verändert den Term aber entscheidend.[4]

b) -3^2 statt $(-3)^2$ oder z.B.:

3C2: In diesem Beispiel war zu überprüfen, ob sich nach dem Einsetzen in eine Gleichung eine wahre Aussage ergibt. Die beiden letzten Zeilen (beide von der Lehrerin mit ✓ versehen!) der SchülerIn lauteten:

$$\left(-\frac{65}{8}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{65}{8}\right)^2$$

$$-8{,}125^2 = 8{,}125^2 \qquad \text{w. A.}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ (Fehlende Klammern)

c) Fehlende Klammern um Teile eines Terms, z.B.:

1B2: $\sin \gamma - \rho$ statt $\sin(\gamma - \rho)$

3B2: $-2x^3 + x^2 + 6x : (x-2)$ statt $(-2x^3 + x^2 + 6x) : (x-2)$

8B3: $\pi \cdot 6{,}\dot{6} - (-6{,}\dot{6}) = 13{,}\dot{3}\ \pi$ statt $\pi \cdot (\ 6{,}\dot{6} - (-6{,}\dot{6})\ ) = 13{,}\dot{3}\ \pi$

[3] Wenn eine SchülerIn mit der so veränderten (und damit fehlerhaften) Bedeutung weitergearbeitet hat, dann wurde das Fehlerphänomen der Unterkategorie Vf-kl zugeordnet.

[4] Vergleiche den Fehler aus 4A1 in der Unterkategorie Vf-kl.

Nicht gesetzte Klammern um Summen (bzw. Differenzen), die als Faktoren in einem Term stehen (wie im Beispiel aus 8B3), waren bei Fehlern dieser Art am häufigsten.

3) Das nicht Anschreiben sonstiger Zeichen

Die Arten a) bis d) wurden häufig gefunden - bei manchen SchülerInnen kam ein solches Fehlerphänomen bis zu sieben Mal in einer Aufgabenbearbeitung vor.

a) Das Weglassen von "dx" bei einer Integralberechnung

b) Das "Vergessen" des Vektorpfeils über den Buchstaben AB (Der Pfeil ist notwendig, um den Vektor von A nach B von der Strecke mit den Endpunkten A und B zu unterscheiden).

c) Das Weglassen des "lim"-Symbols beim Berechnen von Grenzwerten.

d) Das Anschreiben von Winkeln im Gradmaß ohne ° (z.B. 5 statt 5°).

Andere Fehler dieser Art waren seltener und sind hier (mit Ausnahme des folgenden Beispiels) nicht explizit angeführt.

8B2: Der Punkt (2 / 12) wurde in die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M (0 / 1) eingesetzt und Folgendes notiert:

$$\begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & - & \\ 12 & & 1 \end{bmatrix} = r^2$$

(Vektorklammern fehlen) ↑ und ↑

↑ (Exponent "2" fehlt)

4) Das Anschreiben falscher Zeichen

Aus dem relativ breiten Spektrum dieser (nicht besonders häufigen) Fehler seien z.B. folgende angeführt:

a) f' statt f''

b) Das Anschreiben des Integralzeichens nach dem Integrieren (nunmehr vor der Stammfunktion des ursprünglichen Integranden).

5) Formalfehler

a) Falsche Verwendung des Gleichheitszeichens,[5] z.B.: $10 + 2 = 12 + 2 = 14$

Fehler dieser Art wurden in mehreren Aufgabenbearbeitungen bei jeweils mehreren SchülerInnen gefunden, blieben aber teilweise unkorrigiert und praktisch immer folgenlos (d.h. ohne Punkteabzug). Auffallend war, dass dieser Fehler bei den betreffenden SchülerInnen meistens mehrfach vorkam.

Des Öfteren war auch folgender Gang zu finden:

$$f''(x) = \ldots = f''(2)$$

In einigen Aufgaben der Vektorrechnung verwendeten SchülerInnen das Zeichen "=" statt des Zeichens "||" für parallel, z. B. so: $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

[5] HANISCH 1990 (Seite 180) weist darauf hin, dass man eine solche "Rechenmethode" in Volksschullehrbüchern finden kann. Zur Bewertung solcher Fehler merkt HANISCH an: "Bei formalen Fehlern fehlt hingegen noch weitgehend der Konsens. Meines Erachtens sollten formale Fehler von Klassenstufe zu Klassenstufe strenger bewertet werden. In einer ersten Klasse könnte man das = -Zeichen durch den Folgepfeil ⇒ ersetzen und nicht weiter ahnden. Verbessert sollte es dann werden. In einer 8. Klasse dürfte dies nicht mehr vorkommen." Der Konjunktiv ist angesichts der untersuchten Maturaaufgaben mehr als berechtigt.

b) Nichtanschreiben einer Seite einer Gleichung.

Fehler dieser Art traten vor allem bei Geradengleichungen in Aufgaben zur Vektorrechnung häufig auf, meist mit hoher Konsistenz (z.B. drei- bis achtmal in einer Aufgabenbearbeitung), z.B.:

$$\text{g:}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{statt} \quad \text{g:}\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Formalfehler aus anderen Bereichen (Symbole der Mengenlehre; übliche Notation einer (Wahrscheinlichkeits-)Funktion bzw. einer -Verteilung) wurden in verschiedenen Ausprägungen gefunden, waren aber deutlich seltener als die bisher angeführten Fehlerphänomene.

D.2.3 Sonstige Unterstufen-Fehler

Im Folgenden sind Fehlerphänomene angeführt, deren Fehlertechnik mit großer Wahrscheinlichkeit auf Defizite im Unterstufenstoff zurückzuführen sind (vergleiche die Kapitel C.1.1 bis C.1.3). In die Auflistung wurden nicht nur häufigere Fehlerphänomene, sondern auch interessante Einzelfehler aufgenommen, um die Bandbreite der gefundenen Fehler zu zeigen.

Fehlerhafte Übersetzung des Angabetextes in eine Skizze.

Ein häufiges Fehlerphänomen in sehr unterschiedlichen Ausprägungen - insbesondere in Aufgabenbearbeitungen zu 8B1, aber auch zu 2A2, 6B2, 6A4 und 7B1; in den beiden letzten Aufgaben hatten z.B. drei SchülerInnen Schwierigkeiten mit den im Angabetext vorkommenden Himmelsrichtungen. Neun SchülerInnen (aus verschiedenen Klassen) zeichneten eine geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten, obwohl im Angabetext eine rechtwinkelige Verbindung über einen dritten Punkt verlangt war (oder umgekehrt).

Sonstige fehlerhafte Übersetzungen des Angabetextes.

Ebenfalls ein häufiges Fehlerphänomen in sehr unterschiedlichen Ausprägungen - insbesondere in Aufgabenbearbeitungen zu 8B1 (hier verwendeten z.B. fünf SchülerInnen den Ansatz "Zeit = Geschwindigkeit mal Weg"), weiters in Aufgabenbearbeitungen zu 1A4, 6A4 und 6B1.

Fehlerhaft formulierte Antwortsätze.

Dabei geht es meistens um eine falsche Interpretation des Angabetextes (siehe Anhang) bzw. des darin Gefragten, z.B.:

3B1: Der Rechengang der SchülerIn entspricht dem Gang zur Berechnung der Zinsen und ist richtig; im Antwortsatz nennt sie den errechneten Betrag aber als Restschuld.

6B2: "1,5 Millionen stehen zur Verfügung. (Bleiben 244 252,- übrig.)"

(Statt z.B.: Der angebotene Verkaufspreis liegt um 244 252,- unter dem ortsüblichen Preis.)

Aber auch unsinnige Antworten kommen vor, z.B.:

8B1: "Seine Bestzeit ist 4,9 h."
(Fast 5 Stunden [!] für rund 100 m Schwimmen und 500 m Laufen!)

Fehler beim Lösen von Ungleichungen.

Meistens geht es dabei um die Multiplikation bzw. Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, wobei die SchülerIn das Ungleichheitszeichen nicht umdreht, z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 4B4.

Fehler beim Ablesen von Koeffizienten

Diese Fertigkeit war nur an wenigen Stellen der untersuchten Aufgabenbearbeitungen verlangt, in allen gefundenen Fehlleistungen wurden negative Koeffizienten mit falschem Vorzeichen abgelesen, (in Aufgabenbearbeitungen zu 4A1).

Fehlerhafte Anwendungen des Satzes von Pythagoras

Z. B. in Aufgabenbearbeitungen zu 8B1.

Falsche Annahmen über ein allgemeines Viereck.

Einige der gefundenen fehlerhaften Annahmen der SchülerInnen sind im Folgenden angeführt:

1B2: Die Diagonalen stehen aufeinander normal.

3B1 und 6B2: Flächenformel des Trapezes anwendbar.

6B2: $A = e \cdot f$ oder $A = (e \cdot f)/2$ als Flächenformel.

Falsche Annahmen über ein allgemeines Dreieck.

Einige der gefundenen fehlerhaften Annahmen der SchülerInnen sind im Folgenden angeführt:

3C2: Die Winkelsymmetrale geht durch den Halbierungspunkt der dem Winkel gegenüberliegenden Seite.

6B1: Die Eulersche Gerade geht durch den Inkreismittelpunkt.

Der Umkreismittelpunkt ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Höhen.

6B2: "Seite mal Seite durch 2" als Flächenformel verwendbar.

8B2: Der Umkreis geht durch die Seitenhalbierungspunkte.

Fehlerhafte Berechnungen an geometrischen Körpern.

5C3: $V = a \cdot b$ als Volumsformel für ein quadratisches Prisma verwendet.

Falsche Skizzenbezeichnungen

Z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 3B1.

Fehler beim Gebrauch von Einheiten.

6B2: Umfang in m² angegeben.

8B3: Volumen in cm² angegeben.

Fehler beim Prozentrechnen bzw. bei Zinsenrechnungen

7B2: Die Länge eines Wegstücks, das um 60% größer (als 9,3m) sein soll, wurde von einer SchülerIn so berechnet: 9,3 + 60% = 9,3 + 0,6 = 9,9

3B1: Zinssatz als p.m. (statt p.a.) interpretiert.

Steigungsangabe in % falsch interpretiert.[6]

Z.B. in einer Aufgabenbearbeitungen zu 3A3.

Rechnen mit zu stark gerundeten Zahlen.[7]

Wobei in vielen Fällen nicht gerundet wurde: Die SchülerInnen haben ein Ergebnis vom Taschenrechner abgelesen und dabei die Nachkommastellen ignoriert (und zu wenige Stellen berücksichtigt).

Z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 7B2 bei 4 SchülerInnen (mit deutlichen Punkteabzügen).

Gleichheitsnachweis mit gerundeten Zahlen.

3C2: In diesem Beispiel war zu überprüfen, ob sich nach dem Einsetzen in eine Gleichung eine wahre Aussage ergibt. Eine SchülerIn ging dabei so vor:

[6] Zum Problem der Steigung als tan φ oder sin φ siehe REICHEL 1999b, Seite 51.

[7] Zur Problematik der Rundungsfehler siehe B.3.3.1 1).

Mit M (1,125 / 2) und r = 8,125

stellte sie folgende Kreisgleichung auf:

$$\left(x - \frac{9}{8}\right)^2 + (y - 2)^2 = 66$$

↑ (Statt 66,015625)

Dann setzte die SchülerIn den Punkt S (9 / 4)

in die Kreisgleichung ein und notierte:

$$\left(9 - \frac{9}{8}\right)^2 + (4 - 2)^2 = 66$$

$$66 = 66$$

(Dabei hat sie auch auf der linken Seite die Dezimalen weggelassen.)

Fehler dieser Art kamen mehrmals vor.

D.2.4 Sonstige Fehler

In dieser Kategorie wurden alle Fehlerphänomene zusammengefasst, die keiner anderen Kategorie zugeordnet werden konnten (vergleiche die Kapitel C.1.2 und C.1.3), z.B.:

Fehler beim Suchen eines brauchbaren Ansatzes.

(Sofern diese Fehler nicht überwiegend dem Stoff der Unterstufe oder der Oberstufe zuzuordnen sind.)

Z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 1B2 und 7B2 (öfters).

Nicht zum Angabetext passendes Auf- bzw. Abrunden.

Die Frage, ob (und auf welche Stelle) ein Ergebnis auf- oder abgerundet werden muss, hat zwar einen ausgeprägten Bezug zum Unterstufenstoff, aufgrund des bedeutenden Oberstufenkontexts wurden solche Fehlerphänomene aber dieser Fehler-Kategorie zugeordnet.

Z.B. (öfters) in Aufgabenbearbeitungen zu 7B4.

Fehlerhaftes Annehmen eines rechten Winkels.

(Wenn aus dem Kontext bzw. aufgrund fehlender Zwischenschritte nicht zu entscheiden ist, ob es sich um Defizite aus dem Bereich der Unterstufen-Geometrie oder um eine falsche Anwendung einer Formel aus dem Stoff der Oberstufe [z. B. Trigonometrie] handelt.)

Z.B. in Aufgabenbearbeitungen zu 1B2 und 3B1.

Fehler in Ungleichungen mit Logarithmen

(Sofern diese Fehler nicht überwiegend dem Stoff der Unterstufe oder der Oberstufe zuzuordnen sind.)

4B4: Nach $n \cdot \ln 0{,}1 < \ln 0{,}01$ folgt $n < 2$ (statt $n > 2$)

Fehler mit begründetem Verdacht auf Absicht.

D.h., wenn aus dem Kontext der begründete Verdacht abzuleiten ist, dass die SchülerIn absichtlich ein (bezogen auf den vorhergehenden Schritt) falsches Ergebnis hingeschrieben hat.[8]

Z.B. wissen viele SchülerInnen, dass bei der Berechnung eines Flächeninhalts mit Hilfe eines bestimmten Integrals eine positive Zahl herauskommen "muss".[9] Es kann daher sein, dass die SchülerIn beim folgenden Beispiel aus diesem Grund "falsch gerechnet" hat:

6A1: $A = \ldots$ Berechnung des bestimmten Integrals $\ldots = 4 - 20 = 16$
(statt -16)

[8] Diese Fehlerbeschreibung zeigt, wie wichtig es ist, den Kontext eines Fehlers und seine möglichen Ursachen im Auge zu behalten. Sie weicht vom im Kapitel B.3.1 II) dargelegten Prinzip dieser Untersuchung ab - diese Ausnahme erschien im konkreten Fall aber als gerechtfertigt.

[9] Dass dies nur unter bestimmten Bedingungen so ist, dürfte viel weniger SchülerInnen klar sein. (Eine weitere Möglichkeit wäre, dass die SchülerIn es nicht für notwendig befand, einen Zwischenschritt mit der Berechnung des Absolutbetrages zu notieren.)

Fehlerphänomene mit nicht notierten Zwischenschritten.

Gemeint sind Fehlerphänomene, bei denen eine Regel oder Formel aus dem Oberstufenstoff angewendet und ohne die Angabe von Zwischenschritten das daraus berechnete fehlerhafte Ergebnis notiert wurde. In diesen Fällen war mindestens eine der folgenden Fehlertechniken möglich (aber nicht eindeutig zu erkennen):

- Verwendung einer falsch formulierten oder unpassenden Regel bzw. Formel.
- Fehlerhafter erster Anwendungsschritt einer richtigen bzw. passenden Regel bzw. Formel (z.B. Einsetzen in die Formel).
- Fehler in der weiteren Rechnung mit dieser Regel bzw. Formel (was in vielen Fällen dem Unterstufenstoff zuzuordnen wäre).

Insbesondere bei Aufgaben zur Vektorrechnung waren solche Fehlerphänomene häufig:

a) Beim Aufstellen eines Vektors aus zwei Punkten.

b) Beim Berechnen der Länge eines Vektors.

c) Beim Berechnen des skalaren (und auch vektoriellen) Produkts zweier Vektoren.

Fehlerphänomene mit nicht identifizierbarer Fehlertechnik.

In diesen seltenen Fällen war (meist aufgrund einer chaotischen oder [teilweise] unleserlichen äußeren Form der Arbeit) weder erkennbar, wie die SchülerIn zum fehlerhaft notierten Schritt gelangt war, noch konnte aus dem Umfeld des Fehlerphänomens geschlossen werden, ob es dem Stoff der Unter- oder Oberstufe zugeordnet werden kann.

E HÄUFIGKEIT DER FEHLER

Im Abschnitt E.1 werden die Fehlerhäufigkeiten[1] pro Fehlerkategorie[2] und Aufgabenbearbeitung[3] dargestellt, Abschnitt E.2 zeigt einige Ergebnisse im Detail.

Eindringlich muss davor gewarnt werden, aus den Fehlerhäufigkeiten voreilige Schlüsse zu ziehen[4] - aus dem Vorkommen bestimmter Fehler kann man schließen, dass es zur betreffenden Aufgabe Lösungswege mit Schwierigkeitsmerkmalen gibt, die solche Fehler auslösen können. Über die Fehler*ursachen*, wie z.B. Flüchtigkeit, einzelne Wissensdefizite oder tiefergehende Probleme im mathematischen Verständnis der SchülerInnen ist damit noch nichts gesagt.

Eine geringe Fehlerzahl kann z.B. zurückzuführen sein

- auf das Fehlen größerer Teile der Aufgabenbearbeitung;[5]
- auf kognitive Stilvariable der SchülerInnen (wie z.B. Impulsivität) oder auf emotionale Faktoren (z.B. Angst, Fehler zu machen);
- auf eine geringe Zahl von fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmalen in der betreffenden Aufgabe;
- auf eine gute (oder zumindest gezielte) Vorbereitung der SchülerInnen;
- (hoffentlich nicht zuletzt) auf ein hohes Ausmaß mathematischen Wissens und Könnens der SchülerInnen.

Im Abschnitt E.3 wird auf die Problematik der individuellen Fehlerhäufigkeiten (Fehlerzahlen pro SchülerIn) eingegangen.

---

[1] Genauer: Die Häufigkeit der Einzelfehler (siehe Kapitel A.1.2.8 und B.3.6).

[2] Teilweise differenziert in Unterkategorien (siehe Abschnitt C).

[3] Zu diesem Begriff sowie zur näheren Beschreibung der Aufgaben(typen) und den dabei verwendeten Abkürzungen siehe Abschnitt B.2.

[4] Vergleiche die Kapitel A.1.2.4, A.1.2.5 und B.2.2

[5] Aus welchen Gründen auch immer (z.B. Zeitmangel oder Nichtverstehen des Angabetextes).

E.1 Die Fehlerhäufigkeiten im Überblick

In den folgenden Tabellen E1 bis E7 (und zusammengefasst in Tabelle E8) sind die Fehlerhäufigkeiten bei den sieben untersuchten Aufgabentypen dargestellt.

Die ersten Zeilen der Tabellen E1 bis E7 geben einen Überblick über die Anzahl der Aufgabenbearbeitungen und ermöglichen eine grobe Abschätzung der jeweiligen Lösungshäufigkeiten:

- Zeile "Aufg.-bearb.": Kurzbezeichnung der Aufgaben (siehe Kapitel B.2.1).
- Zeile "gesamt": Gesamtzahl der untersuchten Aufgabenbearbeitungen pro Aufgabe.
- Zeile "vollst. richtig": Anzahl der vollständig richtigen Aufgabenbearbeitungen.[1]
- Zeile "mit Fehlern": Anzahl der Aufgabenbearbeitungen, in denen Fehler gefunden wurden; diese Anzahl zeigt, wie viele MaturantInnen beim Bearbeiten dieser Aufgabe Fehler[2] gemacht haben.
- Zeile "unvollst. o. F.": Anzahl der fehlerfreien, aber unvollständigen Aufgabenbearbeitungen.[3]

Die Zahlen in den beiden letztgenannten Zeilen sind mit großer Vorsicht zu interpretieren: Eine fehlerhafte Arbeit kann einen "leichten" oder viele "schwere" Fehler enthalten; eine Aufgabenbearbeitung kann schon aufgrund der nicht vorhandenen Volumseinheit bei einem Ergebnis unvollständig sein - sie kann aber auch zur Gänze fehlen.

---

[1] Notationsfehler (der Fehler-Kategorie Nf, siehe Kapitel C.2.6 und D.2.2) sind dabei nicht berücksichtigt!

[2] Entsprechend den im Abschnitt B.3 festgelegten Auswahlkriterien für Fehler.

[3] Fehlerfrei wieder im Sinne obiger Fußnote. Als unvollständig wird eine Aufgabenbearbeitung dann bezeichnet, wenn sie mit weniger als der maximal möglichen Punktezahl beurteilt wurde.

In den weiteren Zeilen der Tabellen E1 bis E7 sind die Fehlerzahlen pro Fehler-Kategorie aufgelistet[4]: In den ersten Spalten zu den einzelnen Aufgaben, in der Spalte "Summe" dann aufsummiert über alle untersuchten Arbeiten des betreffenden Aufgabentyps.

Die in der ersten Spalte verwendeten Abkürzungen der Fehler-Kategorien sind hier nochmals zusammengestellt:

Kategorie Gf — Fehler beim Umformen von Gleichungen

Kategorie Vf — Fehler beim Umformen von Termen mit Variablen

Kategorie Rf — Rechenfehler

Kategorie Ef — Fehler beim Einsetzen von Zahlen in Variable

Kategorie Bf — Fehler beim Berechnen des Werts eines Terms

Kategorie sUf — Sonstige Unterstufen-Fehler

Kategorie Of — Oberstufen-Fehler - mit folgenden Unterkategorien:

- Of-t Fehler aus dem Stoffgebiet Trigonometrie
- Of-w Fehler aus dem Stoffgebiet Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Of-v Fehler aus dem Stoffgebiet Vektorrechnung
- Of-d Fehler beim Differenzieren und Diskutieren von Kurven
- Of-i Fehler beim Integrieren und Anwenden der Integralrechnung
- Of-k Fehler aus dem Stoffgebiet Kegelschnitte
- Of-nlg Fehler beim Lösen von nicht linearen Gleichungen
- Of-s Sonstige Oberstufen-Fehler

Kategorie Üf — Übertragungsfehler

Kategorie sf — Sonstige Fehler

[4] In jeder Tabelle (E1 bis E7) stehen alle (Haupt-)Kategorien zu Fehlern des Unterstufenstoffs, auch wenn beim jeweiligen Aufgabentyp kein Fehler einer solchen Kategorie gemacht wurde; zum Oberstufenstoff gehörige Unterkategorien sind (aus Platzgründen) nur angeführt, wenn dazu Fehler gefunden wurden.

Pro Aufgabentyp wurde eine unterschiedliche Zahl von Arbeiten untersucht. Um den Stellenwert der gefundenen Fehlerhäufigkeiten des jeweiligen Aufgabentyps besser abschätzen zu können, wurde den Tabellen E1 bis E7 noch zwei Spalten und zwei Zeilen angefügt:

In den beiden rechten *Spalten* ist die mittlere Anzahl der Fehler pro Aufgabenbearbeitung und *Fehler-Kategorie* angegeben - zuerst bezogen auf die Anzahl aller Arbeiten (Spalte "pro Aufg.-bearb."), dann bezogen auf die Anzahl jener Arbeiten, in denen die SchülerInnen Fehler gemacht haben (Spalte "pro A.-b. mit Fehlern").

Analog ist in den beiden untersten *Zeilen* der Tabellen E1 bis E7 die mittlere Anzahl der Fehler pro Aufgabenbearbeitung und *Aufgabe* angegeben.

Ein Vergleich dieser mittleren Fehlerhäufigkeiten ist allerdings nur sehr eingeschränkt sinnvoll und darf nicht zu voreiligen Schlüssen führen.[5]

In der Tabelle E8 sind die Tabellen E1 bis E7 zusammengefasst (zur Kurzbezeichnung der Aufgabentypen siehe Tabelle B2 am Beginn des Abschnitts B.2). In den Zeilen der Tabelle E8 stehen die Fehlerhäufigkeiten in den einzelnen Fehlerkategorien, in den Spalten der Tabelle E8 die Fehlerhäufigkeiten zu den sieben untersuchten Aufgabentypen. Bis auf die folgende Besonderheit entspricht der sonstige Aufbau der Tabelle E8 dem der Tabellen E1 bis E7:

In den Zeilen "U ges." bzw. "O ges." ist die Anzahl aller Unterstufen- bzw. Oberstufen-Fehler aufsummiert, in der Zeile "Gesamt" wird aufgelistet, wieviele Fehler pro Aufgabentyp und wieviele insgesamt (in allen untersuchten Arbeiten) gemacht wurden.

In Tabelle E9 ist die Anzahl der Fehler in den *Unter*kategorien zu Kernbereichen des Unterstufenstoffs dargestellt, sie ist wie Tabelle E8 aufgebaut (zu den verwendeten Abkürzungen siehe Kapitel C.2.7).

[5] Fehlerhäufigkeiten können z.B. aufgrund unterschiedlicher Leistungsniveaus der einzelnen Klassen und/oder aufgrund der unterschiedlichen Schwierigkeit der Aufgaben differieren (Vergleiche Kapitel A.1.2.5).

Tabelle E1 Fehlerhäufigkeiten in Aufgaben zur Trigonometrie

Anzahl der Aufg.-bearb.	Kurzbezeichnung der Aufgaben 7B2	6B2	3A3	3B1	2A2	1B2	Summe	in %	
gesamt	27	21	21	16	17	13	115	100%	
vollst. richtig	14	5	12	4	11	7	53	46%	
mit Fehlern	8	11	8	12	4	6	49	43%	
unvollst. o. F.	5	5	1		2		13	11%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben						Summe	pro Aufg.-bearb.	pro A.-b. mit Fehlern
Gf		2		1	1		4	0,03	0,08
Vf									
Rf		1		1			2	0,02	0,04
Ef				2		1	3	0,03	0,06
Bf		3	2	2		1	8	0,07	0,16
sUf	6	6	1	4	2	1	20	0,17	0,41
Of-t		11	4	6	1	1	23	0,20	0,47
Of-nlg		1					1	0,01	0,02
Üf		1	1	2	1		5	0,04	0,10
sf	6		3	3	3	4	19	0,17	0,39
Gesamt	12	25	11	21	8	8	85	0,74	1,73
pro Aufg.-b.	0,4	1,2	0,5	1,3	0,5	0,6	0,7		
pro Aufg.-b. mit Fehlern	1,5	2,3	1,4	1,8	2,0	1,3	1,7		

Tabelle E2 Fehlerhäufigkeiten in Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Anzahl der Aufg.-bearb.	Kurzbezeichnung der Aufgaben						
	7B4	6A2	4B4	1A4	1B4	Summe	in %
gesamt	27	17	25	19	13	101	100%
vollst. richtig	6	5	2	4	2	19	19%
mit Fehlern	16	12	14	14	9	65	64%
unvollst. o. F.	5		9	1	2	17	17%

	Anzahl der Fehler							
	in obigen Aufgaben					Summe	pro	
							Aufg.-bearb.	A.-b. mit Fehlern
Gf								
Vf								
Rf		1	2	9	2	14	0,14	0,22
Ef								
Bf	1					1	0,01	0,02
sUf	1		4	1	1	7	0,07	0,11
Of-w	15	17	16	13	11	72	0,71	1,11
Of-s	1					1	0,01	0,02
Üf		1	1	3		5	0,05	0,08
sf	10	2	8	3	4	27	0,27	0,42
Gesamt	28	21	31	29	18	127	1,26	1,95
pro Aufg.-b.	1,0	1,2	1,2	1,5	1,4	1,3		
pro Aufg.-b. mit Fehlern	1,8	1,8	2,2	2,1	2,0	2,0		

Tabelle E3 Fehlerhäufigkeiten in Aufgaben zur Vektorrechnung[6]

Anzahl der Aufg.-bearb.	Kurzbezeichnung der Aufgaben 8B2	6B1	3C2	5A4	5C3	Summe	in %	
gesamt	24	21	17	8	17	87	100%	
vollst. richtig	9	2	10	2	8	31	36%	
mit Fehlern	13	18	6	3	7	47	54%	
unvollst. o. F.	2	1	1	3	2	9	10%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben					Summe	pro Aufg.-bearb.	pro A.-b. mit Fehlern
Gf	2	5			2	9	0,10	0,19
Vf	2					2	0,02	0,04
Rf	2	7	1	1		11	0,13	0,23
Ef								
Bf				1		1	0,01	0,02
sUf	3	7	5		1	16	0,18	0,34
Of-v	17	25	1	2	11	56	0,64	1,19
Üf	2	8		1	1	12	0,14	0,26
sf	4	10	1	2		17	0,20	0,36
Gesamt	32	62	8	7	15	124	1,43	2,64
pro Aufg.-b.	1,3	3,0	0,5	0,9	0,9	1,4		
pro Aufg.-b. mit Fehlern	2,5	3,4	1,3	2,3	2,1	2,6		

[6] Die ersten drei Aufgaben gehören zur Vektorrechnung in der Ebene, die beiden anderen zur Vektorrechnung im Raum.

Tabelle E4 Fehlerhäufigkeiten in Extremwertaufgaben

Anzahl der	Kurzbezeichnung der Aufgaben							
Aufg.-bearb.	8B1	7B1	6A4	4B3	3C1	Summe	in %	
gesamt	24	27	17	25	17	110	100%	
vollst. richtig	3	11	1	8	8	31	28%	
mit Fehlern	20	13	15	16	7	71	65%	
unvollst. o. F.	1	3	1	1	2	8	7%	
	Anzahl der Fehler							
	in obigen Aufgaben					Summe	pro	
							Aufg.-bearb.	A.-b. mit Fehlern
Gf	1	3		1	3	8	0,07	0,11
Vf	9	6	5	5	5	30	0,27	0,42
Rf				1	1	2	0,02	0,03
Ef								
Bf	3		1	1		5	0,05	0,07
sUf	18	4	9	2	3	36	0,33	0,51
Of-d	6	10	6	7	1	30	0,27	0,42
Of-t				2		2	0,02	0,03
Of-s		2				2	0,02	0,03
Üf	3	2	1	2	2	10	0,09	0,14
sf	3		4	1	1	9	0,08	0,13
Gesamt	43	27	26	22	16	134	1,22	1,89
pro Aufg.-b.	1,8	1,0	1,5	0,9	0,9	1,2		
pro Aufg.-b. mit Fehlern	2,2	2,1	1,7	1,4	2,3	1,9		

Tabelle E5 Fehlerhäufigkeiten in Aufgaben zur Kurvendiskussion[7] und zur Berechnung eines Flächeninhalts mittels Integralrechnung

Anzahl der Aufgabenbearb.	Kurzbez. der Aufgaben 6A1	5A1	4A1	1A1	Summe	in %	
gesamt	17	8	14	19	58	100%	
vollst. richtig	1	1	3	2	7	12%	
mit Fehlern	16	6	11	16	49	84%	
unvollst. o. F.		1		1	2	3%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben				Summe	pro Aufg.-bearb.	pro A.-b. mit Fehlern
Gf				4	4	0,07	0,08
Vf	6	6	3	4	19	0,33	0,39
Rf	9	3	3	1	16	0,28	0,33
Ef	1	3			4	0,07	0,08
Bf		8	2	7	17	0,29	0,35
sUf	2		2		4	0,07	0,08
Of-d	4	2	1	8	15	0,26	0,31
Of-i	7	4	6	9	26	0,45	0,53
Of-nlg		5			5	0,09	0,10
Of-s	17	3	8	10	38	0,66	0,78
Üf	4	1	2	5	12	0,21	0,24
sf	7		3	10	20	0,34	0,41
Gesamt	57	35	30	58	180	3,10	3,67
pro Aufg.-bearb.	3,4	4,4	2,1	3,1	3,1		
pro Aufg.-bearb. mit Fehlern	3,6	5,8	2,7	3,6	3,7		

[7] Die erste Aufgabe zu einer Logarithmusfunktion, die anderen drei zu einer Exponentialfunktion.

Tabelle E6 Fehlerhäufigkeiten in Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion von Polynomfunktionen und zum Flächenintegral

Anzahl der Aufg.-bearb.	Kurzbezeichnung der Aufgaben 7A2	6B4	5B2	3A1	3B2	Summe	in %	
gesamt	30	21	7	21	16	95	100%	
vollst. richtig	6	2	3		1	12	13%	
mit Fehlern	24	16	4	20	14	78	82%	
unvollst. o. F.		3		1	1	5	5%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben					Summe	pro Aufg.-bearb.	pro A.-b. mit Fehlern
Gf	5	7		10	2	24	0,25	0,31
Vf	2	1		1		4	0,04	0,05
Rf	13	4		8	5	30	0,32	0,38
Ef	7	5		9	4	25	0,26	0,32
Bf	3	4	4	15	11	37	0,39	0,47
sUf				6	1	7	0,07	0,09
Of-d	15	18	2	21	6	62	0,65	0,79
Of-i	14	14	1	5	10	44	0,46	0,56
Of-nlg	2	3		1	2	8	0,08	0,10
Of-s	1	6	1	3	2	13	0,14	0,17
Üf	8	1		7	7	23	0,24	0,29
sf	5	4		17	2	28	0,29	0,36
Gesamt	75	67	8	103	52	305	3,21	3,91
pro Aufg.-b.	2,5	3,2	1,1	4,9	3,3	3,2		
pro Aufg.-b. mit Fehlern	3,1	4,2	2,0	5,2	3,7	3,9		

Tabelle E7 Fehlerhäufigkeiten in Kegelschnittaufgaben mit Volumsintegral

Anzahl der Aufg.-bearb.	Kurzbez. der Aufgaben 8A4	8B3	3C4	2B4	Summe	in %	
gesamt	16	24	17	14	71	100%	
vollst. richtig	6	5	10	2	23	32%	
mit Fehlern	9	14	4	10	37	52%	
unvollst. o. F.	1	5	3	2	11	15%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben				Summe	pro Aufg.-bearb.	A.-b. mit Fehlern
Gf		3		2	5	0,07	0,14
Vf		1		4	5	0,07	0,14
Rf		2		3	5	0,07	0,14
Ef	1	4			5	0,07	0,14
Bf	1			5	6	0,08	0,16
sUf	4	5			9	0,13	0,24
Of-k		2		4	6	0,08	0,16
Of-i	3	5	1	2	11	0,15	0,30
Of-nlg		1		2	3	0,04	0,08
Of-v	7				7	0,10	0,19
Of-d				1	1	0,01	0,03
Of-s				1	1	0,01	0,03
Üf	1	2	3	1	7	0,10	0,19
sf	3	6	1	2	12	0,17	0,32
Gesamt	20	31	5	27	83	1,17	2,24
pro Aufg.-bearb.	1,3	1,3	0,3	1,9	1,2		
pro Aufg.-bearb. mit Fehlern	2,2	2,2	1,3	2,7	2,2		

Tabelle E8 Zusammenfassung der Tabellen E1 bis E7

Anzahl d.	Kurzbezeichnung der Aufgabentypen									
Aufg.-b.	T	W	V	EX	KD-IF	KDU-IF	K-IV	Summe	in %	
gesamt	115	101	87	110	58	95	71	637	100%	
vollst. r.	53	19	31	31	7	12	23	176	28%	
mit Fehl.	49	65	47	71	49	78	37	396	62%	
unv. o. F.	13	17	9	8	2	5	11	65	10%	
	Anzahl der Fehler in obigen Aufgaben							Summe	pro A.- b.	pro A.m.F.
Gf	4		9	8	4	24	5	54	0,08	0,14
Vf			2	30	19	4	5	60	0,09	0,15
Rf	2	14	11	2	16	30	5	80	0,13	0,20
Ef	3				4	25	5	37	0,06	0,09
Bf	8	1	1	5	17	37	6	75	0,12	0,19
sUf	20	7	16	36	4	7	9	99	0,16	0,25
U ges.	37	22	39	81	64	127	35	405	0,64	1,02
Of-t	23			2				25		
Of-w		72						72		
Of-v			56				7	63		
Of-d				30	15	62	1	108		[8]
Of-i					26	44	11	81		
Of-k							6	6		
Of-nlg	1				5	8	3	17	0,03	0,04
Of-s		1		2	38	13	1	55	0,09	0,14
O ges.	24	73	56	34	84	127	29	427	0,67	1,08
Üf	5	5	12	10	12	23	7	74	0,12	0,19
sf	19	27	17	9	20	28	12	132	0,21	0,33
Gesamt	85	127	124	134	180	305	83	1038	1,63	2,62
pro A.-b.	0,7	1,3	1,4	1,2	3,1	3,2	1,2	1,6		
p. A. m. F.	1,7	2,0	2,6	1,9	3,7	3,9	2,2	2,6		

[8] Das Berechnen dieser Werte ergibt wenig Sinn, da die Fehler dieser Kategorien sehr spezifisch für den jeweiligen Aufgabentyp sind.

Tabelle E9 Fehlerhäufigkeiten in den Unterkategorien des Unterstufenstoffs

F.-Kat.	Kurzbezeichnung der Aufgabentypen							Summe
	T	W	V	EX	KD-IF	KDU-IF	K-IV	
Gf-vz	1		4			3	1	9
Gf-uvä	1		1	5	3	2	1	13
Gf-gs			2	1	1	7		11
Gf-s	2		2	2		12	3	21
Gf	**4**		**9**	**8**	**4**	**24**	**5**	**54**
Vf-vz				2	6			8
Vf-bf			2	3				5
Vf-kl				8	8		3	19
Vf-b				10	5	3	1	19
Vf-s				7		1	1	9
Vf			**2**	**30**	**19**	**4**	**5**	**60**
Rf-zw	1			1	4	6		12
Rf-p		2			4	1		7
Rf-b	1	8	5		5	13	3	35
Rf-s		4	6	1	3	10	2	26
Rf	**2**	**14**	**11**	**2**	**16**	**30**	**5**	**80**
Ef-vz					1	13	3	17
Ef-s	3				3	12	2	20
Ef	**3**				**4**	**25**	**5**	**37**

E.2 Einige Ergebnisse im Detail

E.2.1 Unterschiede zwischen den Klassen und Aufgaben

Wenn man in den Tabellen E1 bis E7 die Fehlerhäufigkeiten in den Aufgabenbearbeitungen eines Aufgabentyps betrachtet, so kann man aus den ersten Zeilen sowie aus der Zeile mit den Gesamtzahlen der Fehler pro Aufgabenbearbeitung ablesen, dass sowohl die Anzahl der Fehler wie auch die Anzahl der vollständig richtigen Aufgabenbearbeitungen stark differieren (z.B. bei den Extremwertaufgaben in Tabelle E4 und bei den Aufgaben zur Vektorrechnung in Tabelle E3).

Dies ist nur zum Teil auf die Verschiedenheit der Aufgaben zurückzuführen. So haben vier der fünf Extremwertaufgaben einen praktisch identen Gang bei gleicher Skizze. Die Unterschiede in der Formulierung des Angabetextes bzw. in der Art der Zusatzfragen stellen aber einen wesentlichen Einflussfaktor auf die Fehlerzahl dar - wie die Extremwertaufgabe 8B1 mit ihrem hohen Anteil an (teils folgenschweren) "sonstigen Unterstufen-Fehlern" eindrucksvoll demonstriert.

Beim Vergleichen ähnlicher (bzw. identer) Rechengänge zeigt sich, dass es von Klasse zu Klasse große Unterschiede geben kann.[1] (Dies ist eine Binsenweisheit, die sich eben immer wieder bestätigt.) Die Spannweite vollständig richtig gelöster Aufgaben reicht von 0% (bei 3A1) bis zu 65% (bei 2A2).

Aus der Anzahl der "Rechen- (und Denk-)schritte", die zur Lösung einer Aufgabe notwendig sind, kann *nicht* auf die mittlere Anzahl der dabei gemachten Fehler geschlossen werden.[2]

---

[1] Auch BIRTH 1979 und FRANKE/WYNANDS 1991 weisen auf ähnliche Ergebnisse hin.

[2] Da eine genaue Operationalisierung der kompletten Lösungswege der Maturabeispiele viel zu aufwendig (wenn überhaupt möglich?) gewesen wäre, muss diese "Hypothese" so "schwammig" formuliert stehen bleiben. Wer sich der Mühe unterzieht, die Aufgaben zur Vektorrechnung (z.B. 8B2 und 3C2) mit den dabei gemachten Fehlern zu vergleichen, erhält einen guten Einblick in die Problematik.

E.2.2 Häufigkeit der Notationsfehler

Ganz allgemein konnte festgestellt werden, dass diese Fehlerkategorie - nach der Häufigkeit betrachtet - zu den wichtigsten gehört; auch über das mathematische Verständnis bzw. über das "Sprachgefühl" (bezogen auf die mathematische Fachsprache) der SchülerInnen können diese Fehler[3] wohl einiges aussagen. Leider wurden sie quantitativ nicht bzw. nur exemplarisch erfasst (siehe Kapitel C.2.6 und B.3.3).

Interessant ist, dass bestimmte Notationsfehler in einigen Klassen ausgesprochen gehäuft auftreten, z.B. fanden sich in den 14 Aufgabenbearbeitungen zu 4A1 fast doppelt so viele Fehler dieser Kategorie wie alle anderen Fehler zusammengenommen (56 zu 30). Die 56 Notationsfehler verteilten sich auf 12 (der 14!) SchülerInnen und auf 10 verschiedene Fehlerphänomene, wobei häufig ein sehr konsistentes Auftreten feststellbar war, z.B. siebenmal derselbe Fehler bei einer SchülerIn (ohne eine einzige richtige Schreibweise).

E.2.3 Unterstufen- und Oberstufen-Fehler

E.2.3.1 Vergleich ihrer Häufigkeiten

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war es, herauszufinden, welche und wie viele Unterstufen-Fehler von MaturantInnen beim Lösen der schriftlichen Maturaaufgaben gemacht wurden.

Tabelle E8 zeigt, dass die Zahl der Unterstufen- und Oberstufen-Fehler in etwa gleich ist (jeweils rund 400); in rund zwei Drittel aller Aufgabenbearbeitungen wurden Fehler gefunden - im Mittel jeweils ein Unterstufen- und ein Oberstufen-Fehler pro fehlerhafter Aufgabenbearbeitung. Dieser Mittelwert von rund zwei Fehlern pro Aufgabenbearbeitung erscheint überraschend niedrig!

[3] Die Bedeutung(saspekte) von Notationsfehlern und ihre Ursachen (insbesondere der Einfluss der LehrerInnen) wäre ein interessantes Thema für eine Forschungsarbeit.

Die Ausgewogenheit der Fehlerzahlen aus Unterstufen- und Oberstufenstoff ist auf die statistische Mittelung zurückzuführen, folgende Details (vergleiche Tabelle E9) sind bemerkenswert:

- Bei den Extremwertaufgaben überwogen die Unterstufen-Fehler deutlich! Dieser überraschende Befund hat wahrscheinlich zwei Gründe: Probleme mit dem Angabetext und dem Erstellen einer brauchbaren Skizze einerseits und relativ komplexe Termumformungen andererseits.
- Umgekehrt überstieg bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung die Anzahl der Oberstufen-Fehler die Anzahl der Unterstufenfehler um ein Mehrfaches.
- Bei Aufgaben zur Trigonometrie war eine Tendenz zu mehr Unterstufen-Fehlern, bei Aufgabentypen zur Vektorrechnung und zur Kurvendiskussion eine leichte Tendenz zu mehr Oberstufen-Fehlern festzustellen.

E.2.3.2 Unterstufenfehler: Flüchtigkeit oder Stabilität?

Ein großer Teil der Unterstufen-Fehler beruht sicherlich auf Flüchtigkeit, in einigen Fällen konnte man sich des Eindrucks gravierender Schwächen bzw. Defizite aus dem Bereich des Lehrstoffs der Unterstufe aber nicht erwehren, einer groben Schätzung nach könnte dies auf rund zehn Prozent der MaturantInnen zutreffen. Genauere Aussagen wären nur auf der Basis zusätzlicher Interviews oder Tests möglich.

Unterstufen-Fehler, die nicht auf Flüchtigkeit beruhen, zeigen eine ausgesprochen hohe Stabilität (und wohl auch Resistenz).

E.2.3.3 Fehlerbereiche der Unterstufenfehler

REITBERGER versteht unter Fehlerbereich die Zahl der Aufgaben, in denen ein Fehlerphänomen vorkommt.[4]

a) Viele Unterstufenfehler haben große Fehlerbereiche:[5]

Tabelle E9 zeigt auf den ersten Blick, dass die Unterstufen-Kategorien wesentlich breitere Fehlerbereiche aufweisen als die meist ausgesprochen aufgabenspezifischen Oberstufen-Fehler[6] - wobei (aus dem Blickwinkel der aufgetretenen Fehler) die elementare Algebra stark im Vordergrund steht.

b) In den untersuchten Maturaarbeiten waren wichtige Kernbereiche des Unterstufenstoffs (Prozentrechnen, Geometrie, Arbeiten mit Textaufgaben) nur am Rande oder gar nicht zur Lösung der Aufgaben notwendig - entsprechende Fehler konnten daher nicht bzw. nur in geringer Zahl gefunden werden. Die wenigen Aufgaben mit Anforderungen in diese Richtung zeigen aber, dass hier einiges an Schwächen zu entdecken sein dürfte[7] (vergleiche die Beispiele im Kapitel D.2.3).

"Klassische" Unterstufen-Fehler

Tabelle E9 zeigt (wenn auch sehr oberflächlich aufgrund der groben Kategorisierung), dass viele der Unterstufen-Fehler den "klassischen" Bereichen wie Vorzeichenfehler, Fehler beim Setzen von Klammern oder beim Bruchrechnen zuzuordnen waren.

---

[4] REITBERGER 1992, Seite 295.

[5] Dies heißt nichts anderes als die altbekannte Tatsache, dass man "den Unterstufenstoff" beherrschen muss, um Aufgaben der Oberstufe lösen zu können - beachte aber b)!

[6] Dies liegt wohl auch im Verzicht auf eine mehrere Stoffkapitel übergreifende Aufgabenauswahl begründet und sollte sich mit dem neuen Lehrplan, nach dem nun immerhin schon der 7. Jahrgang maturiert hat, ändern.

[7] Z.B. in der TIMSStudy (BAUMERT/BOS/WATERMANN 1999 und REICHEL/GÖTZ 1998) wurden solche Schwächen entdeckt, HANISCH 1998 (Seite 52) nimmt ein erschütterndes Beispiel aus dem Bereich der Prozentrechnung zum Anlass für folgende Frage: "Wäre es daher nicht wichtiger, auf exotische Aufgaben - so schön sie auch sein mögen - zu verzichten und sich auf das Wesentliche zu beschränken?".

E.2.4 Fehlerreiche Aufgabentypen

Aufgaben bzw. Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion in Kombination mit einer Flächenberechnung mittels Integral haben sich als besonders fehleranfällige Aufgabentypen erwiesen. Die mittlere Fehlerzahl liegt je nach Bezugszahl (Anzahl aller oder nur der fehlerhaften Arbeiten) fast doppelt bzw. dreimal so hoch wie bei den anderen untersuchten Aufgabentypen (vergleiche Tabelle E9).

Dafür sind mehrere Faktoren verantwortlich: Viele Rechenfehler bzw. Fehler, die der elementaren Algebra zuzuordnen sind; Probleme beim Ansatz zu Umkehraufgaben, aber auch zur Integralrechnung (und wohl auch "mechanisches" Integrieren und die Schwierigkeiten beim Zusammenspiel von Zeichnung und Rechnung); das sehr abstrakte Niveau von Exponential- und Logarithmusfunktionen und Probleme beim Berechnen von Grenzwerten.

Fehlervermeidend (v.a. aber "erfolgvermeidend") auf eine etwas "unfaire" Art wirkten Aufgabenstellungen, bei denen die Integralrechnung nur in Angriff zu nehmen war, wenn der vorgelagerte Teil (wie z.B. die Umkehraufgabe zur Kurvendiskussion) vorher gelöst werden konnte.

E.2.5 Bedeutung fehlender Teile in einer Aufgabenbearbeitung

Aufgrund der Schwierigkeiten, die Lösungswege einer Aufgabe zu operationalisieren (und sie damit abseits des Punkteschlüssels, der zur Leistungsbeurteilung dient, quantifizierbar zu machen) wurde auf diese Problematik nicht näher eingegangen.

Es sei aber erwähnt, dass das Fehlen von Teilen einer Aufgabenbearbeitung nicht nur für die erreichten Noten, sondern auch für die vorkommenden Fehlerzahlen von große Bedeutung ist.

E.3 Individuelle Fehlerhäufigkeiten

Wenn die Fehlerzahl in einer Aufgabenbearbeitung besonders hoch ist, stellt dies einerseits ein Problem dar, weil diese Aufgabenbearbeitung beim Zählen der Fehler ein großes Gewicht erhält, andererseits sind gerade in solchen Fällen Aussagen über die Konsistenz von Fehlern möglich.

Es war daher zuerst ein Überblick über die individuellen Fehlerhäufigkeiten zu schaffen:

In Tabelle E10 auf der nächsten Seite ist dargestellt, wie viele Aufgabenbearbeitungen mit keinem, einem, zwei, drei, vier, usw. Einzelfehlern gefunden wurden:

"0 r" bedeutet: Kein Fehler, Aufgabenbearbeitung vollständig richtig.[1]

"0 u" bedeutet: Kein Fehler, Aufgabenbearbeitung unvollständig.[2]

Weiters enthält diese Zeile der Tabelle E10 alle Häufigkeitswerte von Fehlern, die in *einer* Aufgabenbearbeitung gefunden wurden (max. 17).

Um die Aufgabentypen[3] vergleichbar darzustellen, wurde eine relative Angabe in Prozent mit der Anzahl *aller* Arbeiten eines Aufgabentyps als Grundwert gewählt.

Es zeigt sich, dass bei den meisten Aufgabentypen die Aufgabenbearbeitungen mit einem oder zwei Fehlern überwiegen (abgesehen von den fehlerfreien Arbeiten); Aufgabenbearbeitungen mit mehr als vier Fehlern sind - abgesehen von den (Umkehr-)Aufgaben zur Kurvendiskussion - selten.

Man kann also davon ausgehen, dass die in Abschnitt E.1 vorgestellten Ergebnisse nicht durch einige wenige MaturantInnen, die besonders viele Fehler gemacht haben, verzerrt wurde.

---

[1] Abgesehen von Notationsfehlern, diese sind auch hier nicht berücksichtigt!

[2] Vergleiche Tabelle E1 bis E7 in Abschnitt E.1.

[3] Die Abkürzungen der Aufgabentypen sind in Tabelle B2 am Beginn des Abschnitts B.2 erklärt.

Tabelle E10 Fehlerhäufigkeiten in den Aufgabenbearbeitungen

Aufg.-Typ	Fehlerzahl in einer Aufgabenbearbeitung															
	0 r	0 u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	17
	Anteil der Aufgabenbearbeitungen (mit obiger Fehlerzahl) in Prozent															
T	46	11	26	8	5	2	1	1								
W	19	17	30	15	15	3	2									
V	36	10	20	8	14	3	5	3	1							
EX	28	7	33	20	4	5	3		1							
KD-IF	12	3	10	22	14	14	10	3	2	3	5					
KDU-IF	13	5	22	11	12	11	9	8	1	2		2	1	1	1	1
K-IV	32	15	20	18	4	4	3	3								

Folgende Besonderheiten sind erkennbar:

In Aufgaben zur Vektorrechnung (V): Kleine Abweichung zu höherer Fehlerzahl pro Aufgabenbearbeitung - dies deutet hier auf das Vorkommen konsistenter, d.h. mehrfach in identer bzw. ähnlicher Form vorkommender Fehlerphänomene hin (Vergleiche Kapitel D.2.1).

In (Umkehr-)Aufgaben zur Kurvendiskussion und zur Integralrechnung (KD-IF; KDU-IF): Starke Tendenz zu höherer Fehlerzahl pro Aufgabenbearbeitung - nicht nur in Ausnahmefällen[4], sondern in einer großen Zahl von Aufgabenbearbeitungen. Zusätzlich verstärkend wirkte, dass es besonders wenige fehlerfreie Arbeiten gab. Die vorkommenden Fehler waren aber sehr verschiedener Natur und gleichartige Fehlerphänomene (angesichts der großen Fehlerzahl pro Aufgabenbearbeitung erstaunlich) selten.

Zur Konsistenz von Fehlern

Zwei (vereinzelt auch mehr) gleichartige Fehlerphänomene in einer Aufgabenbearbeitung wurden des Öfteren gefunden, dieser Aspekt wurde aber nur exemplarisch und nicht generell untersucht.

[4] Die wenigen "Ausreißer" mit 10 und mehr Fehlern in einer Aufgabenbearbeitung stellen 8% aller fehlerhaften Arbeiten und damit 25 % aller Fehler dieses Aufgabentyps (KDU-IF).

F WEITERE ERGEBNISSE

Dieser Abschnitt behandelt zwei Problemkreise, die sich am Rande dieser Arbeit ergeben haben:

1) Von den SchülerInnen selbst Korrigiertes

Dieser Aspekt hat sich schon in der Vorerhebung als sehr interessant herausgestellt, sich aber als zu arbeitsintensiv erwiesen, um ihn vollständig einbeziehen zu können. Die in einer Stichprobe untersuchten Korrekturen, welche die SchülerInnen während der Klausur an ihren eigenen Arbeiten vorgenommen haben, werden in Anschnitt F.1 besprochen.

2) Fehler, Mathematik und Notengebung

Dieser Punkt ist nicht unmittelbar Teil des gestellten Themas, war aber in vielen Gesprächen zu dieser Arbeit so stark präsent, dass - auch aus persönlichem Interesse des Verfassers - zumindest zwei Facetten der Noten-Problematik näher beleuchtet werden sollen:

a) Im Abschnitt F.2 wird kurz auf die Frage der Auswirkungen der Fehler auf die Note eingegangen und die Jahresnote der 8. Klasse mit der Klausurnote (beide in Mathematik) verglichen.

b) Anhand der vorliegenden Maturaarbeiten (und rund 200 Jahreszeugnissen des Jahrgangs 1996/97) wurde untersucht, ob das Fach Mathematik auch in dieser Schule[1] seinem Ruf als größter Stolperstein[2] auf dem Weg zur Matura gerecht wird. Die Ergebnisse sind in Abschnitt F.3 zusammengestellt.

---

[1] BG + BRG Rahlgasse, im 6. Wiener Gemeindebezirk.

[2] Wie bereits in der Einleitung angesprochen.

F.1 Von den SchülerInnen selbst Korrigiertes

Wenn man alles, was eine SchülerIn im Zuge ihrer Aufgabenbearbeitung geschrieben hat (und nicht nur die Reinschrift[1] mit den Korrekturen der LehrerInnen), in die Untersuchung einbezieht[2], ergibt sich in vielen Fällen ein deutlich verändertes Bild - "man kommt dem Denken der SchülerIn näher" - allerdings erfordert diese umfassende Betrachtungsweise einen deutlich größeren Aufwand und stößt auf einige Schwierigkeiten (Näheres im Kapitel B.3.3.2).

Um den Stellenwert der von den SchülerInnen selbst vorgenommenen Korrekturen (im Folgenden auch kurz als "Eigenkorrekturen" bezeichnet) abschätzen zu können, wurde eine Stichprobe von 20 zufällig ausgewählten Aufgabenbearbeitungen[3] untersucht, die Ergebnisse sind in diesem Abschnitt zusammengestellt. Zwei der "gezogenen" Arbeiten stammen von einer SchülerIn, es handelt sich also um 20 Aufgabenbearbeitungen von 19 SchülerInnen.

In Tabelle F1 (auf der nächsten Seite) sind die ausgewählten Aufgabenbearbeitungen im Überblick dargestellt. Dabei zeigt sich (soweit dies aus der kleinen Stichprobe ablesbar ist), dass das Auftreten der Eigenkorrekturen weitgehend unabhängig sein dürfte von Variablen wie dem Aufgabentyp, der erreichten Punktezahl bei der bearbeiteten Aufgabe oder der Note.

---

[1] Die MaturantInnen sind dazu angehalten, ihre Aufgabenbearbeitungen in Reinschrift abzugeben; die zugehörigen Konzepte müssen sie vollständig beilegen (manche Maturaarbeiten bestehen aus 20 A3-Bögen!). Beim Schreiben der Reinschrift übertragen die SchülerInnen nicht alle Zwischenschritte aus dem Konzept - und natürlich auch die Fehlversuche nicht.

[2] Viele MaturantInnen haben (vermutlich aus Zeitmangel) keine Reinschrift erstellt. In diesen Fällen wurde das (manchmal äußerst chaotische) Konzept von der LehrerIn korrigiert und in diese Untersuchung einbezogen. Auch bei fehlenden oder unklaren Zwischenschritten im Zuge der Zuordnung eines Fehlerphänomens zu einer Fehler-Kategorie wurde auf das Konzept zurückgegriffen.

[3] Den 1337 Aufgabenbearbeitungen (siehe Kapitel B.2.1) wurden fortlaufende Zahlen von 1 bis 1337 zugeordnet, aus diesen Zahlen wurde dann die zufällige Auswahl vorgenommen. Bei einer der so "gezogenen" Aufgabenbearbeitungen hatte die SchülerIn nichts geschrieben, diese Aufgabenbearbeitung wurde nicht berücksichtigt, sondern durch eine andere (wieder zufällig ausgewählte) ersetzt.

Tabelle F1 Die 20 ausgewählten Aufgabenbearbeitungen im Überblick

Laufende Nummer		Code	Aufgaben -typ	Punkte		Note	Anzahl abgebr.	Feh- lende	Anzahl der Korr. von	
S.	A.			err.	max.		Rg.	Teile	L.	S.
1	1	7B326	K-IV	11	12	3			2	
2	2	6B101	V2	10	12	3	1	10%	1	2
3	3	6A317	V3	12	12	2				3
4	4	6A312	V3	11	12	2	1		1	8
4	5	6A112	KDln-IF	12	12	2	3			20
5	6	5C403	W	10	12	1	2		2	9
6	7	5C312	V3	12	12	1				5
7	8	5C106	KDe^x-IF	0	12	4	1	30%	3	4
8	9	5B406	T	10	12	3			2	
9	10	4B324	EX	11	12	1			1	2
10	11	4B318	EX	4	12	3		70%		1
11	12	4A212	V3	0	12	3	9	A		10
12	13	4A210	V3	0	6	3	2	A		2
13	14	3C302	W	6	6	2	3		2	8
14	15	3C203	V2	6	6	1	1			2
15	16	3C104	EX	6	6	2	2			2
16	17	3A412	W	10	10	3				2
17	18	2C413	KDU-IF	7	20	4	4	40%	2	4
18	19	1B408	W	2	6	3		30%	1	4
19	20	1B402	W	3	6	2	3	40%	1	2

1. Spalte: Fortlaufende Nummer der SchülerInnen.

2. Spalte: Fortlaufende Nummer der Aufgabenbearbeitungen, die 4. und 5. Aufgabenbearbeitung sind von derselben SchülerIn.

3. Spalte: Code, mit dem eine Aufgabenbearbeitung in der Untersuchung benannt wurde (siehe Kapitel B.2.1).

4. Spalte: Aufgabentyp (Die Abkürzungen sind in Tabelle B2 erklärt).

5. und 6. Spalte: Erreichte und maximal mögliche Punktezahl bei dieser Aufgabe.

7. Spalte: Klausurnote (Note auf die schriftliche Maturaarbeit) der SchülerIn.

8. Spalte: Anzahl der abgebrochenen Rechengänge bei der Bearbeitung dieser Aufgabe (mehr dazu im Folgenden).

9. Spalte: Nicht jede Aufgabe wurde von der SchülerIn vollständig bearbeitet, das Ausmaß der fehlenden Teile wurde anhand der dafür vorgesehenen Punktezahl grob geschätzt und in Prozent angegeben. "A" bedeutet, dass die SchülerIn keinen zielführenden Ansatz gefunden hat.

10. und 11. Spalte: Anzahl der Korrekturen. Unter "L." steht die Anzahl der Fehler, die von der LehrerIn korrigiert wurden[4]; unter "S." ist die Anzahl der Korrekturen, die von der SchülerIn selbst vorgenommen wurden, angeführt (mehr dazu im Folgenden).

Erkennbarkeit der Korrekturen[5]

Neben einfachem Durchstreichen oder Überschreiben haben einige SchülerInnen folgende Korrekturmethoden angewendet:

Übermalen des Korrigierten bis zur Unleserlichkeit (2 von 19 SchülerInnen);

Verwendung eines Tintenlöschers (2 von 19 SchülerInnen);

Verwendung eines Radiergummis[6] (2 von 19 SchülerInnen).

Eine SchülerIn hat Tintenlöscher und Radiergummi verwendet, sodass bei 5 der 19 SchülerInnen, also rund einem Viertel, das von ihnen Korrigierte (zumindest teilweise[7]) nicht mehr erkennbar war.

---

[4] Notationsfehler wurden dabei nicht berücksichtigt (in der Aufgabenbearbeitung Nr. 5 fanden sich z.B. 12 Notationsfehler, 7 davon hat die Lehrerin korrigiert, 5 waren gar nicht korrigiert).

[5] Abgesehen von der Problematik, dass nachträglich eingefügte Korrekturen oft nur schwer oder gar nicht erkennbar sind.

[6] Teile der Maturaarbeiten wurden von einigen SchülerInnen mit Bleistift geschrieben.

[7] Z.B. wird gelöschte Tinte nach Jahren manchmal wieder sichtbar.

F.1.1 Abgebrochene Rechengänge

Unter Rechengang wird hier eine Abfolge von Bearbeitungsschritten (Skizzen, Umformungen, das Notieren von Formeln, etc.) verstanden. Als abgebrochen wird ein Rechengang gewertet, wenn er zu keinem Ergebnis geführt hat und in der Aufgabenbearbeitung kein Folgeschritt zu finden ist.

In 12 der 20 Aufgabenbearbeitungen (d.h. in 60 Prozent) fanden sich abgebrochene Rechengänge, deren Anzahl in Tabelle F1 gesondert angeführt ist und bei der Anzahl der Korrekturen (in der ganz rechten Spalte der Tabelle F1) nicht mitgezählt wurde (obwohl man das Abbrechen und Neubeginnen als eine Form des Korrigierens ansehen kann).

Der Grund, warum eine SchülerIn den Rechengang abgebrochen hat, wurde nicht untersucht (Es kann z.B. sein, dass sie den gewählten Weg als nicht mehr zielführend oder bewältigbar eingeschätzt hat, oder dass sie im bisherigen Gang einen oder mehrere Fehler entdeckt hat).

Der Frage, ob die SchülerIn nach dem Abbruch nochmals denselben Rechengang begonnen oder einen neuen Weg beschritten hat, wurde ebensowenig nachgegangen, wie der Frage nach der Richtigkeit des abgebrochenen Rechengangs, bzw. wie zielführend dieser war.

In Tabelle F2 (auf der nächsten Seite) ist dargestellt, wie lange die abgebrochenen Rechengänge im Einzelnen waren (wobei ein relativ grobes Maß angelegt wurde).

Eine SchülerIn (mit der laufenden Nr. 11) hat allein 7 abgebrochene Rechengänge mit einer Länge von mindestens einer halben A4-Seite produziert, sie war auf der (vergeblichen) Suche nach einem zielführenden Ansatz. Auch ohne diese "AusreißerIn" erreichen rund die Hälfte aller abgebrochenen Rechengänge die Länge von ca. einer halben A4-Seite und darüber hinaus - abgebrochene Rechengänge dieser Länge waren bei 6 von 18 SchülerInnen, also bei jeder dritten SchülerIn zu finden.

Damit zeigt sich, dass die Problematik der abgebrochenen Rechengänge keine Quantité négligeable ist. Sie wirft einige Fragen auf, wie z.B.:

Für wie viele SchülerInnen entsteht daraus ein bedeutender Zeitmangel?

Inwieweit spielen mangelnde Fähigkeiten beim Planen einer Aufgabenbearbeitung oder beim Erkennen und Finden von Fehlern eine Rolle? Oder sind zahlreiche abgebrochene Rechengänge "nur" die Auswirkung des individuellen Arbeitsstils bzw. kognitiver Stilvariablen?

Tabelle F2 Länge der abgebrochenen Rechengänge

Laufende Nummer (aus Tab. F1)		Anzahl der abgebrochenen Rechengänge mit einer Länge von:						Gesamtzahl pro Aufg.
		Zeilen:	Seiten:					
Schü.	Aufg.	1-2	ca.1/4	ca.1/2	ca.3/4	ca. 1	ca.1,5	
2	2		1					1
4	4			1				1
4	5		1	1		1		3
5	6			1	1			2
7	8		1					1
11	12	1	1	3		3	1	9
12	13				1		1	2
13	14			2		1		3
14	15		1					1
15	16		2					2
17	18	2	2					4
19	20	1		2				3
Anzahl Schü.:	Anzahl Aufg.:	Anzahl der abgebr. Rechengänge versch. Länge:						Abg.Rg. insges.:
11	12	4	9	10	2	5	2	32
Werte ohne die SchülerIn mit der Nr. 11 ("AusreißerIn"):								
10	11	3	8	7	2	2	1	23

In der letzten und vorletzten Zeile der Tabelle F2 stehen die Anzahl der SchülerInnen und die Anzahl der Aufgabenbearbeitungen sowie als Spaltensummen die Anzahlen der abgebrochenen Rechenschritte mit verschiedener Länge.

F.1.2 Anzahl und "Zeitpunkt" der Korrekturen

Vorausgeschickt werden muss die Bemerkung, dass die Anzahl der Eigenkorrekturen aus folgenden Gründen nicht mit einer Fehleranzahl gleichgesetzt werden kann:

- Bei einer Eigenkorrektur kann eine SchülerIn Falsches oder Richtiges verändern, das neu Geschriebene kann wiederum falsch oder richtig sein.
- Eine Korrektur kann mehrere Fehler richtig stellen.
- In abgebrochenen Rechengängen können sich mehrere SchülerInnenfehler finden.

Anzahl der Korrekturen

In der rechten Spalte der Tabelle F1 ist die Anzahl der von den SchülerInnen selbst vorgenommenen Korrekturen[8] der Anzahl der Korrekturen seitens der LehrerInnen[9] gegenübergestellt. Dabei ist eindeutig ein Überwiegen der Eigenkorrekturen der SchülerInnen festzustellen.[10]

In Tabelle F3 sind diese Zahlen differenziert in Korrekturen von Unterstufen-Fehlern und sonstige Korrekturen dargestellt. Die sonstigen Korrekturen seitens der SchülerInnen enthalten auch solche, bei denen das Korrigierte nicht erkennbar war, außerdem unklare und falsche Korrekturen.

---

[8] In den meisten Fällen handelt es sich dabei um Fehler, die von den SchülerInnen selbst entdeckt wurden.

[9] Das sind i.A. jene Fehler, die von den SchülerInnen übersehen wurden.

[10] Wenn man auch noch die abgebrochenen Rechengänge berücksichtigt, wird das Überwiegen der Korrekturen, die von den SchülerInnen selbst vorgenommen wurden, noch deutlicher.

Tabelle F3 Anzahl der Korrekturen seitens der LehrerInnen und SchülerInnen

Laufende Nummer (aus Tab. F1)		Anzahl der Korrekturen					
		seitens der LehrerIn			seitens der SchülerIn		
Schü.	Aufg.	Unt.-F.	sonst.	**gesamt**	Unt.-F.	sonst.	**gesamt**
1	1	2		**2**			
2	2		1	**1**		2	**2**
3	3				2	1	**3**
4	4	1		**1**	5	3	**8**
4	5				8	12	**20**
5	6		2	**2**		9	**9**
6	7				1	4	**5**
7	8	3		**3**		4	**4**
8	9		2	**2**			
9	10	1		**1**		2	**2**
10	11					1	**1**
11	12				7	3	**10**
12	13					2	**2**
13	14	2		**2**		8	**8**
14	15				1	1	**2**
15	16					2	**2**
16	17					2	**2**
17	18		2	**2**	1	3	**4**
18	19		1	**1**		4	**4**
19	20		1	**1**		2	**2**
Spaltensummen:		9	9	**18**	25	65	**90**

Mit "Unt.-F." bzw. "sonst." sind Korrekturen von Unterstufen-Fehlern bzw. sonstige Korrekturen gemeint.

Der "Zeitpunkt" der Eigenkorrekturen

Schließlich wurde noch untersucht, *wann* die SchülerInnen ihre Korrekturen vornahmen. Damit ist die Anzahl der Folgeschritte gemeint, die eine SchülerIn notierte, bevor sie zu jenem Schritt zurückkehrt ist, den sie dann korrigiert hat.

Dies lässt sich anhand der schriftlichen Aufgabenbearbeitungen nicht immer klar, aber doch ausreichend genau für einen ersten Überblick feststellen und ist in Tabelle F4 auf der nächsten Seite dargestellt.

Der überwiegende Teil der von den SchülerInnen selbst vorgenommenen Korrekturen bezieht sich auf Fehler, die kurz nach ihrer Entstehung (sozusagen in "begleitender Kontrolle") entdeckt und korrigiert wurden:

Rund die Hälfte der Eigenkorrekturen wurde im Zuge des Notierens der ersten Folgezeile vorgenommen.

Bei annähernd 30 Prozent der Eigenkorrekturen ist der "Zeitpunkt" der Korrektur allein aus den schriftlichen Arbeiten nicht feststellbar.

Nur bei ca. 5 Prozent der Eigenkorrekturen ist die SchülerIn eine halbe Seite oder weiter zurückgegangen und hat den Rechengang ab dort korrigiert (was ein relativ anspruchsvolles und fehleranfälliges Verfahren ist).

Vergleicht man dies mit der deutlich höheren Zahl an abgebrochenen Rechengängen, kommt man zu folgender

Zusammenfassung

Bei einem "Korrekturbedarf", der über mehrere notierte Zwischenschritte zurückreicht, tendierten die SchülerInnen eher zu einem Abbruch und Neubeginn des Rechengangs, als die bereits notierten Schritte nachzukorrigieren.

Die Anzahl der Eigenkorrekturen unter Einbeziehung der abgebrochenen Rechengänge überwog die Anzahl der von der LehrerIn korrigierten Fehler um ein Vielfaches; die Eigenkorrekturen wurden zum Großteil nach wenigen Folgeschritten gesetzt und lassen daher vor allem Schlüsse auf die Fähigkeiten der SchülerInnen zur "begleitenden Kontrolle" zu.

Tabelle F4 "Zeitpunkt" der Eigenkorrekturen

Laufende Nummer (aus Tab. F1) Schü.	Aufg.	Anzahl der Eigenkorrekturen im 1. Folge-schritt	nach 2-5 Folge-schritten	nach ca. 1/2 Seite	deutlich später	"Zeit-punkt" unklar	Gesamt
1	1						keine
2	2	2					2
3	3	3					3
4	4	7				1	8
4	5	15	3	2			20
5	6					9	9
6	7	1		1		3	5
7	8					4	4
8	9						keine
9	10	1	1				2
10	11		1				1
11	12	8	1			1	10
12	13	1	1				2
13	14	2	1			5	8
14	15					2	2
15	16	1	1				2
16	17		2				2
17	18	2			2		4
18	19	3				1	4
19	20	2					2
Summen:		48	11	3	2	26	90

F.2 Fehler: Auswirkungen auf die Note

Die Frage der Auswirkungen der Fehler auf die Note ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, an dieser Stelle soll aber kurz darauf eingegangen werden.

Man kann zwischen direkten Auswirkungen (falsche Ergebnisse) und indirekten Auswirkungen unterscheiden. Letztere sind besonders interessant und können in Einzelfällen besonders "tragisch", d.h. folgenschwer sein: So können Fehler zu Zwischenergebnissen führen, mit denen die SchülerIn nicht oder nur mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad (z.B. mit gebrochenen statt ganzzahligen Integrationsgrenzen[1]) weiterrechnen kann. Aus einem Fehler kann aber auch ein massiver Zeitverlust resultieren, wenn er z.B. erst am Ende der Aufgabenbearbeitung entdeckt wird und die SchülerIn den Rechengang noch einmal neu durcharbeitet.

Auch RADATZ sieht "Fehler ... als Grundlage für Leistungsbeurteilung"[2], verlangt aber eine differenzierte Fehlerbeurteilung mit einer Diskussion der unterschiedlichen Qualität von Fehlermustern, um die starre "falsch-richtig-Dichotomie" mit ihrer rein quantitativen Fehler- bzw. Schülerbeurteilung zu überwinden.[3]

In den untersuchten Maturaarbeiten gibt es etliche Fälle, in denen idente Fehlertechniken sehr unterschiedliche Folgen hatten:

So führte ein elementarer Rechenfehler wie z.B. 45 - 30 = 10 manchmal zu keinem Punkteabzug, in zwei Fällen war ein Verlust von 2 Punkten (bei 6 Punkten für die ganze Aufgabe!) die Folge - ein Schüler, dem dies passierte, erhielt mit 10 von 24 Punkten ein Nicht genügend, mit 2 Punkten mehr wäre es ein Genügend gewesen.

Man muss zum Schluss kommen, dass der Zufall zumindest in Einzelfällen maßgeblich entscheidet, ob ein Fehler folgenlos (d.h. ohne Punkteabzug) bleibt oder die erreichte Note (u.U. dramatisch) verschlechtert - es bleibt noch zu prüfen, ob die Fähigkeiten der SchülerIn, die Existenz eines Fehlers zu erkennen und diesen aufzuspüren, dabei eine Rolle gespielt haben.

---

[1] Ein Schüler hat sogar seitenlang mit komplexen(!) Integrationsgrenzen gerechnet.

[2] RADATZ 1985, Seite 19.

[3] Nach RADATZ 1985, Seite 21 bis 23.

In Summe betrachtet, dürften sich diese zufälligen Effekte gut "ausmitteln" - so lässt sich die Note der schriftlichen Maturaarbeit ganz gut aus der Jahresnote einer SchülerIn vorhersagen:[4]

Tabelle F5 zeigt einen Vergleich zwischen der Jahresnote der 8. Klasse und der Note auf die schriftliche Maturaarbeit (kurz als Klausurnote bezeichnet). Es ist zu erkennen, dass die Klausurnoten etwas besser sind als die Jahresnoten, bei der Hälfte der SchülerInnen sind beide Noten gleich, bei rund zehn Prozent unterscheiden sich die beiden Noten um mehr als einen Grad.

Tabelle F5 Vergleich zwischen Jahresnote und Klausurnote

Klasse	Lehr.	Schü.	Klausurnote schlechter um		Klausur-note	Klausurnote besser um		
			2 Grad	1 Grad	**gleich**	1 Grad	2 Grad	3 Grad
8A/98	P.	16			**6**	8	2	
8B/98	B.	24	1	2	**14**	6	1	
8A/97	F.	30		2	**12**	11	4	1
8A/96	B.	17		4	**9**	4		
8B/96	F.	21		4	**8**	7	2	
8A/95	B.	8		1	**6**	1		
8B/95	F.	7		1	**5**	1		
8C/95	M.	17		2	**9**	4	1	1
Summen		140	1	16	**69**	42	10	2
das sind		100%	1%	11%	**49%**	30%	7%	1%

Lehr. steht für die betreuende Lehrerin dieser Klasse.

Schü. bedeutet die Anzahl der SchülerInnen in dieser Klasse.

[4] HANISCH 1990 (Seite 181) zitiert im Kapitel "Bewertung der Fehler": "Die Fehlerpunktesumme ergibt für die Praxis ein objektives Leistungsbild. Selbst wenn es nicht so wäre, müßte man schon aus praktischen Gründen so tun als ob. (LUDERER o.J., o.S.)" Für SchülerInnen, denen "der Zufall" übel mitgespielt hat, ist das allerdings ein schwacher Trost.

F.3 Mathematik als Stolperstein

Bereits in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, dass es im Fach Mathematik besonders oft zu Schulversagen kommt - wobei es sich wohl weniger um ein Versagen der SchülerInnen als um ein Versagen der Schule handelt:

Schließlich gehen SchülerInnen ja zur Schule, „um dort zu lernen und zwar im Mathematikunterricht Mathematik und nicht das Ertragen von Frustrationserlebnissen". Über das Versagen bei Mathematikschularbeiten schreibt HANISCH[1]: „Warum sollen dann die Schüler für den Fehler der Lehrkraft büßen, was doch der Fall ist, wenn fast die halbe Klasse mit Nicht genügend nach Hause geht. ... Daß sich diese Fälle gerade bei Mathematikschularbeiten häufen, ist meines Erachtens auch ein Versagen der Schulaufsicht."

Auch ROLLETT[2] stellt fest, „daß die Noten in Mathematik insgesamt schlechter sind, als die Noten in anderen Fächern." Sie meint dazu: „In so einem Fall wäre es empfehlenswert, entweder den Unterricht insgesamt zu verbessern, oder die Notenskala besser auszunützen. Es ist sicher wenig damit gewonnen, den Österreichern insgesamt zu bescheinigen, daß sie mathematisch unbegabt sind."

Ein kurzer Überblick über die Verteilung der Nicht genügend an der Schule, in der diese Untersuchung durchgeführt wurde, soll zeigen, dass auch dort die MathematiklehrerInnen den höchsten Anteil an negativen Beurteilungen zu verantworten haben.

Als Erstes wurden die Noten der schriftlichen Maturaarbeiten jener SchülerInnen erhoben, deren Mathematik-Maturaarbeiten Gegenstand dieser Arbeit sind. Die Ergebnisse sind in Tabelle F6 auf der nächsten Seite zusammengefasst.

Als Zweites wurden die Noten in den Jahreszeugnissen der SchülerInnen des Jahrgangs 1996/97 untersucht, und zwar von der 9. bis zur 12. Schulstufe (5. bis 8. Klasse), siehe Tabelle F7 auf der übernächsten Seite.

---

[1] Beide Zitate dieses Absatzes aus HANISCH 1990, Seite 66 und Seite 218.

Tabelle F6

Verteilung der Nicht genügend bei den schriftlichen Maturaarbeiten der Jahrgänge 1991 bis 1998 im BG + BRG Rahlg., Wien 6.

Fach	A	"5"	"5" / A	"5" / "5"ges.	A / A ges.
Mathematik	349	51	14,6%	46%	28%
Englisch	338	38	11,2%	34%	27%
Biologie	63	5	7,9%	5%	5%
Latein	75	5	6,7%	5%	6%
Französisch	41	2	4,9%	2%	3%
Deutsch	349	10	2,9%	9%	28%
Physik	16	0	0%	0%	1%
Italienisch	5	0	0%	0%	0%
Insgesamt	1236	111	9,0%	100%	100%

A Anzahl der Arbeiten im jeweiligen Fach (bzw. insgesamt)

"5" Anzahl der Nicht genügend im jeweiligen Fach (bzw. insgesamt)

"5" / A Anteil der mit Nicht genügend beurteilten Arbeiten (100% = A)

"5" / "5"ges. Anteil der Nicht genügend an allen negativen Beurteilungen (100% = 111)

A / A ges. Anteil der Arbeiten an allen Arbeiten (100% = 1236)

Von den 349 Mathematik-Maturaarbeiten wurden also 51 mit Nicht genügend beurteilt, das sind 14,6%, d.h., dass im Mittel eine von sieben Arbeiten negativ ausfiel!

Von allen vergebenen Nicht genügend entfielen 46% auf Mathematik, wobei aber nur 28% der Arbeiten in Mathematik geschrieben wurden.

[2] ROLLETT 1994, Seite 134.

In keiner einzigen Schulstufe gab es ein Fach, das mehr Nicht genügend aufwies als Mathematik! 12 von insgesamt 34 Nicht genügend entfielen auf Mathematik (das sind 35%), danach folgen Englisch und Physik mit je 6 Nicht genügend - ein deutlicher Abstand.

In Mathematik wurden 6% aller SchülerInnen negativ beurteilt, das ist ein deutlich geringerer Anteil als bei den Maturaarbeiten, aber im Mittel betraf das immerhin noch ein bis zwei SchülerInnen pro Klasse.

Tabelle F7

Nicht genügend in Mathematik in den Jahreszeugnissen der Oberstufenklassen 1996/97 im BG + BRG Rahlg., Wien 6.

	Anzahl Schü.	"5" in Mathe	"5" gesamt
8. Klasse	57	2	5
7. Klasse	46	4	11
6. Klasse	54	2	9
5. Klasse	52	4	9
Insgesamt	209	12	34

Anzahl Schü. Anzahl der SchülerInnen (jeweils 2 Klassen pro Schulstufe)

"5" in Mathe Anzahl der Nicht genügend in Mathematik in dieser Schulstufe

"5" gesamt Gesamtzahl der Nicht genügend in dieser Schulstufe (alle Fächer)

Ergänzend sei angemerkt, dass in den Schulnachrichten am Schluss des Wintersemesters[3] mehr als doppelt so viele Nicht genügend vergeben wurden als am Jahresende, nämlich 82.[4] Mathematik hatte daran mit 21 Nicht genügend (das sind 26 %) immer noch den höchsten Anteil, wenn auch einen geringeren als in den Jahreszeugnissen.

[3] Im inoffiziellen Sprachgebrauch einfach „Halbjahreszeugnis" genannt.

[4] Schon in der Volksschule ist es üblich, dass bei SchülerInnen, die zwischen zwei Noten stehen, im Halbjahreszeugnis die schlechtere Note gegeben wird.

G RESÜMEE

Während der Arbeiten im Archiv der Schule und in Gesprächen mit KollegInnen über das Thema dieser Untersuchung wurden dem Verfasser immer wieder Fragen wie z.B. "Sind die Aufgaben heute leichter als früher?"[1], "Zeigen sich Unterschiede zwischen den LehrerInnen?", "Woran (an welchen Fehlern) scheitern die MaturantInnen?" gestellt. Diese Fragen zeigen das rege Interesse am Themenkomplex "Matura & Fehler" (das auch beim Verfasser seit längerem gegeben ist - es war daher ein hohes Maß an Disziplin erforderlich, um nicht zu vielen Fragen nachzugehen und sich auf die gegebene Themenstellung zu beschränken).

Ein (zumindest für den persönlichen Lernprozess des Verfassers wichtiges) Ergebnis dieser Arbeit: Es wurde vieles gefunden, was eine beschreibende Fehleranalyse, die sich ausschließlich auf die Untersuchung schriftlicher Arbeiten stützt, *nicht* leisten kann.

Diese "Leider-nicht-Liste" soll als Erstes kurz vorgestellt werden, als Zweites werden dann die erarbeiteten Ergebnisse zusammengefasst.

G.1 Was nicht möglich war

1) Herausfinden der Fehlerursachen:

Zu einigen Fehlern drängten sich Vermutungen über mögliche Ursachen geradezu auf, bei anderen Fehlerphänomenen waren mehrere Fehlertechniken mit verschiedenen Fehlerursachen denkbar, viele Fehler gaben nur Anlass zu vagen Vermutungen über die Hintergründe ihrer Entstehung - umfassende Aussagen über Fehlerursachen können allein aufgrund der schriftlichen Arbeiten nicht gemacht werden.

---

[1] Der Unterton ließ erkennen, dass die Fragestellerin über ein Nein sehr verwundert gewesen wäre. Die Mär, dass "früher noch ‚ordentliche' (‚schwere') Mathematik betrieben wurde, heute aber den SchülerInnen ‚alles geschenkt wird' ", ist höchst lebendig. HANISCH 1993 (Seite 25) merkt dazu an: "Die Matura müßte der Papierform des Lehrplans zufolge anspruchsvoller werden." Zum Schwierigkeitsgrad der Maturaaufgaben siehe Abschnitt G.1 Punkt 4).

2) Beurteilung der Auswirkungen eines Fehlers:

Es ist nicht möglich, einem bestimmten Fehler eine bestimmte Auswirkung (z.B. als Abzug einer definierten Punktezahl und der daraus resultierenden Folgen für die Note)[2] zuzuordnen. Dies deshalb, weil die Auswirkungen eines Fehlers auf den weiteren Rechengang zufällig verteilt sind: Er kann folgenlos bleiben, das Weiterarbeiten erschweren oder es verunmöglichen; die Tatsache, dass ein Fehler passiert sein muss, kann leicht oder gar nicht zu erkennen sein. Ein Fehler kann auch weitere indirekte Auswirkungen wie Zeitverlust oder Entmutigung zur Folge haben.

3) Eine Untersuchung der die Fehlerart und -zahl beeinflussenden Variablen:

Die individuelle Schullaufbahn und die Leistungsfähigkeit im Fach Mathematik sowie emotionale und kognitive Faktoren (und eventuell das Geschlecht) einer SchülerIn, der Einfluss der LehrerIn und des Unterrichtsgeschehens (das u.a. vom Schultyp, vom Lehrplan und von der Klassengemeinschaft abhängt) sowie die jeweilige Aufgabenstellung (in der oft gerade die feinen Details fehlerrelevant sind) stellten ein nicht zu trennendes Variablenbündel dar.

4) "Messen" der Aufgabenschwierigkeit

Der tatsächliche Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe kann in Unkenntnis des vorangegangenen Unterrichtsgeschehens und des Prüfungsvorgangs nur sehr begrenzt eingeschätzt werden, am ehesten noch durch die bei der Prüfung geforderten Methoden.[3] HANISCH unterscheidet z.B. grob zwischen "Schema- und Nicht-Schema-Aufgaben" und fordert für eine nähere Beurteilung des subjektiven Schwierigkeitsgrades zumindest das Vorliegen der Schulübungshefte.[4]

---

[2] Unterschiedliche Verteilungen der Punkte auf die einzelnen Aufgabenteile und verschiedene Schlüssel, um aus der Punktezahl die Note zu errechnen, verstärken dieses Problem.

[3] Nach TESAR/SITTE 1993, Seite 10-11.

[4] HANISCH 1993, Seite 25.

5) Das Einbeziehen aller Fehler

a) Um den Aufwand in einem vertretbaren Rahmen zu halten, stützt sich die Untersuchung auf die von den LehrerInnen vorgenommenen Korrekturen: Rundungs- und Notationsfehler blieben teilweise unkorrigiert, daher konnten diese Fehler nicht in vollem Umfang in die Untersuchung einbezogen werden.

b) Von den SchülerInnen selbst Korrigiertes wurde (ebenfalls aufgrund des hohen Aufwands nur) stichprobenartig untersucht.

c) Fehler auf der Ebene der Planung und der begleitenden Kontrolle eines Rechengangs sind oft nicht oder nur sehr indirekt als Fehlerphänomen in der schriftlichen Aufgabenbearbeitung sichtbar.

G.2 Ergebnisse

Fehler sind nützlich!

"Du sollst nicht über Fehler schreiben, ohne ihre positiven Seiten zu erwähnen!"

Dieser Appell erscheint notwendig, um das Jagen und Verdammen der Fehler zu beenden, damit das Leben im Mathematikunterricht (angst)freier, kreativer und nicht zuletzt auch effektiver wird.[5]

Die Ergebnisse des empirischen Teils dieser Arbeit (Beispiele zu den einzelnen Fehler-Kategorien und die erhobenen Fehlerhäufigkeiten) sind in den Abschnitten D und E dargestellt - auf **die im Abschnitt E.2 zusammengefassten Punkte** sei hier ausdrücklich hingewiesen.

---

[5] Was nicht heißen soll, dass Fehler beim Bearbeiten der Maturafragen erwünscht sind - würde man sich früher um die Fehler kümmern, wie es ihnen gebührt, dann gäbe es vielleicht weniger davon bei der Matura. Eine fehlerfreie Matura wäre allerdings ein (unnötiges) nicht realisierbares Ziel, ein verständiger Umgang mit dem Maturastoff ist viel wichtiger.

Abgebrochene Rechengänge und von den SchülerInnen selbst Korrigiertes stellen einen interessanten und selten erwähnten Aspekt der Fehleranalyse dar (siehe Abschnitt F.1). Letzteres könnte auch am großen Aufwand liegen, der mit entsprechenden Untersuchungen verbunden ist.

Die Mathematikarbeiten weisen mit 15% (verglichen mit allen anderen schriftlichen Maturafächern) den höchsten Anteil negativer Beurteilungen auf - wobei die Klausurnoten noch besser sind als die Jahresnoten (siehe Abschnitt F.2 und F.3).

G.2.1 Mögliche Ursachen für Misserfolge bei der Matura

Im Folgenden sind einige Faktoren (soweit sie aus der vorliegenden Fehleranalyse ablesbar sind), die den Erfolg der SchülerInnen bei der schriftlichen Mathematikmatura gemindert haben, aufgelistet und mit möglichen Gegenmaßnahmen ergänzt.

1) Mangelhafte Beherrschung des Oberstufenstoffs

ist sicherlich die wichtigste Ursache. Es kamen zwar fast gleich viele Unterstufen- wie Oberstufen-Fehler vor, man muss aber bedenken, dass viele Unterstufen-Fehler flüchtigkeitsbedingt oder für das Lösen der gestellten Aufgaben von untergeordneter Bedeutung waren.

2) In einigen Klassen waren typische Fehler erkennbar,

d.h. dass ein Fehlerphänomen bei einer größeren Zahl von SchülerInnen (und das oft mehrfach) gefunden wurde - z.B. Unsicherheiten in der Verwendung von Richtungsvektor bzw. Normalvektor. Solche Fehler könnte man (spätestens) bei der Maturavorbereitung durch Testarbeiten, gekoppelt mit einer Fehleranalyse, erkennen und dann gezielt versuchen, gegenzusteuern.

3) Fehlende Teile in den Aufgabenbearbeitungen

können viele Ursachen haben, zumindest zwei davon kann die LehrerIn beeinflussen:

a) Zeitmangel,

b) Linear strukturierte Aufgaben,

sodass die SchülerIn keine weiteren Teile der Aufgabe bearbeiten kann, wenn sie steckenbleibt. Damit ist nicht der Verzicht auf komplexere Themenstellungen gemeint, es ist nur nicht einzusehen, warum eine SchülerIn z.B. eine Umkehraufgabe zur Kurvendiskussion bewältigen muss, bevor sie zeigen kann, dass sie die Integralrechnung bei der Berechnung von Flächeninhalten anwenden kann.

4) (Teils) gravierende Defizite aus dem Bereich des Unterstufenstoffs

waren bei rund 10 Prozent aller untersuchten Arbeiten als Ursache der gemachten Fehler (zwar nicht *eindeutig* feststellbar, aber doch) naheliegend. Dies sollte bei der Matura eigentlich nicht mehr vorkommen - ein möglicher Grund kann darin liegen, dass die betreffenden SchülerInnen falsche Vorstellungen von wichtigen mathematischen Grundkonzepten haben und nie jemand mit ihnen darüber geredet hat - in einer Gesprächskultur, die das Falsche zulässt, ernst nimmt und als Ausgangspunkt für einen gemeinsamen Weg zum Richtigen sieht.[6] Durch ein konstruktives Umgehen mit Fehlern im Unterricht sollte es gelingen, falsche Vorstellungen zu erkennen, statt sie zu stabilen Fehlermustern heranzuzüchten.[7]

---

[6] So konnte der Verfasser im Zuge der Einzelbetreuung einer SchülerIn aus der 6. (!) Klasse AHS feststellen, dass sie den Wirkungsbereich des Operatorzeichens "Minus" falsch "sah" - das führte immer wieder zu Vorzeichenfehlern und war ihr vorher nicht bewusst gewesen.

[7] Konkrete Ideen dazu findet man z.B. bei HANISCH 1998 und RADATZ 1985, bei REITBERGER 1989 gegen Flüchtigkeitsfehler.

5) Schwächen im Erkennen von Fehlern

und in der Fähigkeit, sie zu finden bzw. geeignet darauf zu reagieren.[8]

Das Erlernen bzw. gezielte Üben dieser Fähigkeiten dürfte in der üblichen Unterrichtspraxis viel zu selten (wenn überhaupt) vorkommen.

6) Die Überforderung des Kurzzeitgedächtnisses

ist für Fehler verantwortlich, bei denen die SchülerInnen zu viele Schritte im Kopf bewältigen wollten. Dem könnte man mit der "ketzerisch" klingenden Kurzformel "Mehr Schreiben - weniger Denken!" begegnen, d.h., man sollte den SchülerInnen den Sachverhalt bewusst machen und sie zu mehr "Schreibarbeit" ermutigen.[9]

7) Eine miserable Form der schriftlichen Arbeit

wurde bei einigen Maturaarbeiten vorgefunden, das erschwert nicht nur der korrigierenden LehrerIn das Leben - viel wichtiger ist, dass chaotisch angeordnete oder (auch für die SchülerIn selbst) kaum lesbar angeschriebene Rechengänge zu Fehlern führen können (und auch nicht unbedingt als Zeichen von "Reife" anzusehen sind).[10]

---

[8] Die SchülerIn hat ja die Wahl, den Fehler zu suchen und den bisher gerechneten Gang nachzukorrigieren, den Rechengang noch einmal zu rechnen oder einen anderen Lösungsweg zu wählen.

[9] Vergleiche HANISCH 1998, Seite 49.

[10] Sowohl was die äußere Form als auch die Exaktheit der mathematischen Schreibweise anlangt, stellt sich angesichts solcher Arbeiten bzw. der großen Zahl an Notationsfehlern die Frage, ob es wirklich sinnvoll ist, diese Aspekte bei der Beurteilung völlig unberücksichtigt zu lassen (vergleiche auch BIRTH u.a. in Kapitel A.3.1).

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit versteht sich als explorativer Beitrag zur beschreibenden Fehleranalyse.

Untersuchungsgegenstand waren 637 Aufgabenbearbeitungen zu 34 Aufgaben der schriftlichen AHS-Matura[1] aus den Arbeiten von 338 SchülerInnen einer Schule im 6. Wiener Gemeindebezirk (Gymnasium und Realgymnasium); die Aufgaben stammten aus den Jahren 1991 bis 1998.

Einer Klärung der verwendeten Termini in Zusammenhang mit dem komplexen Fehlerbegriff und der Konkretisierung des Untersuchungsplans folgte eine Vorerhebung. Zu den gefundenen Fehlerphänomenen wurde ein passendes System von Fehlerkategorien erstellt, sodass jedes Fehlerphänomen eindeutig einer Fehlerkategorie zugeordnet werden konnte. Die Fehlerkategorien wurden (soweit dies möglich war) dem Stoff der Oberstufe (Sekundarstufe II, 9. bis 12. Schulstufe) bzw. der Unterstufe (Sekundarstufe I, 5. bis 8. Schulstufe) der AHS zugeordnet und (insbesondere letztere) in Unterkategorien differenziert.

396 Aufgabenbearbeitungen (62%) enthielten Fehler, 176 (28%) waren vollständig richtig, der Rest war unvollständig, aber ohne Fehler. Die mittlere Fehlerhäufigkeit war 2,6 Fehler pro fehlerhafter Aufgabenbearbeitung, einer im Verhältnis zur Länge dieser Aufgaben geringe Zahl; 8% der fehlerhaften Arbeiten enthielten 10 oder mehr Fehler - dies hauptsächlich bei (Umkehr-)Aufgaben zur Kurvendiskussion und Berechnung von Flächeninhalten mittels Integralrechnung, bei diesen Aufgaben war die Fehlerhäufigkeit fast doppelt so hoch wie bei den anderen Aufgabentypen.

Bei den Unterstufenfehlern ist mit einem großen Anteil an Flüchtigkeitsfehlern zu rechnen - die Fehlerursache "Flüchtigkeit" kann bei einer Analyse, die sich ausschließlich auf die vorliegenden schriftlichen Arbeiten stützt, nicht eindeutig zugewiesen werden, daher musste auf ein Aussondern von (vermuteten) Flüchtigkeitsfehlern verzichtet werden. Bei rund 10% aller untersuchten

[1] Diese Abschlussprüfung am Ende der Sekundarstufe II nach 12 Schuljahren ist der häufigste Zugangsweg zu einem Universitätsstudium in Österreich; AHS (Allgemeinbildende Höhere Schule).

Aufgabenbearbeitungen dürften gravierende Defizite aus Bereichen des Unterstufenstoffs vorliegen.

Die Anzahl der Oberstufen- und Unterstufen-Fehler war mit jeweils rund 400 gleich groß, dazu kamen 200 andere Fehler (inklusive Übertragungsfehler). Bei Extremwertaufgaben wurden wesentlich mehr Unterstufen- als Oberstufen-Fehler gemacht, bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung war es umgekehrt.

Aus den gefundenen Fehlern kann auf die fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale in den untersuchten Aufgaben geschlossen werden:

Rund die Hälfte aller Unterstufen-Fehler waren der elementaren Algebra (Umformen von Gleichungen und Termen mit Variablen, Berechnen des Werts eines Terms mit Variablen) zuzuordnen, ein Viertel waren Rechenfehler, ein Viertel sonstige Fehler.

Die Unterstufen-Fehler waren in allen Aufgabentypen zu finden. Das Auftreten der Oberstufen-Fehler (im Wesentlichen zu den Stoffgebieten Wahrscheinlichkeits-, Differential-, Integral- und Vektorrechnung sowie Trigonometrie) war sehr aufgabenspezifisch.

Auffallend war die hohe Zahl an Notations- und Formalfehlern[2] (sie wurden nicht in die Arbeit einbezogen, sondern nur exemplarisch untersucht) - dies deutet auf z.T. eklatante Ausdrucksmängel in der mathematischen Symbolsprache hin.

Nur stichprobenartig untersucht wurden Korrekturen, welche die SchülerInnen selbst vorgenommen hatten, ihre Zahl übersteigt die Zahl der Fehler, die von den LehrerInnen korrigiert wurden, deutlich. Zusammen mit abgebrochenen Rechengängen stellen sie einen interessanten Aspekt der Fehleranalyse dar.

Das Entdecken typischer Fehler in einigen Klassen zeigt einen weiteren wichtigen Aspekt der Fehleranalyse, die im Unterricht viel stärker zum Einsatz kommen sollte.

[2] Diese Fehler, die häufiger waren als alle anderen Fehler, wurden nur teilweise korrigiert und blieben praktisch ohne Einfluss auf die vergebenen Punkte.

ABSTRACT

In einer explorativen Studie wurde eine inhaltsorientierte, beschreibende Analyse der SchülerInnenfehler in 637 Aufgabenbarbeitungen der schriftlichen Mathematik-Matura in Österreich (an einer AHS [Allgemeinbildende Höhere Schule] aus den Jahren 1991 bis 1998) durchgeführt. In einem ersten Schritt wurden die Fehler in Unterstufen- und Oberstufen-Fehler (Fehler aufgrund von Mängeln im Wissen bzw. Können der Sekundarstufe I bzw. II) klassifiziert, anschließend wurde ein Kategoriensystem entwickelt: 6 Kategorien (differenziert in 16 Unterkategorien) zu Unterstufen-Fehlern, 8 Kategorien zu Oberstufen-Fehlern. Das Hauptaugenmerk der Studie war auf die Unterstufenfehler gerichtet – sie enthält Beispiele und eine genaue Beschreibung jeder Unterstufenkategorie, um ein disjunktes Kategorisierungssystem sicher zu stellen. Die wichtigsten Ergebnisse zur Verteilung der Fehlerhäufigkeiten: Von den 1038 gefundenen Fehlern konnten 832 den obigen Kategorien zugeordnet werden. 405 davon waren Unterstufenfehler, 76% von diesen resultieren aus Problemen mit elementarer Algebra oder Arithmetik. Die Ergebnisse ermöglichen eine Aussage über die fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale in den untersuchten Aufgaben.

In an explorative study a content-oriented descriptive analysis of students’ errors in 637 written exams was done in Austrian school leaving examinations in mathematics (at a grammar school from 1991 to 1998). In a first step errors were classified whether they could be traced back to a lack of knowledge (or skills) of the first (age 10 - 14) or second (age 15 - 18) level of secondary education. Then a category system was developed: 6 categories (subdivided into 16 lower parts) for errors associated with level I, 8 categories for errors associated with level II. The study was focused on the ”level I”-errors and contains detailed descriptions and examples of each ”level I”-category in order to make sure that the categories are mutually exclusive. The main results of the errors’ frequency distribution were: out of the 1038 discovered errors 832 could be related to one of the above categories. 405 of them were ”level I”-errors, 76 % of these originated from problems with elementary algebra or arithmetic. The results allow to identify some difficulty criteria that lead to specific errors in the exams.

LITERATUR

BARUK, S. (1989): Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik; Birkhäuser, Basel.

BAUMERT, J.; u.a. (Hrsg.) (1999): Testaufgaben zu TIMSS-III: mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlußklassen der Sekundarstufe II (Population 3); Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin, Materialien aus der Bildungsforschung Nr. 62.

BAUMERT, J.; BOS W.; WATERMANN, R. (1999): TIMSS-III: Schülerleistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften am Ende der Sekundarstufe II im internationalen Vergleich, Zusammenfassung deskriptiver Ergebnisse; Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin, Studien und Berichte Nr. 64, 2. Auflage.

BECKER, G. (1985): Fehler in geometrischen Beweisen von Schülern der Sekundarstufe 1; in: MU 6/1985, Seite 48-64.

BIRTH, I. u.a. (1979): Zu Ergebnissen der schriftlichen Abschluß- und Reife-prüfungen im Fach Mathematik des Schuljahres 1977/78 und den sich daraus ergebenden Schlussfolgerungen für die Unterrichtsarbeit und die Vorbereitung der Prüfungen am Ende des Schuljahres 1978/79; in: Math. Sch. 17 (1979) 1, Seite 16-27.

BROWN, J. S.; VAN LEHN, K. (1980): Repair theory: A general theory of bugs in procedural skills; in: Cognitive Science 4 (1980), Seite 155-192.

CAMPIONE, J. C. (1984): Ein Wandel in der Instruktionsforschung mit lernschwierigen Kindern: Die Berücksichtigung metakognitiver Komponenten; in: WEINERT, F. E.; KLUWE, R. H. (Hrsg.) (1984): Metakognition, Motivation und Lernen; Stuttgart.

CASEY, D.P. (1978): Failing Students: A Strategy of Error Analysis; in: COSTELLO (ed.): Aspects of Motivation; Seite 295-306; Mathematical Association of Victoria, Melbourne.

CLEMENTS; M. A. (1980): Analyzing Children´s Errors on Written Mathematical Tasks; Educational Studies in Mathematics 1, Seite 1-21.

COX, L. S. (1975): Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped population; in: Journal for Research in Mathematics Education 6 (1975) 4, Seite 202-220.

FIALA, F.; MOSER W. (1989): Mathematik Maturaaufgaben; hpt, Wien, 5. Auflage.

FRANKE, M.; WYNANDS A. (1991): Zum Verständnis von Variablen - Testergebnisse in 9. Klassen Deutschlands; in: Math. Sch. 29 (1991) 10, Seite 674-691.

FRÖHLICH, W. D. (1993): Wörterbuch zur Psychologie; dtv, München, 19. Auflage.

GERSTER, H.-D. (1984): Lerndefizite als Folge von Lehrdefiziten? - Erfahrungen aus der Analyse von Schülerfehlern bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: LORENZ, J. H. (Hrsg.) (1984): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis, Köln, Seite 56-74.

HANISCH, G. (1985): Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen?; in: DOERFLER, W.; FISCHER R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik; Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, UBW Klagenfurt, Band 10, Seite 75-82, hpt, Wien.

HANISCH, G. (1990): Problematik der Leistungsfeststellungen durch schriftliche Arbeiten am Beispiel der Mathematik; Habilitationsschrift an der Grund- und Integrativwissenschaftlichen Fakultät der Uni Wien.

HANISCH, G. (1993): Die Reifeprüfung in Mathematik - ein Vergleich; in: Pädagogisches Institut der Stadt Wien, pädagogik innovativ 1993/1, Seite 23-25.

HANISCH, G. (1995): Wozu ist der Mathematikunterricht gut? in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Heft 23, Seite 106-127.

HANISCH, G. (1998): Fehler - eine Chance zum Lernen; in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Heft 29, Seite 48-54.

HASEMANN K. (1985): Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitionstheoretischen Modellen; in: MU 6/1985, Seite 6-15.

HASEMANN K. (1986): Mathematische Lernprozesse. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden.

VOM HOFE, R. (1996): Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken; in: mathematik lehren 78, Seite 4-8.

KARGL, M; WETSCHANOW, K.; WODAK R. (1999): Kreatives Formulieren - Anleitungen zum geschlechtergerechten Sprachgebrauch; Bundeskanzleramt, Abt. VII/1 (Hrsg.), Wien, Schriftenreihe der Frauenministerin, Band 13, 2. Auflage.

KOTH, M. (1993): 100 Maturaaufgaben mit vollständigen Lösungen; hpt, Wien.

LANDAUER, T. (1997): Versagen im Mathematikunterricht - Eine empirische Untersuchung unter leistungsschwachen Schülern; Diplomarbeit, Universität Wien.

LEITNER, L.; BENEDIKT, E. (Hrsg.) (1991): Lehrplanservice für das allgemeinbildende Schulwesen, Mathematik, AHS-Oberstufe, Kommentar. ÖBV, Wien.

LORENZ, J. H. (1987): Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematikdidaktischen Forschung – oder: Wieweit sind Rezeptionen der Fehleranalyse fehlerhaft?; in: JMD 8 (1987) 3, Seite 205-228.

LÖRCHER, G. A. (1979): Thesen zum Arbeitskreis "Schülerfehler - Diagnose und Therapie"; 13. Bundestagung Didaktik der Mathematik, Freiburg 1979.

LÖRCHER, G. A. (1984): Lernhindernisse im Mathematikunterricht; in: LORENZ, J. H. (Hrsg.) (1984): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis, Köln.

MAIER, H (1982): Schülerfehler im Mathematikunterricht; 2. Bericht, Universität Regensburg.

MALLE; G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra; Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden.

MASCHKA, C. (1993): 1000 Maturaaufgaben, Sammlung mit Ergebnissen; hpt, Wien.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR S. (1987): An empirical classification model for errors in High School mathematics; in: J. Res. Math. Educ. 18 (1987) 1, Seite 3-14.

MÜLLER, M. (1995): Relevanz verschiedener Einführungswege in die Trigonometrie - Eine empirische Untersuchung; Diplomarbeit, Universität Wien.

MÜLLER, M. (1998): Analyse von Schülerfehlern in der Trigonometrie; Dissertation, Universität Wien.

NEWMAN, M. A. (1977): An Analysis of Sixth-grade Pupils´ Errors on Written Mathematical Tasks, in: CLEMENTS, M. A. (ed.): Careless Errors Made by Sixth-grade Children on Written Mathematical Tasks; Research in Mathematics Education in Australia (1977) Vol. I, Seite 239-258, Melbourne.

NOVAK J, u.a. (1991): Mathematik Oberstufe, Band 3; Reniets Verlag, Wien

PADBERG, F. (1989): Dezimalbrüche - problemlos und leicht?; in: Mathemat.-naturwiss. U. Oktober 1989, Seite 278-341.

PESCH, C. (1996): Kognitive Fehlerursachen in der Mathematik; Diplomarbeit, Wien.

RADATZ, H. (1976): Individuum und Mathematikunterricht; Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

RADATZ, H. (1980a): Fehleranalysen im Mathematikunterricht; Vieweg, Braunschweig.

RADATZ, H. (1980b): Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht; in: JMD 1 (1980) 4, Seite 213-228.

RADATZ, H. (1985): Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht; in: MU 6/1985.

REICHEL, H.-C. (1989): Realitätsproblem mathematischer Begriffe; in: OESER, E.; BONET, E. M. (Hrsg.): Das Realismusproblem; Springer, Wien, Seite 95-157.

REICHEL, H.-C. (1993): Bildung durch Mathematik; in: KOEHLER, H.; ROETTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht; Polygon-Verlag, Buxheim-Eichstätt, Seite 113-126.

REICHEL, H.-C. (1998): Neuansätze und eine andere Sichtweise des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts [Anhang: Gedanken zu den (eher schlechten) Ergebnissen der dritten TIMS-Studie (TIMSS)]; in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (Oct 1998), v. 30(5), Seite 152-160.

REICHEL, H.-C.; GÖTZ S. (1998): TIMSS: Informationen, Beispiele, Folgerungen; hpt, Wien.

REICHEL, H.-C.; MÜLLER R.; HANISCH G. (1999a): Lehrbuch der Mathematik 5; htp, Wien, 4. Auflage.

REICHEL, H.-C.; MÜLLER R.; HANISCH G. (1999b): Lehrbuch der Mathematik 6; htp, Wien, 4. Auflage.

REICHEL, H.-C.; MÜLLER R.; HANISCH G. (1999c): Lehrbuch der Mathematik 7; htp, Wien, 4. Auflage.

REICHEL, H.-C.; MÜLLER R.; HANISCH G. (1999d): Lehrbuch der Mathematik 8; htp, Wien, 3. Auflage.

REITBERGER, W. (1989a): Über die Behandlung von LEISTUNG und SCHWIERIGKEIT als Moderatorvariablen explorativer Unterrichtsforschung; in: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft, Band 30 (1989) 2, Seite 65-76.

REITBERGER, W. (1989b): Was versteht man unter Flüchtigkeitsfehlern und wie kann man sie durch unterrichtliche Maßnahmen verhüten?; in: ZDM 89/3, Seite 111-115.

REITBERGER, W. (1992): Untersuchungen zum „nicht-geometrischen" Bruchzahlbegriff von Haupt- und Realschülern: typische Fehler und deren Ursachen; in: JMD 13 (1992) 4, Seite 291-309.

ROLLETT, B. (1994): Einführung in die pädagogische Psychologie und ihre entwicklungspsychologischen Grundlagen; WUV-Universitätsverlag, Wien, 4. Auflage.

SANDER, E.; BERGER M. (1985): Fehleranalysen bei Sachaufgaben zur Prozentrechnung: Zwei Explorationsstudien; in: Psycholog. Erz. Unterricht, 32. Jg., 1985, Seite 254 - 262.

SHAMOS, M. H. (1995): The myth of scientific literacy; Rutgers Univ. Press, New Brunswick, NJ.

SOMMER, N. (1985): Die Erfassung von Unterrichtseffekten durch Fehleranalysen; in: MU 6/1985, Seite 38-47.

TESAR, E.; SITTE C. (1993): Maturaniveau. Eine Studie über die Entwicklung und den Stand der Reifeprüfung; in: Pädagogisches Institut der Stadt Wien, pädagogik innovativ 1993/1.

TIEDEMANN, J. (1977): Leistungsversagen in der Schule, Goldmanns gelbe Taschenbücher.

TIETZE, U.-P. (1986): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in der Algebra; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986, Schroedel, Hannover, Seite 304-307.

TÖNIES, E. (1986): Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit Mathematik-Schularbeitstexten. Dissertation, Wien.

TORBERG, F. (1998): Der Schüler Gerber; dtv, München, 27. Auflage.

TREMSCHNIG, P. (1995): Empirische Untersuchungen zur elementaren Algebra; Diplomarbeit, Wien.

WELLENREUTHER, M. (1986): Zur Methodologie "der Fehleranalyse" in der mathematikdidaktischen Forschung - oder: Wieweit sind Fehleranalysen fehlerhafte Analysen?; in: JMD 7 (1986) 4, Seite 269-303.

ANHANG

Die Angaben der untersuchten Maturaarbeiten

Klasse 8A/91:

Klasse 8B/91:

Klasse 8B/91 (Fortsetzung):

Klasse 8A/92:

Klasse 8B/92:

Klasse 8B/92 (Fortsetzung):

Klasse 8C/92:

Klasse 8A/93:

Klasse 8B/93:

Klasse 8B/93 (Fortsetzung):

Klasse 8C/93:

Klasse 8A/94:

Klasse 8B/94:

Klasse 8A/95:

Klasse 8B/95:

Klasse 8B/95 (Fortsetzung):

Klasse 8C/95:

Klasse 8A/96:

Klasse 8B/96:

Klasse 8B/96 (Fortsetzung):

Klasse 8A/97:

Klasse 8A/97 (Fortsetzung):

Klasse 8B/97:

Klasse 8B/97 (Fortsetzung):

Klasse 8A/98:

Klasse 8A/98 (Fortsetzung):

Klasse 8B/98:

Lebenslauf

Geboren am 7. August 1959 in Wr. Neustadt.

In Mattersburg (Burgenland) Besuch der Volksschule und des naturwissenschaftlichen Realgymnasiums, Matura 1977.

Im Herbst 1977 Übersiedlung nach Wien, Inskription an der Universität: Mathematik und Chemie Lehramt, beides als Hauptfach.

1982 bis 1985 in der Österreichischen Hochschülerschaft in verschiedenen Arbeitsgebieten (z.B. Fakultätsvertretung, Hauptausschuss) tätig.

Ab 1985 neben dem Studium berufstätig (u.a. als LKW-Lenker, Hauswart).

1986 Absolvieren der letzten vorgeschriebenen Prüfung des Lehramtsstudiums Mathematik und Chemie.

Seit 1990 als Lehrer für Mathematik und Chemie im 2. Bildungsweg (für Studienberechtigungsprüfung, Externistenmatura, u.Ä.) tätig (VHS Floridsdorf, Humboldt-Maturaschule, u.a.).

1996 Abschluss des Chemiestudiums mit Hausarbeit und Lehramtsprüfung bei Univ.-Prof. Olaj am Institut für Physikalische Chemie.

Seit 1996 Mitarbeit an Forschungsprojekten des Instituts für Materialphysik der Universität Wien (bei Univ.-Prof. Bajons), teilweise in Zusammenarbeit mit der Umweltberatung Wien.

Pädagogik-Lehramtsprüfung: Schriftlicher Teil bei Univ.-Prof. Rollett (1996), mit mündlichem Teil abgeschlossen bei Univ.-Prof. Gruber (1999).

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbst verfasst und außer den bezeichneten Quellen und Hilfsmitteln nichts benutzt habe.

....

Mario Wunderl