14. EINFÜHRUNG IN DIE INTEGRALRECHNUNG

14.1. Problemstellung

(a) Stammfunktionen

Im Kapitel Differentialrechnung wurde festgestellt, daß es einen Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung bewegter Körper gibt. So konnte gezeigt werden, daß die Ableitung des Weges nach der Zeit die Geschwindigkeit ergibt: $s'(t) = v(t)$

Kennt man umgekehrt die Beschleunigung eines Körpers vom Beginn der Bewegung an und ist dadurch auch seine Geschwindigkeit v nach der Zeit t bekannt, so sollte es doch auch möglich sein, den zurückgelegten Weg zu ermitteln.

***Beispiel**: Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nimmt jede Sekunde um annähernd 10m/s zu. Wie groß ist der zurückgelegte Weg*
- nach den ersten t Sekunden
- im Zeitintervall $[t_1;t_2]$?

Da die Geschwindigkeit jede Sekunde um 10m/s zunimmt, beträgt die Geschwindigkeit nach t Sekunden

$$v(t) = 10t$$

Da der Zusammenhang $s'(t) = v(t)$ bekannt ist, gilt es also nun jene Funktionen s(t) zu finden, für die gilt:

$$s'(t) = 10t$$

Wie man leicht durch Probieren ermitteln kann, gilt dies z.B. für die Funktion $s(t) = 5t^2$; es gilt aber auch für jede Funktion $s(t) = 5t^2 + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist. Auch dann gilt $s'(t) = 10t$.

$$s(t) = 5t^2 + c$$

Aus den unendlich vielen möglichen Funktionen $s(t) = 5t^2 + c$ muß die richtige ermittelt werden. Da der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ auch Null ist, gilt $s(0) = 0$ und daher in diesem Fall auch $c = 0$.

$$s(t) = 5t^2$$

Will man abschließend noch den zurückgelegten Weg im Zeitinervall $[t_1;t_2]$ ermitteln, so braucht man nur die Differenz der Wege zu den beiden Zeiten t_1 und t_2 ermitteln.

$$s(t_1;t_2) = s(t_2) - s(t_1) = 5(t_2^2 - t_1^2)$$

Verallgemeinert man die Vorgangsweise im vorigen Beispiel, bedeutet dies, daß zu einer vorgegeben Funktion f eine weitere Funktion F gefunden wurde, sodaß F´ = f gilt. Eine solche Funktion F nennt man Stammfunktion von f.

Ist f eine reelle Funktion, dann heißt eine reelle Funktion F eine **Stammfunktion** von f, wenn F´=f gilt.

Exakterweise muß angeführt werden, daß die Funktionen F und f die gleiche Definitionsmenge haben.

Durch das vorige Beispiel hat sich auch folgender Satz ergeben:

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch F+c eine Stammfunktion von f.

Naheliegenderweise gelten auch folgende Aussagen:

Sind F und G Stammfunktionen von f und g, dann ist F + G Stammfunktion von f + g. k·F ist Stammfunktion von k·f (k∈R).

Ist für die Stammfunktion wie auch im vorigen Beispiel ein Wertepaar vorgegeben, dann läßt sich die Stammfunktion eindeutig bestimmen.

***Beispiel**:* *Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = x^2 - 5$, für die F(1)=2 ist.*

Die allgemeine Stammfunktion von f(x) lautet: $$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + c$$

Die Ableitung von F(x) ergibt in allen Fällen die Funktion f(x). Da nun F(1)=1 ist, kann c berechnet werden.

$$F(1) = \frac{1}{3} - 5 + c$$

$$1 = \frac{1}{3} - 5 + c$$

$$c = \frac{20}{3}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + \frac{20}{3}$$

(b) Unter- und Obersummen

Die Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren hat die Wissenschaft seit dem Altertum beschäftigt. Im speziellen sind die Mathematiker jedoch immer wieder an der Berechnung des Flächeninhaltes krummlinig begrenzter Figuren gescheitert und konnten oft nur Näherungsformeln finden. Der folgende Abschnitt versucht den Begriff des Flächeninhaltes exakt zu definieren und allgemeine Flächenberechnungen durchzuführen.

Versucht man den Flächeninhalt zu berechnen, den eine Funktion f in einem Intervall [a;b] mit der x-Achse (und den Ordinaten in den Intervallenden) einschließt, so ist es eine naheliegende Möglichkeit, das Intervall in Teilintervalle zu zerlegen und über diesen Teilintervallen Rechtecke zu errichten. Die Flächeninhalte der Rechtecke lassen sich leicht berechnen und die Summe dieser Flächeninhalte ist eine Annäherung für den gesuchten Flächeninhalt. Exakt läßt sich eine solche Zerlegung folgendermaßen beschreiben:

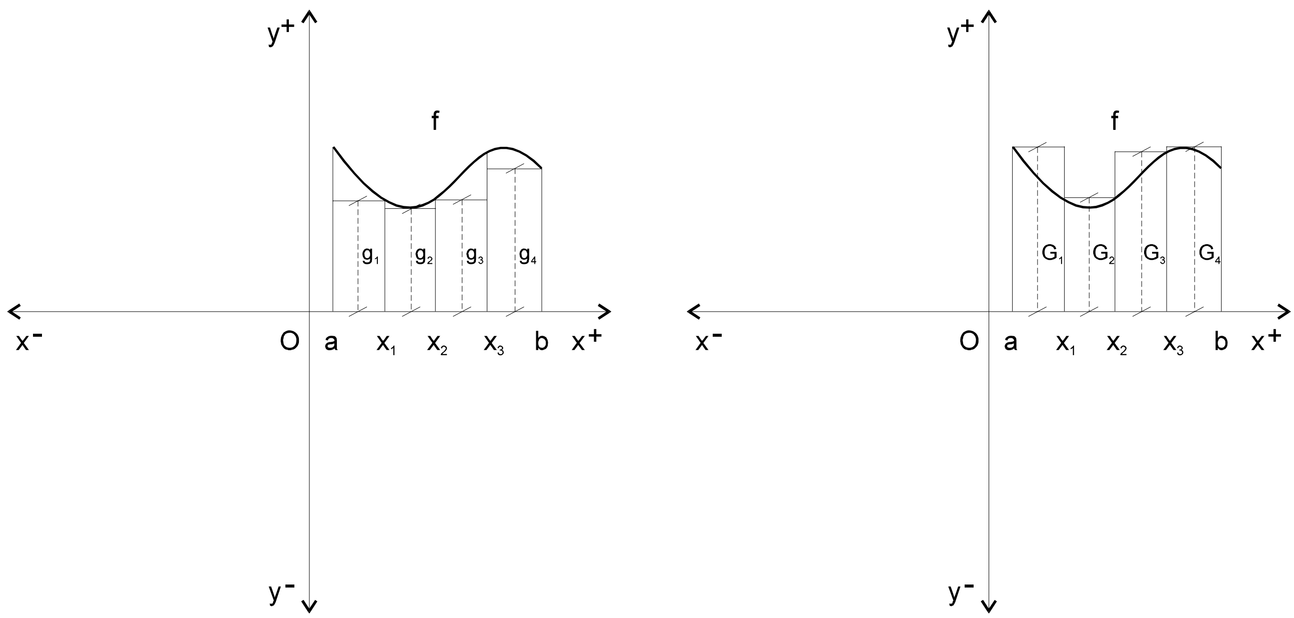
Eine **Zerlegung** Z eines Intervalls [a;b] mit a<b ist eine endliche Folge von reellen Zahlen $\langle x_0; x_1; ...; x_n\rangle$ mit $a = x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n = b$. Die n Intervalle $I_k = [x_{k-1};x_k]$ mit $1\leq k\leq n$ heißen Teilintervalle der Zerlegung Z; die Zahlen x_k heißen ihre Teilungspunkte. Die Länge des k-ten Teilintervalls bezeichnet man mit Δx_k; es gilt $\Delta x_k = x_k-x_{k-1}$. Die Zerlegung heißt äquidistant, wenn alle Teilintervalle gleiche Längen haben.

Zur Vereinfachung der Vorgangsweise wählt man üblicherweise gleiche Längen für die Teilintervalle. Da dies mit einer Teilung des Intervalls [a;b] in n gleich große Teilintervalle gleichkommt, gilt: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Für die gewünschte Flächenberechnung ist es notwendig, daß die Funktion im Intervall [a;b] beschränkt und nicht negativ ist. Dies bedeutet, daß folgendes gilt: $a\leq x\leq b;\ 0\leq f(x)$

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten Rechtecke über den Teilintervallen zu errichten. Einerseits kann man Rechtecke größter Höhe errichten, sodaß das Rechteck unter der Funktion im Intervall I_k eingeschrieben ist. Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei g_k. Andererseits kann man Rechtecke kleinster Höhe errichten, sodaß das Rechteck die Funktion im Intervall I_k umfaßt. Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei G_k.

Die folgenden beiden Abbildungen sollen diese beiden Möglichkeiten verdeutlichen, wobei für die Zerlegung $n = 4$ gewählt wurde.



Der Flächeninhalt für die einzelnen Rechtecke unterhalb der Funktion beträgt nun $g_k \cdot \Delta x$.

Der Flächeninhalt für die einzelnen Rechtecke oberhalb der Funktion beträgt nun $G_k \cdot \Delta x$.

Durch Summation der einzelnen Rechtecksflächeninhalte erhält man die zur Zerlegung Z gehörige Untersumme und Obersumme des Flächeninhaltes der Funktion f im Intervall [a;b].

> Die Summe $U(Z) = \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \Delta x$ heißt die zur Zerlegung Z gehörende **Untersumme** der Funktion f. Entsprechend heißt die Summe $O(Z) = \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot \Delta x$ die zur Zerlegung Z gehörende **Obersumme** der Funktion f.

Bezeichnet man mit g die größte innere Höhe und mit G die kleinste äußere Höhe des Rechtecks, wenn das Intervall [a;b] nicht zerlegt wird und $\Delta x = b - a$ ist, dann gilt: $g \cdot (b-a) \le U(Z) \le O(Z) \le G \cdot (b-a)$

Ist A(f) der tatsächliche Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse, gilt darüberhinaus $U(Z) \le A(f) \le O(Z)$. Die Differenz D(Z) = O(Z)–U(Z) bezeichnet man als das zur Zerlegung Z gehörende Schwankungsmaß.

Für alle möglichen Zerlegungen Z von [a;b] erhält man die Menge aller Untersummen {U(Z)} und die Menge aller Obersummen {O(Z)}. Diese beiden Mengen sind nicht leer und laut voriger Ungleichung beschränkt. Im speziellen ist die Menge der Untersummen nach oben und die der Obersummen nach unten beschränkt. Es existiert also eine kleinste obere Schranke (Supremum) $U_s = \sup\{U(Z)\}$ und eine größte untere Schranke (Infimum) $O_s = \inf\{O(Z)\}$.

Ist f eine im Intervall [a;b] beschränkte Funktion, so ist das **Supremum** der Menge aller zu f gehörenden Untersummen kleiner oder gleich dem **Infimum** der Menge aller zu f gehörenden Obersummen $U_s \leq O_s$.

Beispiel: *Berechnen Sie U_s und O_s der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall [0;2].*

Die Funktion ist im Intervall [0;2] stetig und beschränkt. Die Unter- und Obersummen lassen sich also bilden.

Zerlegt man das Intervall [0;2] in n gleich lange Interfalle, erhält man die Zerlegung

$$Z = \left\langle 0; \frac{2}{n}; \frac{4}{n}; \ldots; (k-1)\cdot\frac{2}{n}; k\cdot\frac{2}{n}; \ldots; (n-1)\cdot\frac{2}{n}; 2 \right\rangle$$

Da die Funktion im Intervall [0;2] streng monoton zunehmend ist, ist der kleinest Funktionswert in jedem Teilintervall der Funktionswert des linken Intervallrandes, der größte Funktionwert der Funktionswert des rechten Intervallrandes.

Für die Untersumme bedeutet dies:

$$U(Z) = \frac{2}{n}\cdot\left[f(0) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$U(Z) = \frac{2}{n}\cdot\left\{\left[0^2+1\right] + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right] + \ldots + \left[\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^2 + 1\right]\right\} =$$

$$\frac{2}{n}\cdot\left[\frac{4}{n^2}\cdot\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) + n\right] =$$

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{4}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{2}{n}\cdot n =$$

$$\frac{14}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Hierbei wurde folgender Zusammenhang verwendet: $$0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

Für die Obersumme errechnet man: $$O(Z)=\frac{2}{n}\cdot\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)\ldots+f(2)\right]$$

$$O(Z)=\frac{2}{n}\cdot\left\{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+1\right]+\left[\left(\frac{4}{n}\right)^2+1\right]\ldots+\left[(2)^2+1\right]\right\}=$$

$$\frac{2}{n}\cdot\left[\frac{4}{n^2}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+n\right]=$$

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{2}{n}\cdot n=$$

$$\frac{14}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

Hierbei wurde folgender Zusammenhang verwendet: $$1^2+2^2\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Das Supremum von {U(Z)} ist nun $$U_s=\sup\left\{\frac{14}{3}-\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right\}=\frac{14}{3}$$

Das Infimum von {O(Z)} ist nun $$O_s=\inf\left\{\frac{14}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right\}=\frac{14}{3}$$

Dieses Ergebnis ist vergleichbar mit der Grenzwertbildung für $n\to\infty$, wenn also die Zerlegung in immer mehr Teilintervalle erfolgt.

In diesem Fall ist die größte Untersumme gleich groß wie die kleinste Obersumme: $$U_s=O_s$$

Das Schwankungsmaß beträgt $$D(Z)=O(Z)-U(Z)=\frac{8}{n}$$

Durch Wahl eines Wertes für n kann man dieses Maß beliebig klein machen: $$\frac{8}{n}<\varepsilon;\ n>\frac{8}{\varepsilon}$$

14.2. Das Integral

(a) Definition

Eine Funktion f im Intervall [a;b] heißt integrierbar in [a;b], wenn sie in [a;b] beschränkt ist und das Supremum der Menge aller zu f gehörenden Untersummen mit dem Infimum der Menge aller zu f gehörenden Obersummen übereinstimmt, also $U_s = O_s$ gilt. Dieser gemeinsame Zahlenwert heißt dann das **Integral** der Funktion f in [a;b] und wird mit $\int_a^b f$ bzw. mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

$\int_a^b f$ wird gelesen: Integral von a bis b über f. $\int_a^b f(x)\,dx$ wird gelesen: Integral von a bis b von f(x) nach dx.

Diese Symbolik hat sich aus der im vorigen Abschnitt beschriebenen Summenbildung ergeben. Auch das dx ist nur eine symbolische Schreibweise ähnlich der bei der Differentialrechnung und soll im speziellen die Integrationsvariable x kennzeichnen. Die Intervallgrenzen a und b heißen in diesem Zusammenhang Integrationsgrenzen, die Funktion f heißt Integrand.

Jede auf [a;b] stetige Funktion ist in diesem Intervall integrierbar. Ist die Funktion in jedem Intervall ihrer Definitionsmenge integrierbar, so heißt die Funktion integrierbar.

Um das Hervorgehen des Intergrals aus der Summenbildung noch einmal zu verdeutlichen, ist die obige Definition im Anschluß als Grenzwertberechnung angeschrieben, wobei die $\overline{x}_k$ jene x-Werte sind, deren Funktionswerte $f(\overline{x}_k)$ die einzelnen Rechteckshöhen bilden.

Ist f eine stetige Funktion in [a;b], so gilt: $\int_a^b f(\overline{x}_k)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\cdot \Delta x$

Das Integral ist also das Ergebnis einer Grenzwertberechnung. Ein Flächenstück, das von einer Funktion f in einem Intervall [a;b] und der x-Achse (und den Ordinaten in den Intervallenden) begrenzt wird, heißt meßbar, wenn dieser Grenzwert existiert (wenn also U_s mit O_s übereinstimmt). Dieser Zahlenwert ist dann der Flächeninhalt des Flächenstücks. Wählt man als Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen die Folge der Zerlegungen von [a;b] in n gleich lange Teilintervalle, dann ist $\langle x_k\rangle$ eine arithmetische Folge. Wählt man zusätzlich immer das linke Intervallende als $\bar{x}_k$, so ergibt sich folgende Zerlegung und Grenzwertformel zur Berechnung des Integrals:

$$Z = \left\langle a; a+h; a+2h; \ldots; a+(n-1)\cdot h; b\right\rangle \text{ mit } h = \frac{b-a}{n} \text{ und } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie* $\int_a^b e^x\ dx$.

Die Funktion ist in jedem Intervall [a;b] stetig und daher integrierbar. Die Zerlegung in gleich lange Teilintervalle lautet:

$$Z = \left\langle a; a+h; a+2h; \ldots; a+(n-1)\cdot h\right\rangle \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}$$

Die Summenbildung ergibt:

$$S(Z) = h\cdot\left[e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots + e^{a+(n-1)\cdot h}\right]$$

$$S(Z) = h\cdot e^a\cdot\left[1+e^h+(e^h)^2+\ldots+(e^h)^{n-1}\right] = h\cdot e^a\cdot\frac{e^{h\cdot n}-1}{e^h-1} = h\cdot e^a\cdot\frac{e^{b-a}-1}{e^h-1} = \frac{e^b-e^a}{\frac{e^h-1}{h}}$$

Da die Funktion integrierbar ist, muß nicht zwischen Unter- und Obersumme unterschieden werden. Für die Summenbildung wurde die Formel für geometrische Folgen verwendet.

Die Grenzwertberechnung ergibt:

$$\int_a^b e^x\ dx = \lim_{n\to\infty} S(Z) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^b-e^a}{\frac{e^h-1}{h}} = \frac{e^b-e^a}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^h-1}{h}} = e^b-e^a$$

Zuweilen ist es sinnvoll, das Intervall [a;b] in n ungleich lange Teilintervalle zu teilen, wobei $\langle x_k\rangle$ eine geometrische Folge bilden soll. Wählt man zusätzlich immer das linke Intervallende als $\bar{x}_k$, so ergibt sich folgende Zerlegung und Grenzwertformel zur Berechnung des Integrals:

$$Z = \left\langle a; a\cdot q; a\cdot q^2; \ldots; a\cdot q^{n-1}; b\right\rangle \text{ mit } q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \text{ und } \Delta x = aq^{k-1}(q-1)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = a\cdot\lim_{n\to\infty}(q-1)\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(aq^{k-1}\right)\cdot q^{k-1}$$

(b) Eigenschaften des Integrals

Bisher war für das Definitionsintervall [a;b] stets a<b vorausgesetzt. Die Anschauung sowie die vorigen Berechnungsformeln legen folgende Aussagen nahe:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Die nachstehenden Rechenregeln sind für das Umformen und Berechnen des Integrals von Funktionen wichtig.

Sind f und g in [a;b] integrierbar, so gelten folgende Rechenregeln:

$$\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f;\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f;\ a < c < b$$

(c) Integralfunktion einer Funktion

Ist f eine in [a;b] integrierbare Funktion, dann existiert nicht nur das Integral $\int_a^b f$, sondern auch das Integral $\int_a^x f$, wenn x eine beliebige Stelle aus dem Integrationsintervall [a;b] ist. Dadurch kann also eine Funktion festgelegt werden, die man als Integralfunktion von f bezeichnet.

Ist f eine in [a;b] integrierbare Funktion, so heißt die Funktion $F = \int_a^x f$ die zu f gehörende **Integralfunktion**.

Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnet man in der Termschreibweise die Integrationsvariable anders, z.B. mit t: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dies soll nur ausdrücken, daß in dieser Funktion die obere Integrationsgrenze x die Variable ist.

(d) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Definition einer Integralfunktion legt nahe, sich auch über die Differenzierbarkeit dieser Funktion Gedanken zu machen. Die diesbezüglichen Überlegungen sind im sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zusammengefaßt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist die Funktion f in [a;b] eine stetige Funktion, so ist ihre Integralfunktion $F = \int_a^x f$ differenzierbar an jeder Stelle $x \in [a;b]$, und es gilt: $F'(x) = f(x)$. Die Ableitungsfunktion von F ist also f: $F' = f$.

Beweis: Es sei x eine beliebige Stelle des Integrationsintervalls, also $x \in [a;b]$. Um zu beweisen, daß F an einer Stelle x differenzierbar ist, muß man zeigen, daß der Grenzwert der Differenzenqoutientenfunktion von F(x), also F´(x), gleich f(x) ist:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{z-x \to 0} \frac{F(z)-F(x)}{z-x} = f(x)$$

Für alle $x \neq z$ mit $z = x+h$ gilt folgende Umformung:

$$\frac{F(z)-F(x)}{z-x} = \frac{1}{z-x} \cdot \left[\int_a^z f - \int_a^x f \right] = \frac{1}{z-x} \cdot \int_x^z f = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f$$

Der Ausdruck F(z)–F(x) entspricht nach der Defintion des Integrals (und wie auch die obige Umformung zeigt) dem Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse mit den seitlichen Begrenzungen durch die Ordinaten an den Stellen z und x. Ist nun f(k) der kleinste und f(g) der größte Funktionswert im Intervall [x;z] (bzw. da z = x+h im Intervall [x;x+h]), dann gilt:

$$f(k) \cdot h \leq \int_x^{x+h} f \leq f(g) \cdot h; \; f(k) \leq \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f \leq f(g)$$

Strebt nun h gegen Null, dann streben z, k und g gegen x:

$$\lim_{h \to 0} f(k) \leq \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} f \leq \lim_{h \to 0} f(g); \; f(x) \leq \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} f \leq f(x)$$

Da links und rechts der fortlaufenden Ungleichung dasselbe steht, muß überall Gleichheit gelten, und daher:

$$\lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} f = f(x) \text{ und daher } F'(x) = f(x)$$

Dadurch ist ein enger Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung hergestellt, die zukünftig das Ermitteln des Integrals einer Funktion erleichtern wird.

(e) Hauptsatz der Integralrechnung

Aufgrund des Zusammenhangs, der sich durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt, läßt sich das Integral einer stetigen Funktion f leicht angeben, wenn man eine Stammfunktion des Integranden f kennt.

Hauptsatz der Integralrechnung: Ist F eine beliebige Stammfunktion der stetigen Funktion f in [a;b], so ist das über [a;b] erstreckte Integral von f gleich der Differenz des Wertes der Stammfunktion an der oberen Integrationsgrenze und des Wertes der Stammfunktion an der unteren Integrationsgrenze: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Beweis: Weil f als stetig vorausgesetzt wurde, hat f die Integralfunktion $\int_a^x f$, die nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion von f ist. Eine beliebige Stammfunktion F und diese Integralfunktion unterscheiden sich nur um eine Konstante c:

$$\int_a^x f - F(x) = c$$

Durch Belegen der Variablen x mit den beiden Integrationsgrenzen a und b ergibt sich:

$$\int_a^a f - F(a) = c \text{ und } \int_a^b f - F(b) = c$$

Da $\int_a^a f = 0$ gilt, erhält man durch Subtraktion der beiden Gleichungen: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Es ist üblich, die Differenz F(b)–F(a) durch eine eigene Schreibweise zu kennzeichnen:

$$\boxed{\int_a^b f = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

***Beispiel**:* *Ermitteln Sie das Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ im Intervall [0;1].*

Ermitteln einer Stammfunktion, z.B. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

denn es gilt: $F'(x) = \frac{1}{2}x + 1 = f(x)$

Durch Anwendung des Hauptsatzes ergibt sich: $\int_0^1 f = [F(x)]_0^1 = [\frac{1}{4}x^2 + x]_0^1 = (\frac{1}{4} + 1) - (0 + 0) = \frac{5}{4}$

Das Integral beträgt $\frac{5}{4}$.

(f) Das unbestimmte Integral

Die Stammfunktion einer Funktion f läßt sich im allgemeinen nur bis auf eine additive Konstante c bestimmen. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch jede Funktion der Form F+c eine Stammfunktion von f. Man bezeichnet daher jedes Element der Menge {F+c} als unbestimmtes Integral der Funktion f und wählt dafür das Symbol $\int f$ bzw. $\int f(x)\,dx$, also die übliche Schreibweise ohne Integrationsgrenzen.

Ist f eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f, so heißt ein Element der Menge {F+c} ein **unbestimmtes Integral** von f: $\int f = \int f(x)\,dx = F(x) + c \; (c \in R)$

In der mathematischen Literatur wird vielfach die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f als unbestimmtes Integral von f bezeichnet.

Das Ermitteln einer Stammfunktion F der stetigen Funktion f bezeichnet man daher auch als unbestimmte Integration.

Entsprechend wird daher das Integral $\int_a^b f$ mit den Integrationsgrenzen a und b auch als bestimmtes Integral von f bezeichnet.

14.3. Integration von Funktionen

Betrachtet man die Ermittlung der Stammfunktion als Umkehrung der Operationen des Differenzierens, so läßt sich für viele einfache Funktionen schnell das unbestimmte Integral angeben.

Eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$ ist die Funktion $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für $n \in Q \setminus \{-1\}$.

Aufgrund dieser Formel läßt sich jede Polynomfunktion integrieren.

Beispiel: *Ermitteln Sie eine Stammfunktion von* $f(x) = x^3; g(x) = \sqrt[3]{x^5}; h(x) = \frac{1}{x^4}$

$$\int x^3 = \frac{1}{4} \cdot x^4; \int \sqrt[3]{x^5} = \int x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{8} \cdot x^{\frac{8}{3}}; \int \frac{1}{x^4} = \int x^{-4} = -\frac{1}{3} \cdot x^{-3}$$

Eine Stammfunktion der Funktion	$f(x) = \sin(x)$	ist $F(x) = -\cos(x)$

Eine Stammfunktion der Funktion	$f(x) = \cos(x)$	ist $F(x) = \sin(x)$

Die Tangensfunktion läßt sich nicht ohne weitere Integrationsmethoden integrieren, da sie als Quotient zweier anderer Funktionen eine zusammengesetzte Funktion ist.

Eine Stammfunktion der Funktion	$f(x) = e^x$	ist $F(x) = e^x$

Eine Stammfunktion der Funktion	$f(x) = \frac{1}{x}$	ist $F(x) = \ln(x)$

Mit obiger Formel läßt sich die Exponentialfunktion allgemein integrieren.

Eine Stammfunktion der Funktion	$f(x) = a^x$	ist $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$

14.4. Integrationsmethoden

Ähnlich wie bei der Differentialrechnung ist es auch zur Ermittlung der Stammfunktionen von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen notwendig, entsprechende Methoden herzuleiten. Der folgende Abschnitt zeigt drei dieser Verfahren.

(a) Partielle Integration (Produktintegration)

Aus der Formel für die Ableitung eines Produkts zweier Funktionen, nämlich $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ läßt sich durch Integration folgender Satz herleiten:

Sind die Funktionen f, g differenzierbar und sind f´, g´ stetig, so gilt: $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

Diese Formel ermöglicht es, das Integral $\int f \cdot g'$ zu berechnen, wenn das rechtsstehende Integral $\int f' \cdot g$ bekannt oder einfacher zu berechnen ist als das gegebene Integral. Da die Integration zu einem weiteren Integral führt und daher nur teilweise in einem Schritt gelöst werden kann, heißt die Methode partielle Integration.

Welcher Faktor des Integranden mit f und welcher als g´ angesetzt wird, ist manchmal gleichgültig, in vielen Fällen jedoch nicht. Zuweilen führt die Durchführung der partiellen Integration auf ein Integral, das wieder durch partielle Integration berechnet werden kann.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x \cdot e^x \; dx$.*

Festsetzen der einzelnen Funktionen: $f(x) = x; g'(x) = e^x$

Daraus ergibt sich: $f'(x) = 1; g(x) = e^x$

Partielle Integration: $\int x \cdot e^x \; dx = x \cdot e^x - \int e^x \; dx$

Erneute Integration: $\int x \cdot e^x \; dx = x \cdot e^x - e^x = e^x \cdot (x - 1) + c$

Da das unbestimmte Integral zu ermitteln war, ist die additive Konstante c anzuführen.

Beispiel: *Berechnen Sie das unbestimmte Integral* $\int ln(x)\ dx$.

Festsetzen der einzelnen Funktionen: $f(x) = ln(x); g'(x) = 1$

Daraus ergibt sich: $f'(x) = \frac{1}{x}; g(x) = x$

Partielle Integration: $\int ln(x) \cdot 1\ dx = x \cdot ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\ dx$

Erneute Integration: $\int ln(x)\ dx = x \cdot ln(x) - x = x \cdot (ln(x) - 1) + c$

Beispiel: *Berechnen Sie das unbestimmte Integral* $\int sin^2(x)\ dx$.

Festsetzen der einzelnen Funktionen: $f(x) = sin(x); g'(x) = sin(x)$

Daraus ergibt sich: $f'(x) = cos(x); g(x) = -cos(x)$

Partielle Integration: $\int sin^2(x)\ dx = -sin(x) \cdot cos(x) + \int cos(x) \cdot cos(x)\ dx$

$$= -sin(x) \cdot cos(x) + \int cos^2(x)\ dx$$

Nun könnte man das zweite Integral nach der gleichen Methode berechnen; einfacher ist es jedoch folgenden Zusammenhang zu verwenden:

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1; cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$$

Somit ergibt sich: $\int sin^2(x)\ dx = -sin(x) \cdot cos(x) + \int (1 - sin^2(x))\ dx =$

$$-sin(x) \cdot cos(x) + \int 1\ dx - \int sin^2(x)\ dx =$$

$$-sin(x) \cdot cos(x) + x - \int sin^2(x)\ dx$$

Bringt man das Integral von der rechten auf die linke Seite, erhält man:

$$2 \cdot \int sin^2(x)\ dx = x - sin(x) \cdot cos(x)$$

$$\int sin^2(x)\ dx = \frac{x - sin(x) \cdot cos(x)}{2}$$

Die Zurückführung auf das ursprüngliche Integral („Endlosschleife“) ist zuweilen der einfachste Lösungsweg.

(b) Substitutionsmethode

Aus der Formel für die Ableitung der Verkettung zweier Funktionen, nämlich $f(g)' = f'(g) \cdot g'$, läßt sich folgender Satz herleiten:

> Sind die Funktionen f in [a;b] und g in $[\alpha;\beta]$ mit $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$ stetig und differenzierbar und ist g´ in $[\alpha;\beta]$ stetig, so gilt: $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Beweis: f besitzt als stetige Funktion eine Stammfunktion in [a;b] mit F´=f. Es ist also auch die Verkettung F(g) möglich. Nach der Kettenregel der Differentialrechnung gilt: $F(g)' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$

Daher ist F(g) eine Stammfunktion von f(g)·g´. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt nun:

$$\int_\alpha^\beta f(g) \cdot g' = [F(g)]_\alpha^\beta = F(g(\beta) - F(g(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

Für das praktische Anwenden kann diese Formel folgendermaßen gedeutet werden:

- Das Integral $\int f(x)\,dx$ wird durch eine Substitution mit x = g(t) in das Integral $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$ übergeführt
- x wird durch g(t) ersetzt
- dx wird durch g´(t) dt ersetzt
- Die Grenzen a, b können durch die Gleichung x = g(t) umgerechnet oder nach dem Ermitteln der Stammfunktion und Rücksubstitution beibehalten werden.

***Beispiel**:* *Berechnen Sie das unbestimmte Integral* $\int \sqrt{x+1}\,dx$.

Wahl einer geeigneten Substitution: $\sqrt{x+1} = t; x = t^2 - 1 = g(t); g'(t) = 2t$

Substitution im Integral: $\int \sqrt{x+1}\,dx = \int t \cdot 2t\,dt = \int 2t^2\,dt = \frac{2t^3}{3}$

Rücksubstitution: $\int \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + c$

Durch Ableiten des Ergebnisses läßt sich die Richtigkeit der Berechnung leicht überprüfen.

Beispiel: *Berechnen Sie das unbestimmte Integral* $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\ dx$.

Das Integral der Angabe besteht von vornherein aus einer Funktion g(x) = $\sin^2(x)$ und ihrer Ableitung g´(x) = cos(x). Liest man die Formel für die Substitution von rechts nach links (und vertauscht zur Übersichtlichkeit die Variablen x und t), also $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt$, so läßt sich dieses Integral leicht berechnen:

Wahl einer geeigneten Substitution: $g(x) = \sin(x) = t; g'(x) = \cos(x)$

Substitution im Integral: $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\ dx = \int t^2\ \ dt = \frac{t^3}{3}$

Rücksubstitution: $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\ dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + c$

Beispiel: *Berechnen Sie das bestimmte Integral* $\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx$.

Wahl einer geeigneten Substitution: $3x - 5 = t; x = \frac{t+5}{3} = g(t); g'(t) = \frac{1}{3}$

Da das bestimmte Integral zu berechnen ist, müssen diesmal auch die Grenzen umgerechnet werden.

$$\alpha = 3 \cdot 2 - 5 = 1; \beta = 3 \cdot 3 - 5 = 4$$

Substitution im Integral: $\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx = \int_1^4 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3}\ dt = \frac{1}{3} \cdot \int_1^4 \frac{1}{t}\ dt =$

$$\frac{1}{3} \cdot \ln(t)\Big|_1^4 = \frac{1}{3} \cdot \ln(4) - \frac{1}{3} \cdot \ln(1) = 0{,}462$$

Es läßt sich das Integral natürlich auch durch Rücksubstitution und Einsetzen der ursprünglichen Grenzen berechnen.

Rücksubstitution: $\int_2^3 \frac{1}{3x-5}\ dx = \frac{1}{3} \cdot \ln(3x-5)\Big|_2^3 = \frac{1}{3} \cdot \ln(4) - \frac{1}{3} \cdot \ln(1) = 0{,}462$

(c) Partialbruchzerlegung

Für die Integration der rationalen Funktionen der Form $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P(x) und Q(x) Polynomfunktionen sind und der Grad von Q(x) größer als der Grad von P(x) ist (durch Herausheben mittels Polynomdivision leicht erreichbar), reichen die bisherigen Integrationsmethoden nicht aus. Das letzte Beispiel der Substitutionsmethode hat gezeigt, daß sich das Integral der allgemeinen Form $\int \frac{A}{ax+b}\,dx$ mit $a,b \in R$ und $a \neq 0$ lösen läßt. Substituiert man nämlich, so ergibt sich:

$$ax+b=t;\ x=\frac{t-b}{a}=g(t);\ g'(t)=\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\cdot\int\frac{1}{t}\,dt = \frac{A}{a}\cdot\ln(|t|) = \frac{A}{a}\cdot\ln(|ax+b|)+c$$

Da die Logarithmusfunktion nur für Argumente größer Null definiert ist, sind die Betragstriche in der allgemeinen Form unbedingt notwendig.

Um das Integral einer rationalen Funktion zu lösen, formt man nach Möglichkeit die Funktion aufgrund obiger Überlegungen zu Teilbrüchen (Partialbrüche) der oben genannten Form um.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

Hierbei sind die x_i die reellen Nullstellen der Nennerfunktion Q(x). Da sich aber nicht jede Polynomfunktion Q(x) vom Grad n unbedingt in n verschiedene Linearfaktoren $(x-x_i)$ zerlegen läßt, sind zwei Fälle der Zerlegung der rationalen Funktion in Partialbrüche möglich, wenn man sich auf die Fälle mit ausschließlich reellen Nullstellen des Nennerpolynoms beschränkt.

1. Fall: Das Nennerpolynom Q(x) hat nur einfache reelle Nullstellen.

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

Die Koeffizienten A_1, A_2, ..., A_n lassen sich durch Koeffizientenvergleich ermitteln. Für die einzelnen Integrale gilt:

$$\int \frac{A_i}{x-x_i}\,dx = A_i\cdot\ln(|x-x_i|)+c$$

2. Fall: Das Nennerpolynom Q(x) hat mehrfache reelle Nullstellen.

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$

$$\frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} +$$

$$\ldots +$$

$$\frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}$$

Die Koeffizienten A_{11}, ..., A_{rk_1} lassen sich durch Koeffizientenvergleich ermitteln. Für die einzelnen Integrale gilt:

$$\int \frac{A_i}{x-x_i}\, dx = A_i \cdot \ln(|x-x_i|) + c$$

$$\int \frac{A_i}{(x-x_i)^r}\, dx = \frac{A_i}{1-r} \cdot \frac{1}{(x-x_i)^{r-1}} + c$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie das unbestimmte Integral* $\int \frac{3x^2+7x-1}{x^3+3x^2-4}\, dx$.

Bestimmen der Nullstellen des Nennerpolynoms:

$$x^3+3x^2-4 = (x-1)\cdot(x+2)^2$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2+7x-1}{x^3+3x^2-4} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x+2)} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

Daraus ergibt sich:

$$3x^2+7x-1 = A_1\cdot(x+2)^2 + A_2\cdot(x-1)(x+2) + A_3\cdot(x-1)$$

$$3x^2+7x-1 = (A_1+A_2)\cdot x^2 + (4A_1+A_2+A_3)\cdot x + (4A_1-2A_2-A_3)$$

Der Koeffizientenvergleich führt zu einem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 3 \\ 4A_1 + A_2 + A_3 &= 7 \\ 4A_1 - 2A_2 - A_3 &= -1 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten lauten daher:

$$A_1 = 1;\ A_2 = 2;\ A_3 = 1$$

Somit lautet das Integral:

$$\int \frac{3x^2+7x-1}{x^3+3x^2-4}\, dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{2}{x+2}\, dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx$$

Integrieren:

$$\int \frac{3x^2+7x-1}{x^3+3x^2-4}\, dx = \ln(|x-1|) + 2\cdot\ln(|x+2|) - \frac{1}{x+2} + c$$

14.5. Anwendung der Integralrechnung

(a) Flächenberechnungen

Der anschauliche Zugang zur Integralrechnung am Beginn dieses Kapitels stellt zugleich einen wesentlichen Anwendungsbereich der Integralrechnung dar.

Es sei f eine in [a;b] integrierbare Funktion und F das Flächenstück, das vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den beiden Ordinaten in den Intervallenden begrenzt wird.

- Gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$ $(a \leq b)$, so ist der Zahlenwert A(F) des Flächeninhaltes A des Flächenstückes F der Zahlenwert: $$A(F) = \int_a^b f$$

- Gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a;b]$ $(a \leq b)$, so ist der Zahlenwert A(F) des Flächeninhaltes A des Flächenstückes F der Zahlenwert: $$A(F) = \left| \int_a^b f \right|$$

Der Flächeninhalt A des Flächenstückes F ist genaugenommen das Produkt aus dem Zahlenwert A(F) (der Flächenmaßzahl) und der der Flächenmessung zugrunde gelegten Flächeneinheit. Im folgenden Abschnitt wird der Kürze wegen zwischen „Zahlenwert des Flächeninhaltes" und „Flächeninhalt" nicht unterschieden.

Die obige Defintion sagt darüber hinaus aus, daß die Berechnung des Flächeninhalts mittels Integralrechnung für Flächen, die komplett oberhalb der x-Achse sind, einen positiven Zahlenwert ergibt und für Flächen, die komplett unterhalb der x-Achse sind, einen negativen Zahlenwert ergibt.

Dies hat aber zur Folge, daß der Flächeninhalt einer Fläche, die sich sowohl ober- als auch unterhalb der x-Achse erstreckt, nicht durch Integration von linker Begrenzungsordinate zur rechten Begrenzungsordinate ermittlet werden kann. Das Intervall [a;b] muß in Teilintervalle zerlegt werden, in denen f(x) jeweils konstantes Vorzeichen hat. Die Teilintervallgrenzen ergeben sich durch die Nullstellen im Intervall [a;b]. Somit erhält man allgemein für den Flächeninhalt:

Flächeninhalt im Intervall [a;b]: $$A(F) = \left| \int_a^{x_1} f \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \ldots + \left| \int_{x_i}^{b} f \right| \quad \text{mit } f(x_i) = 0$$

***Beispiel**:* *Berechnen Sie den Flächeninhalt im Intervall [1;3] zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.*

Ermitteln der Nullstellen: $f(x) = 0; x^2 - 4 = 0; x_1 = -2; x_2 = 2$

Teilintervalle: $A = |\int_1^2 x^2 - 4\ dx| + |\int_2^3 x^2 - 4\ dx|$

Integration: $A = |\frac{x^3}{3} - 4x\Big|_1^2| + |\frac{x^3}{3} - 4x\Big|_2^3| = |-\frac{5}{3}| + |\frac{7}{3}| = 4$

Der Flächeninhalt beträgt 4E².

Ist die Längeneinheit für die Koordinatenachsen nicht angegeben, so muß im Ergebnis zumindest durch die Angabe E² (Quadrateinheit) angezeigt werden, daß es sich um einen Flächeninhalt handelt. Die Integralrechnung als Mittel zur Flächenberechnung ermöglicht es auch, altbekannte Formeln für den Flächeninhalt einiger ebenen Figuren, wie z.B. für die Kreisfläche, herzuleiten.

***Beispiel**:* *Leiten Sie die Formel für den Flächeninhalt der Kreisfläche her.*

Die Punkte eines Kreisbogens im ersten Quadranten werden durch die Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

beschrieben. Die so begrenzte Viertelkreisfläche beträgt: $\frac{A}{4} = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$

Wahl einer geeigneten Substitution: $x = r \cdot cos(t) = g(t); g'(t) = -r \cdot sin(t)$

$$\sqrt{r^2 - r^2 \cdot cos^2(t)} = r \cdot \sqrt{1 - cos^2(t)} = r \cdot sin(t)$$

Umrechnung der Integrationsgrenzen: $t = arccos\left(\frac{x}{r}\right); \alpha = \frac{\pi}{2}; \beta = 0$

Substitution im Integral: $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \cdot sin(t) \cdot (-r) \cdot sin(t)\ dt = r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\ dt$

Integration (laut vorigem Abschnitt): $\frac{A}{4} = r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\ dt = \frac{t - sin(t) \cdot cos(t)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2\pi}{4}$

Der Flächeninhalt der Kreisfläche beträgt $A = r^2\pi$.

Das Verfahren zur Berechnung des Flächeninhaltes zwischen einer Funktion, der x-Achse und den Ordinaten läßt sich leicht zur Berechnung des Flächeninhaltes eines von zwei Funktionsgraphen begrenzten Flächenstücks erweitern.

Es seien f und g zwei in [a;b] integrierbare Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a;b]$ und F das Flächenstück, das von den beiden Funktionsgraphen und den Ordinaten in den Intervallenden begrenzt wird. Dann gilt: $A(F) = \int_a^b (f-g)$

Die Formel ergibt sich aus der Berechnung der einzelnen Flächen A_1, A_2 zwischen den Funktionsgraphen und der x-Achse im Interval [a;b]. Da $f(x) \geq g(x)$ gilt, ist der Flächeninhalt A_{ges} zwischen den Funktionsgraphen im Intervall [a;b] die Differenz dieser einzelnen Flächen: $A_{ges} = A_1 - A_2; \int f - \int g = \int (f-g)$

Hierbei ist es egal, ob die beiden Funktionsgraphen komplett ober- oder unterhalb der x-Achse liegen. Schließlich könnte man die beiden Funktionen durch Addition einer Konstanten c im Intervall [a;b] komplett über die x-Achse verschieben. Für die Differenz der beiden Funktionen $f_c = f+c$ und $g_c = g+c$ gilt dann:

$$f_c - g_c = (f+c) - (g+c) = f + c - g - c = f - g$$

Die obige Definition setzt durch $f(x) \geq g(x)$ voraus, daß im Intervall [a;b] der Funktionsgraph von f(x) stets oberhalb des Funktionsgraphen von g(x) liegt. Haben f und g jedoch Schnittpunkte, an denen die gegenseitige Lage von f und g zueinander wechselt, so muß (wie schon zuvor) das Intervall [a;b] in Teilintervalle zerlegt werden.

Flächeninhalt zwischen f und g im Intervall [a;b]:

$$A(F) = \left|\int_a^{x_1} (f-g)\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f-g)\right| + \ldots + \left|\int_{x_i}^{b} (f-g)\right| \quad \text{mit } f(x_i) = g(x_i)$$

Betrachtet man die Differenz f–g selbst als Funktion h mit h = f–g, so entspricht die Berechnung des Flächeninhalts des Flächenstücks zwischen den Funktionen f und g in [a;b] der Berechnung des Flächeninhaltes zwischen der Funktion h und der x-Achse im Intervall [a;b]. Die Schnittpunkte von f und g sind dann die Nullstellen von h, denn aus f(x) = g(x) folgt f(x)–g(x) = 0 und aus h(x) = 0 ergibt sich h(x) = f(x)–g(x) = 0.

Es ist also zumeist zweckmäßig, von vornherein die Differenzfunktion h = f–g zu erstellen.

***Beispiel**: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3 \text{ und } g(x) = x + 1 \text{ im Intervall } [-4;6].$$

Die Differenzfunktion h lautet: $h(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 3) - (x+1) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

Nullstellen von h (Schnittpunkte von f und g): $h(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0; x_1 = -2; x_2 = 4$$

Teilintervalle: $A = |\int_{-4}^{-2} h(x)\ dx| + |\int_{-2}^{4} h(x)\ dx| + |\int_{4}^{6} h(x)\ dx|$

$$\int h(x)dx = \int \frac{1}{2}x^2 - x - 4\ dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$$

Flächeninhalt: $A = |\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x \Big|_{-4}^{-2}| + |\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x \Big|_{-2}^{4}| + |\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x \Big|_{4}^{6}| =$

$$|\frac{22}{3}| + |-18| + |\frac{22}{3}| = 32\frac{2}{3}$$

Der Flächeninhalt beträgt $32\frac{2}{3}E^2$.

Bei Flächenberechnungen interessiert zuweilen der Flächeninhalt jenes Flächenstücks, das ausschließlich durch eine Funktion und die x-Achse bzw. durch zwei Funktionen begrenzt wird. Das Flächenstück wird also nicht zusätzlich durch Ordinaten begrenzt. Die Integrationsgrenzen sind also die Schnittpunkte von der Funktion mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion) bzw. die Stellen der Schnittpunkte der Funktionen (Nullstellen der Differenzfunktion).

***Beispiel**: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Funktion*

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \text{ und der x-Achse begrenzt wird.}$$

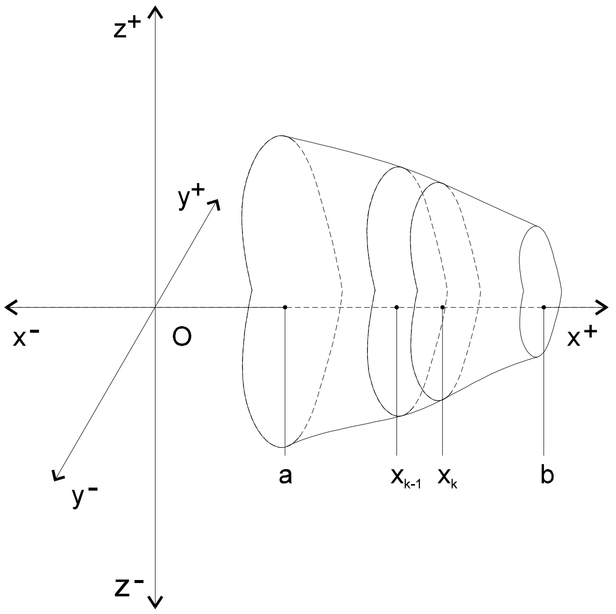
Nullstellen von f(x): $f(x) = 0; x_1 = 2; x_2 = 3$

Flächeninhalt: $A = \int_2^3 f(x)\ dx = \int_2^3 x^2 - 5x + 6\ dx = |\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_2^3| = \frac{1}{6}$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{6}E^2$.

(b) Volumsberechnungen

Ähnlich der Berechnung von Flächeninhalten einer ebenen Figur kann man auch den Rauminhalt eines Körpers berechnen. Überträgt man die Überlegungen der Herleitung des Flächeninhaltes einer ebenen Figur auf räumliche Körper, so legt man am besten ein Koordinatensystem in den zu berechnenden Körper. Der Körper K werde nun an den Stellen x = a und x = b von zwei zur x-Achse normalen Ebenen begrenzt. Jede Ebene normal zur x-Achse soll den Körper in einer Schnittfigur schneiden, deren Flächeninhalt q(x) eine Funktion der Schnitthöhe x ist (Querschnittsfunktion).



Zerlegt man nun den Körper K in Schichten, so kann man das Volumen des Körpers durch die Summe der Volumina dieser Schichten annähern.

Da für die x-Werte der Zerlegung die Funktion q(x) die Querschnittsflächen beschreibt, lassen sich die Volumina der einzelnen Schichten als $V_i = q(x_i)\cdot\Delta x$ leicht errechnen.

Abhängig davon, ob die durch die Zerlegung entstehenden Schichten größer oder kleiner als der tatsächliche Teil des Körpers in diesem Abschnitt, entstehen so wieder Unter- bzw. Obersummen für das Volumen des Körpers.

Ist q(x) eine integrierbare Funktion, so ist das Supremum der Menge aller Untersummen gleich dem Infimum der Menge aller Obersummen.

Es sei K ein Körper, der zwischen den Ebenen mit den Gleichungen x = a und x = b (a<b) liegt, und es sei q die zugehörige Querschnittsfunktion. Ist q integrierbar, so ist der Zahlenwert V(K) des Rauminhaltes des Körpers K der Zahlenwert $V(K) = \int_a^b q$

Der Rauminhalt (das Volumen) eines Körpers ist genaugenommen das Produkt aus dem Zahlenwert V(K) und der der Rauminhaltsmessung zugrunde gelegten Maßeinheit. Im folgenden Abschnitt wird der Kürze wegen nicht zwischen dem „Zahlenwert für den Rauminhalt“ und dem „Rauminhalt“ unterschieden.

Mit obiger Formel lassen sich also die Rauminhalte all jener Körper leicht berechnen, deren Querschnittsfläche durch eine Funktion q der Höhe x angegeben werden kann.

***Beispiel**: Die Funktion $f(x) = 3x$ sei die Seitenkante einer quadratischen Pyramide. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide im Intervall [0;10].*

Wenn durch die Gerade f(x) = 3x eine Seitenkante einer quadratischen Pyramide darstellt und die x-Achse die Höhe dieser Pyramide ist (und die Seiten der Grundfläche parallel zu den anderen Achsen sind), dann ist die Seitenlänge des quadratischen Querschnitts 2·f(x). Die Querschnittsfunktion lautet dann:

$$q(x) = \left[2 \cdot f(x)\right]^2 = 4 \cdot f^2(x) = 36x^2$$

Das Volumen der quadratischen Pyramide ergibt sich dann als Integral:

$$V = \int_0^{10} 36x^2 \, dx = 12x^3 \Big|_0^{10} = 12000$$

Das Volumen beträgt 12000 E^3.

Setzt man das obige Beispiel allgemein an und bezeichnet man die Grundkante der Pyramide mit a und die Höhe mit h, so wird die Seitenkante durch die Funktion $f(x) = \frac{a}{2h} \cdot x$

beschrieben. Die Querschnittsfunktion lautet dann $q(x) = \left[2 \cdot f(x)\right]^2 = \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2$.

Das Volumen der quadratischen Pyramide mit der Höhe h ergibt sich dann als Integral im Intervall [0;h]:

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2 \, dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{a^2h}{3}$$

Dies ist aber gerade die allgemeine Formel für die Berechnung des Volumens einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h. Die Integralrechnung ermöglicht es also auch, allgemeine Formeln zur Volumsberechnung herzuleiten.

Im weiteren werden die Volumsberechnungen auf sogenannte Rotationskörper eingeschränkt. Das sind Körper, die durch Rotation einer Funktion um eine der beiden Achse entstehen. Dies hat den Vorteil, daß die Querschnittsfläche unabhängig von der rotierenden Funktion als Kreis von vornherein bekannt ist.
Rotiert ein Flächenstück, das vom Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [a;b] begrenzt wird, um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Querschnitte, die durch Ebenen normal zur

x-Achse entstehen, Kreisflächen sind. Der Radius einer Kreisfläche an der Stelle x ist der Funktionswert f(x). Die Querschnittsfunktion lautet daher: $q(x) = \pi \cdot f^2(x)$.

Der Rauminhalt des Drehkörpers ist nun gegeben durch: $V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\ dx$.

> Das Volumen eines Drehkörpers bei **Rotation** der Funktion f **um die x-Achse** im Intervall [a;b] beträgt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2$

Entsprechend läßt sich das Volumen des Drehkörpers bei Rotation der Funktion f um die y-Achse berechnen. Die Querschnitte, die durch Ebenen normal zur y-Achse entstehen, sind wieder Kreisflächen. Der Radius einer Kreisfläche an der Stelle f(x) ist der x-Wert, die Grenzen für die Integration sind y-Werte.

Für das Volumen ergibt sich dann mit $x = f^*(y)$: $V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} f^{*2}(y)\ dy$.

> Das Volumen eines Drehkörpers bei **Rotation** der Funktion f **um die y-Achse** im Intervall [f(a);f(b)] mit $x = f^*(y)$ beträgt: $V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} f^{*2}$

***Beispiel**: Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation der Funktion $f(x) = x^2$ um die x-Achse im Intervall [0;3] und um die y-Achse im Intervall [0;5] entsteht.*

Rotation um die x-Achse:

$$V_x = \pi \cdot \int_0^3 (x^2)^2\ dx = \pi \cdot \int_0^3 x^4\ dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = 48{,}6\pi\, E^3$$

Rotation um die y-Achse:

$$y = x^2;\ x = \sqrt{y} = f(y)$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 (\sqrt{y})^2\ dy = \pi \cdot \int_0^5 y\ dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^5 = 12{,}5\pi\, E^3$$

Die Volumina betragen $V_x = 152{,}68\, E^3$ und $V_y = 39{,}27\ E^3$.

(c) Weitere Anwendungsbereiche

Im folgenden sind einige weitere Anwendungsbereiche der Integralrechnung aufgelistet. Die Formeln werden ohne Herleitung angegeben und sollen nur die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Integralrechnung, die heute aus Wirtschaft und Technik nicht mehr wegzudenken ist, aufzeigen.

Berechnung der Länge eines Kurvenbogens

Bogenlänge s eines Kurvenbogens f in [a;b]: $s = \int_a^b \sqrt{1+[f']^2}$

Berechnung des Flächeninhaltes der Mantelfläche eines Drehkörpers

Mantelfläche M bei Rotation von f um die x-Achse in [a;b]: $M_x = 2\pi \cdot \int_a^b f \cdot \sqrt{1+[f']^2}$

Berechnung der Koordinaten des Schwerpunktes eines Flächenstückes

Die Koordinaten des **Schwerpunktes** $S(x_s|y_s)$ eines Flächenstückes im Intervall [a;b] sind:

$$x_s = \left[\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2\right] : \left[\int_a^b f\right] \qquad y_s = \left[\int_a^b x \cdot f\right] : \left[\int_a^b f\right]$$

Die Ausdrücke im Zähler der obigen Koordinatenformeln bezeichnet man auch als statische Momente M_x und M_y des Flächenstücks.

Berechnung der Koordinaten des Schwerpunktes eines Drehkörpers

Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s|y_s|z_s)$ eines Drehkörpers bei Rotation um die x-Achse im Intervall [a;b] sind:

$$x_s = \left[\int_a^b x \cdot f^2\right] : \left[\int_a^b f^2\right] \qquad y_s = 0 \qquad z_s = 0$$

Den Ausdruck im Zähler für x_s bezeichnet man auch als statisches Moment M_{yz} des Drehkörpers.

14.6. Differentialgleichungen

Bei der Behandlung zahlreicher Probleme aus den Naturwissenschaften und der Technik treten Gleichungen auf, in denen y (= f(x)) und die Ableitungen y´, y´´, ... vorkommen. Eine solche Gleichung bezeichnet man als Differentialgleichung. Im folgenden wird nur die sogenannte Differentialgleichung erster Ordnung behandelt, in der von den möglichen Ableitungen nur y´ und keine höhere Ableitung auftritt. Im speziellen wird der Fall $y' = ky$ als Sonderfall einer Differentialgleichung erster Ordnung herausgegriffen.

***Beispiel**:* *Gesetz des radioaktiven Zerfalls*

Ist die Anzahl der Atome sehr groß, so hat man bei radioaktiven Stoffen folgende Gesetzmäßigkeiten festgestellt: Die in einer Zeiteinheit zerfallende Menge eines radioaktiven Stoffes ist zu der am Beginn dieser Zeiteinheit vorhandenen Menge an unzerfallenem radioaktiven Stoff proportional. Ist N(t) die Anzahl der Atome zur Zeit t und die im Zeitintervall Δt zerfallene Anzahl an Atomen gleich $\Delta N(t)$, so gilt demnach:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

In diesem Zusammenhang bezeichnet man λ ($\lambda \in R^+$) als Zerfallskonstante, die angibt welcher Bruchteil von der Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Atome in der Zeit Δt zerfällt. Das Minuszeichen gibt an, daß die Anzahl der Atome mit der Zeit abnimmt. Aus obiger Gleichung folgt für $\Delta t \to 0$ für den radioaktiven Zerfall:

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

Das Zerfallsgesetz ist eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Lösung der Differentialgleichung ist also eine Funktion y, die der Gleichung y´ = ky genügt. Im Rahmen der Differentialrechnung ist nur eine Funktion aufgetreten, für die die Ableitungsfunktion y´ gleich der ursprünglichen Funktion y war, also y´ = y. Dies war die Exponentialfunktion $y = e^x$, für die $(e^x)' = e^x$ gilt. Erweitert man die Funktion zu $y = e^{kx}$, so gilt: $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$.

Damit wäre also eine Funktion gefunden, die die Differentialgleichung erfüllt. Da darüberhinaus immer $(c \cdot y)' = c \cdot y'$ gilt, kann die Funktion noch um den Faktor c ergänzt werden.

Für jede Funktion f, die eine **Lösung der Differentialrechnung** $y' = k \cdot y$ ist, gilt:

$$f\colon y = c \cdot e^{kx} \text{ mit } c, k \in R.$$

Anhang: Übungsbeispiele zum 14. Kapitel

14/1 Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

d) $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$

14/2 Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{11}{x^2} + 12x^3$

b) $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 4}{x^2}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \frac{2 - x + x^2}{\sqrt{x}}$

14/3 Eine Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 15m/s. In einer Entfernung von 4000m vom Startpunkt beschleunigt das Auto; seine Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 2m/s zu. Wie groß ist die Entfernung s(t) des Autos vom Startpunkt zum Zeitpunkt t?

14/4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall mittels Unter- und Obersummen:

a) $f(x) = x^2 + 4$; [1;5]

b) $f(x) = x + 5$; [0;10]

c) $f(x) = x^2 - x + 2$; [1;3]

d) $f(x) = \frac{50}{x^2 + 10}$; [4;8]

14/5 Berechnen Sie die Integrale mittels Zerlegung und Grenzwertberechnung:

a) $\int_a^b x \, dx$

b) $\int_a^b x^2 \, dx$

c) $\int_a^b x^n \, dx$

d) $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx$

14/6 Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Stammfunktionen:

a) $\int_{-2}^4 x^3 \, dx$

b) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx$

c) $\int_4^9 \sqrt{x} \, dx$

d) $\int_{-2}^2 e^x \, dx$

14/7 Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Stammfunktionen:

a) $\int_{-2}^3 x^2 (2x-3) \, dx$

b) $\int_2^5 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \, dx$

c) $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x})^2 \, dx$

d) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x} \, dx$

14/8 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \cos^2(x)\,dx$

b) $\int \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}\,dx$

c) $\int e^{5x}\,dx$

d) $\int 2^x\,dx$

14/9 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

a) $\int x \cdot \cos(x)\,dx$

b) $\int x \cdot \ln(x)\,dx$

c) $\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx$

d) $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$

14/10 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

a) $\int x \cdot e^{3x}\,dx$

b) $\int \lg(x)\,dx$

c) $\int x^3 \cdot \ln(x)\,dx$

d) $\int \cos^2(x)\,dx$

14/11 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

a) $\int x \cdot \cos^2(x)\,dx$

b) $\int x \cdot \sqrt{x+1}\,dx$

c) $\int \ln^2(x)\,dx$

d) $\int x^2 \cdot \sin^2(x)\,dx$

14/12 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitution:

a) $\int (5x-3)^7 \, dx$

b) $\int (2-3x)^{-2} \, dx$

c) $\int e^{2x} \, dx$

d) $\int \sqrt{x+1} \, dx$

e) $\int \sin(3x) \, dx$

14/13 Ermitteln Sie die folgenden bestimmten Integrale mittels Substitution:

a) $\int_1^2 x \cdot \sqrt{x^2+3} \, dx$

b) $\int_2^3 \frac{1}{3x-5} \, dx$

c) $\int_2^5 \frac{x}{x^2-1} \, dx$

d) $\int_1^5 \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

e) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} \, dx$

14/14 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitution:

a) $\int x \cdot \cos(x^2) \, dx$

b) $\int x \cdot e^{-x^2} \, dx$

c) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

d) $\int x \cdot \sqrt{3x-2} \, dx$

e) $\int \tan(x) \, dx$

14/15 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

b) $\int \frac{x+5}{x^2+x}\,dx$

c) $\int \frac{5x-8}{x^2-2x-8}\,dx$

d) $\int \frac{x-8}{2x^2-7x+3}\,dx$

14/16 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{7x^2-25x-20}{x^2-4x}\,dx$

b) $\int \frac{3x^3-8x^2-7x+22}{x^2-x-6}\,dx$

c) $\int \frac{2x^2-11}{x^2-x-12}\,dx$

d) $\int \frac{12x^4+16x^3-7x^2-10x+7}{6x^2+5x-6}\,dx$

e) $\int \frac{3x^4+11x^3-13x^2-40x+4}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

14/17 Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx$

b) $\int \frac{4x^2+9x+4}{x^3+4x^2-4x-16}\,dx$

c) $\int \frac{33x^2+34x+6}{18x^3+3x^2-4x-1}\,dx$

d) $\int \frac{x^3+x^2-2x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$

14/18 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen und der x-Achse im angegebenen Intervall begrenzt wird:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$	[2;6]
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$	[–2;4]
c) $f(x) = \frac{x^3}{27}$	[3;6]
d) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$	[1;4]
e) $f(x) = \frac{1}{x}$	[2;4]

14/19 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen und der x-Achse im angegebenen Intervall begrenzt wird:

a) $f(x) = \cos(2x)$	$[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$
b) $f(x) = e^x$	[–2;3]
c) $f(x) = \ln(x)$	[2;5]
d) $f(x) = 2^x$	[–2;2]
e) $f(x) = \sqrt{x+2}$	[–1;7]

14/20 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen f und g im angegebenen Intervall begrenzt wird:

a) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$	$g(x) = -\frac{2}{5}x + 3$	[1;6]
b) $f(x) = x + 5$	$g(x) = x^2 - 1$	[–2;3]
c) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$	$g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$	[–2;6]
d) $f(x) = (x-1)^2$	$g(x) = -x^2 + 5$	[–1;2]
e) $f(x) = x + 5$	$g(x) = x - 5$	[5;10]

14/21 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen f und g im angegebenen Intervall begrenzt wird:

a) $f(x) = x^3$ $\quad g(x) = (x-1)^2 + 7$ $\quad [-1;2]$

b) $f(x) = \sin(x)$ $\quad g(x) = \cos(x)$ $\quad [\frac{\pi}{4};\pi]$

c) $f(x) = \sin(2x)$ $\quad g(x) = \sin(x)$ $\quad [\pi;\frac{3\pi}{2}]$

d) $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ $\quad g(x) = \sin(3x)$ $\quad [\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]$

e) $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = \ln(x)$ $\quad [1;10]$

14/22 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen und der x-Achse begrenzt wird:

a) $f(x) = 9 - \frac{1}{4}x^2$

b) $f(x) = (1-x^2)(x-1)^2$

c) $f(x) = 2x\cdot\sqrt{x+3}$

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$

e) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{3}$

14/23 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den folgenden Funktionen f und g begrenzt wird:

a) $f(x) = 6x - x^2$ $\quad g(x) = x$

b) $f(x) = \sqrt{6x}$ $\quad g(x) = x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{4x}$ $\quad g(x) = 2x - 4$

d) $f(x) = x^2 + 4$ $\quad g(x) = 2x^2 - 12$

e) $f(x) = x^2 - 3$ $\quad g(x) = -2x^2 + 6$

14/24 Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstücks, das von der Funktion f und der x-Achse im angegebenen Intervall begrenzt wird, um die x-Achse entsteht:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ $[0;6]$

b) $f(x) = x^2$ $[2;4]$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ $[-3;6]$

d) $f(x) = e^x$ $[-3;2]$

14/25 Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstücks, das von der Funktion f und der y-Achse im angegebenen Intervall begrenzt wird, um die y-Achse entsteht:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ $[0;6]$

b) $f(x) = x^2$ $[2;4]$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ $[-3;6]$

d) $f(x) = e^x$ $[1;2]$

14/26 Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstücks, das von den Funktionen f und g begrenzt wird, um die x- bzw. y-Achse entsteht und berechnen Sie das Verhältnis der Volumina:

a) $f(x) = \sqrt{8x}$ $g(x) = \frac{2x+8}{3}$

b) $f: 9x^2 + 16y^2 = 144$ $g: 3x + 4y = 12$

c) $f: x^2 + y^2 = 25$ $g: y^2 = \frac{16}{3}x$

d) $f: y^2 = 16(x-4)$ $g: y^2 = 8x$

e) $f: 3x^2 + 4y^2 = 12$ $g: y^2 = \frac{9}{4}x$

14/27 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $f(x) = x^2 - 4x + 3$ und der Geraden durch die Punkte P(0/1) und Q(1/0) eingeschlossen wird.

14/28 Berechnen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts der Fläche, die durch die Kurve $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und die x-Achse begrenzt wird, zum Flächeninhalt der Fläche, die von dieser Kurve und der Geraden $g(x) = x$ begrenzt wird.

14/29 Führen Sie bei folgender Funktion $y = \frac{6x}{1+x^2}$ eine Kurvendiskussion durch. Zeigen Sie, daß die Wendepunkte auf einer Geraden liegen und berechnen Sie den Flächeninhalt, den die Kurve mit dieser Geraden im ersten Quadranten einschließt.

14/30 Führen Sie bei folgender Funktion $y = (x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$ eine Kurvendiskussion durch und berechnen Sie den Flächeninhalt, den die Kurve mit der Geraden durch die Extrempunkte einschließt.

14/31 Die Funktion $y = \sqrt{6x}$, die Tangente in $P(6|y_1{>}0)$ und die y-Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation um die y-Achse entsteht.

14/32 Ermitteln Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = -0{,}87y$, wenn $y(1) = 7{,}2$ gilt.

14/33 Ermitteln Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = 2{,}35y$, wenn $y(2) = 5{,}48$ gilt.

14/34 Ermitteln Sie die Gleichung jener Kurve, die durch den Punkt $P(-2|1)$ geht und deren Subtangenten immer die Länge 3 haben.
Bemerkung: Ist $P_0(x_0|y_0)$ ein Punkt einer Kurve f und die Gerade t_0 die Tangente in P_0, dann bezeichnet man den Abstand zwischen dem Schnittpunkt T_x der Tangente mit der x-Achse und $P_x(x_0|0)$ als Subtangente im Punkt P_0.