Bestimme den Kern der Abbildung

Angaben:

Die Funktion f ist wie folgt definiert:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Kern von f.

Loesungen:

Gesucht sind Vektoren x, sodass $f(x) = o$ gilt.

Vorgehensweisen:

1. ueblicher Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Das fuehrt auf ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten:
   I: $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$
   II: $3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0$
   III: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

   Nun muss dieses Gleichungssystem wie ueblich geloest werden (, falls das Gauss-Verfahren noch nicht gelernt wurde).

2. kurzer, alternativer Ansatz:
   Wir wissen aus dem Uebungsbeispiel von (4.3), dass gilt: $f(e_1) + f(e_3) = f(e_2)$
   Umgeformt liefert das: $f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = o$.
   Wegen der Linearitaet von f gilt nun: $f(e_1 - e_2 + e_3) = 0$.

   Also ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Kern von f. Dieser Vektor muss den Kern von f aufspannen! (vgl. 4.5 Dimensionen-Formel).

   Also: $ker(f) = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$.