(Lineare) Abbildungen

Angaben:

Ist f linear? Beweis oder Gegenbeweis!

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$

Loesungen:

1. Gegenbeispiel: waehle $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Zeige: $f(x+x) \neq f(x) + f(x)$.

   $f(2x) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0^2 + 2^2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Aber $f(x) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0^2 + 1^2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Also ist dann $f(x) + f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Also ist f nicht linear!

2. Vermutung: f ist linear.
   zz. $\forall x, y \in \mathbb{R}^4 \;:\; f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $\forall x \in \mathbb{R}^4 \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \;:\; f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

   Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ beliebig gewaehlt:

   $$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \\ (x_1 + y_1) - (x_3 + y_3) \end{pmatrix} =$$
   $$\begin{pmatrix} 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3 + x_4 + y_4 \\ x_1 + y_1 - x_3 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_2 - y_3 + y_4 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} =$$
   $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

   Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewaehlt:

   $$f(\lambda x) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x_2 - \lambda x_3 + \lambda x_4 \\ \lambda x_1 - \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2x_2 - x_3 + x_4) \\ \lambda(x_1 - x_3) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} =$$
   $$\lambda f(x)$$

   Damit ist gezeigt, dass f tatsaechlich linear ist.

   Hinweis: Vektorwertige Funtionen (mit Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$) sind dann linear, wenn man sie zu Multiplikationen von einer Matrix mit einem Vektor umschreiben kann:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 + 1x_4 \\ 1x_1 + 0x_2 + (-1)x_3 + 0x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$