Summen im $\mathbb{R}^3$

Angabe:

1. Gib ein Beispiel mit drei Unterraeumen des $\mathbb{R}^3$, sodass sie keine direkte Summe bilden! Alle drei Unterraeume ($\neq \{o\}$) muessen verschieden sein, der paarweise Durchschnitt darf nur aus dem Nullvektor bestehen.
2. Gib ein Beispiel mit drei Unterraeumen ($\neq \{o\}$) des $\mathbb{R}^3$, sodass sie tatsaechlich eine direkte Summe bilden!

Loesungsvorschlge:

1. Damit es sich nicht um eine direkte Summe handelt, darf die eindeutige Darstellung zweier Vektoren nicht gegeben sein. Argumentiert man ueber Basen, so heisst das, dass einer der Basisvektoren eine Linearkombination der anderen Basisvektoren sein muss.

   $$U := [u] := [\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}], V := [v] := [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}], W := [w_1, w_2] := [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

   Skizziere die drei Unterraeume. Die paarweisen Durchschnitte ($U \cap V, U \cap W, V \cap W$) bestehen jeweils nur aus dem Nullvektor (offensichtlich?).

   Die Darstellung von (bestimmten) Vektoren von $U + V + W$ ist allerdings nicht eindeutig: betrachte z.B. $a := (0, 1, 0)^T$.

   $a = 1 \cdot u + (-1) \cdot v + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$
   aber auch $a = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w$.

2. Seinen U, V, W die drei Unterraeume: Als notwendige Bedingung benoetigt man, dass der paarweise Durchschnitt $U \cap V, U \cap W, V \cap W$) nur jeweils nur aus dem Nullvektor besteht. Das ist allerdings noch keine ausreichende Bedingung (vgl. oben).
   Eine hinreichende Bedinung ist aber: Waehlt man jeweils ein beliebige Basis von U, und W, so mssen diese Basisvektoren linear unabhaengig sein, denn dadurch kann die Eindeutigkeit der Darstellung eines Vektors aus der Summe garantiert werden.

   Im $\mathbb{R}^3$ koennen hoechstens drei Vektoren linear unabhngig sein. Bei drei Unterraeumen ($\neq \{o\}$) bleibt daher nur ein Basisvektor pro Unterraum uebrig.

   $$U := [u] := [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}], V := [v] := [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}], W := [w] := [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

   $U + V + W = \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Darstellung von jedem Vektor ist eindeutig. (Beweis?)